

# Über die Wechselwirkung schwerer Teilchen mit Elektronen

Autor(en): **Jauch, J.M.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **14 (1941)**

Heft V-VI

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-111188>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Über die Wechselwirkung schwerer Teilchen mit Elektronen

von J. M. Jauch.

(1. VIII. 1941.)

Die relativistisch invarianten Ansätze einer Wechselwirkung von schweren Teilchen mit Elektronen, werden untersucht für den Fall, dass die schweren Teilchen als ruhend betrachtet werden können (statischer Grenzfall). Die Wechselwirkung in einer relativistisch invarianten, quantisierten Feldtheorie drückt sich durch einen invarianten Zusatzterm zur Lagrange-Funktion aus, der eine  $\delta$ -Funktion enthält. Die Eigenfunktionen der stationären Zustände lassen sich exakt und ohne Störungstheorie berechnen, falls man an Stelle der  $\delta$ -Funktion eine endliche  $\Delta$ -Funktion einführt. Der Grenzübergang  $\Delta \rightarrow \delta$  wird für diese Eigenfunktionen untersucht, und es wird gezeigt, dass von fünf möglichen invarianten Ansätzen, welche die zeitliche Ableitung nicht enthalten, nur zwei im Limes  $\Delta \rightarrow \delta$  für die Eigenfunktionen eine Grenzfunktion ergeben. Für die andern Fälle wird das Problem sinnlos. Die beiden Ausnahmefälle dürften deshalb für eine Elektronenpaartheorie der Kernkräfte bevorzugt werden.

## § 1. Einleitung.

Im Hinblick auf die Schwierigkeiten, welche einer Feldtheorie der Kernkräfte mit Mesonen vom Spin 1 entgegenstehen<sup>1)</sup>, ist in letzter Zeit eine schon vor der Mesontheorie von WENTZEL<sup>2)</sup> und gleichzeitig von GAMOW und TELLER<sup>3)</sup> vorgeschlagene Elektronenpaartheorie der Kernkräfte wieder erneut aufgegriffen und durch verschiedene Arbeiten weiter ausgebaut worden<sup>4) 5)</sup>. In dieser Theorie verzichtet man auf den Austauschcharakter der Kernkräfte, und die bekannten Sättigungseigenschaften der Kerne müssen deshalb auf andere Weise erklärt werden. Ferner verzichtet man auf einen Zusammenhang zwischen den Theorien der Kernkräfte und des  $\beta$ -Zerfalls. Vielmehr soll sich dieser aus einer andern Wechselwirkung der schweren Teilchen mit dem Elektron-Neutrino-feld ergeben, von der Art, wie sie von FERMI oder KONOPINSKI-UHLENBECK benützt worden ist, und die dann in

<sup>1)</sup> H. BETHE, Phys. Rev. **57**, 260, 390 (1940).

<sup>2)</sup> G. WENTZEL, Helv. Phys. Acta **10**, 107 (1937); Zs. f. Phys. **104**, 36 (1936).

<sup>3)</sup> GAMOW und TELLER, Phys. Rev. **51**, 289 (1937).

<sup>4)</sup> CRITCHFIELD und TELLER, Phys. Rev. **53**, 812 (1938). — WIGNER, CRITCHFIELD und TELLER, Phys. Rev. **56**, 531 (1939). — CRITCHFIELD und LAMB, Phys. Rev. **58**, 46 (1940).

<sup>5)</sup> MARSHAK, Phys. Rev. **57**, 1101 (1940). — MARSHAK und WEISSKOPF, Phys. Rev. **59**, 130 (1941).

keinem numerischen Zusammenhang mit den Kernkräften steht. Diesen Nachteilen steht der Vorteil gegenüber, dass man schon mit einem einzigen Teilchen ladungsunabhängige Kräfte erhält.

Formal ähnlich dieser Elektronpaartheorie ist die Mesonpaartheorie von WEISSKOPF und MARSHAK<sup>1)</sup>, in der schwere Elektronen vom Spin  $\frac{1}{2}$  die Rolle der leichten Elektronen übernehmen. In dieser Theorie ist eine Beziehung zwischen Kernkräften und  $\beta$ -Zerfall denkbar, jedoch noch nicht untersucht. Die folgenden Betrachtungen können sowohl auf Elektronen- als auch auf Mesonpaare bezogen werden, da sich die beiden Theorien nur durch den Wert der Massenkonzstante, bzw. der Masseneinheit unterscheiden.

Für die Paartheorien der genannten Art ist charakteristisch, dass die Hamiltonfunktion der Elektronen, einschliesslich des Terms, der die Wechselwirkung mit den ruhenden Protonen oder Neutronen beschreibt, in  $\psi$  und  $\psi^*$  bilinear ist:

$$\bar{H} = \int \psi^* \mathcal{H} \psi d\tau$$

$\mathcal{H}$  ist ein Operator, der auf die Orts- und Spinkoordinaten der Elektronen, sowie auf den Spin der schweren Teilchen wirkt. Der Fall, dass die Lagrange-Funktion die zeitlichen Abteilungen enthält, sei zunächst ausgeschlossen<sup>2)</sup>.  $\psi$  und  $\psi^*$  genügen dann den V.-R.

$$[\psi_\alpha^*, \psi_\beta']_+ = \delta_{\alpha\beta} \delta(\vec{x}, \vec{x}')$$

Die Eigenfunktionen  $\psi_n$  von  $\mathcal{H}$  bestimmen sich aus

$$\mathcal{H}\psi_n = \varepsilon_n \psi_n \quad (1)$$

Wenn wir  $\psi$  nach Eigenfunktionen entwickeln

$$\psi = \sum_{(n)} a_n \psi_n$$

so genügen die  $a_n$  den Vertauschungsrelationen

$$[a_n^* a_{n'}]_+ = \delta_{nn'}$$

und  $\bar{H}$  wird in diesen Variablen wenn wir die  $\psi_n$  auf 1 normieren

$$\bar{H} = \sum_{(n)} a_n^* a_n \varepsilon_n$$

Die  $a_n^* a_n$  stellen die Operatoren für die Teilchenzahl des Zustandes  $n$  dar. Sie haben die Eigenwerte 0 oder 1. Das Problem, die Eigenfunktionen und Eigenwerte von

$$\bar{H}F = EF \quad (2)$$

<sup>1)</sup> WEISSKOPF und MARSHAK loc. cit.

<sup>2)</sup> Vgl. hiezü, M. FIERZ, Helv. Phys. Acta 14, 487 (1941).

zu finden, ist damit vollständig gelöst durch die Angabe der Besetzungszahlen  $N_n$  der Zustände  $n$ . Der Eigenwert  $E$  ist dann gegeben durch

$$E = \sum_{(n)} N_n \varepsilon_n.$$

Zu bemerken ist noch, dass in dieser Formulierung die Wechselwirkung der Elektronen untereinander vernachlässigt worden ist.

Wie man sieht, wird das Problem (2) durch die Transformation auf die  $a_n$  reduziert auf das Problem, die Eigenfunktion des Operators  $\mathcal{H}$  zu finden. Das ist ein gewöhnliches Eigenwertproblem im dreidimensionalen Raum.

Da die Proton-Elektronwechselwirkung aus Gründen der relativistischen Invarianz als eine Nahewirkung aufgefasst werden muss, enthält der in  $\mathcal{H}$  enthaltene Kopplungsterm eine  $\delta$ -Funktion. Bei der Bestimmung der Eigenfunktionen von (1) wird man die  $\delta$ -Funktion durch eine Funktion  $\Delta(\varrho)$  ersetzen,

$$\Delta(\varrho) = \begin{cases} \frac{3}{4\pi} \frac{1}{\varrho^3} & \text{für } \varrho < \varrho_0 \\ 0 & \text{für } \varrho > \varrho_0 \end{cases} \quad (3)$$

Dadurch ist natürlich die relativistische Invarianz zerstört. Doch entspricht das dem bekannten Abschneideverfahren, das man immer anwendet, wenn man unendliche Selbstenergien vermeiden will. Man kann sich zufrieden geben, wenn man wenigstens zeigen kann, dass die mit (1) bestimmten Eigenfunktionen  $\varphi_n$  mit abnehmendem  $\varrho_0$  nach gewissen Grenzfunktionen gehen. Wenn diese Grenzfunktionen

$$\psi_n = \lim_{\varrho \rightarrow 0} \varphi_n$$

existieren, dann lässt sich das Problem auch im relativistischen Fall im Prinzip wenigstens sinnvoll formulieren. Die Eigenfunktionen sind ebene Wellen plus auslaufende Kugelwellen.

Es wird im Folgenden gezeigt, dass von den verschiedenen Kopplungsansätzen, die man im Rahmen des kanonischen Formalismus in relativistisch invarianter Weise aufstellen kann, nur zwei die Eigenschaft haben, dass die Grenzfunktionen  $\psi_n$  existieren. Die übrigen Ansätze sind in dieser Hinsicht unbefriedigend.

Das Problem hat noch ein anderes Interesse. Experimentelles Material über die elastische Streuung von Elektronen<sup>1)</sup> scheint darauf hinzudeuten, dass eine nicht-Coulomb'sche Wechselwirkung zwischen Elektronen und Kernen besteht, deren Natur uns noch

<sup>1)</sup> BOSSHARDT und SCHERRER, *Helv. Phys. Acta* **14**, 85 (1941). — SCHERRER und ZÜNTI, *ibid.* 111 (1941), dort auch weitere Literatur.



unbekannt ist, und man wird sich fragen, ob diese Streuanomalien nicht auf Grund der Elektronenpaartheorie erklärbar sind. Das scheint aber nicht der Fall zu sein aus folgendem Grund. Lässt man die Coulombkraft des Kernes auf die Elektronen zunächst ausser acht, so sind die Eigenfunktionen  $\varphi_n$  zwar ebene plus Kugelwellen, solange man mit der  $\Delta$ -Funktion ( $\rho_0 \neq 0$ ) rechnet; doch geht die Amplitude der Kugelwellen beim Übergang zu den Grenzfunktionen  $\psi_n$ , sofern sie überhaupt existieren, das heisst in den beiden Ausnahmefällen, gegen Null. Die nicht-Coulombische Streuung verschwindet also im Limes  $\Delta \rightarrow \delta$ .

Die Streuung von schweren Elektronen an Kernen ist von MARSHAK und WEISSKOPF<sup>1)</sup> für den tensoriellen Kopplungstyp mittelst der Born'schen Näherung berechnet worden, nachdem in einer früheren Arbeit von MARSHAK<sup>2)</sup> Gründe für die Bevorzugung der Tensorwechselwirkung gegeben worden sind. Zu diesen Rechnungen ist zu bemerken, dass die Anwendung des Born'schen Störungsverfahrens auf solche Wechselwirkungen sicher falsch ist, indem sie auch im Grenzfall der  $\delta$ -Funktion endliche Werte für die Streuquerschnitte ergibt, während diese doch nach der hier entwickelten strengen Rechnung entweder Null oder unbestimmt sind<sup>3)</sup>. Auch die Bevorzugung der Tensorwechselwirkung scheint uns damit ungenügend begründet zu sein.

In § 2 werden die invarianten Wechselwirkungen diskutiert und die Formulierung des Eigenwertproblems (1) durchgeführt. Die §§ 3, 4, 5, 6, 7 enthalten die Lösungen dieses Eigenwertproblems für die verschiedenen Fälle. Im § 8 wird noch die Modifikation der Eigenfunktionen durch das Coulombfeld besprochen.

## § 2. Allgemeine Ansätze.

Die Einheiten sind in dieser Arbeit durchwegs so gewählt, dass  $\hbar$ ,  $c$  und  $m = 1$  und dimensionslos sind. Die Einheiten der Länge, Zeit und Energie sind dann  $\frac{\hbar}{mc}$ ,  $\frac{\hbar}{mc^2}$  und  $mc^2$ . Die Energie in diesen Einheiten sei mit  $\varepsilon$  bezeichnet.  $x^\nu$  ( $\nu = 1, \dots, 4$ ) bezeichne die vier Raum-Zeit-Koordinaten, von denen die vierte rein imaginär sein soll.  $p_\nu = -i \frac{\partial}{\partial x^\nu}$  sind die Operatoren für Impuls

<sup>1)</sup> MARSHAK und WEISSKOPF, loc cit.

<sup>2)</sup> loc. cit.

<sup>3)</sup> Ein solches Versagen der Born'schen Näherung ist auch von G. WENTZEL für eine ähnliche Wechselwirkung (Paarerzeugung skalarer Partikeln) festgestellt worden (Helv. Phys. Acta **14**, 3 (1941), Fussnote S. 19). Die Untersuchung des Gültigkeitsbereiches der Born'schen Näherung, sowohl für die Streuung, als auch für die Kernkräfte, sei einer spätern Arbeit vorbehalten.

und Energie.  $\gamma^\mu, \alpha^k$  ( $k = 1, 2, 3$ ),  $\beta$  bezeichnen die Dirac'schen Operatoren. Es ist  $\gamma^4 = \beta$ ,  $\gamma^k = -i\beta\alpha^k$ . Weiter sind  $\sigma^l = -i\alpha^i\alpha^k$  die Operatoren für den Spin. Die Dirac'schen Gleichungen lauten in diesen Einheiten

$$p^\nu \gamma^\nu \psi = i\psi \text{ oder } i\dot{\psi} = \{(\vec{\alpha}, \vec{p}) + \beta\} \psi.$$

Ferner sei  $\gamma^\mu \gamma^\nu = \gamma^{[\mu\nu]}$  und  $\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda = \gamma^{[\mu\nu\lambda]}$ ,  $\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 \gamma^4 = \gamma^5$ . Die entsprechenden Matrizen für die schweren Teilchen werden durch grosse Buchstaben bezeichnet. Die invarianten Wechselwirkungsterme in der Lagrangefunktion schreiben wir in der Form  $\Psi^+ \psi^+ O_s \Psi \psi$  ( $\Psi^+ = i\Psi^* \Gamma^4$ ;  $\psi^+ = i\psi^* \gamma^4$ ). Für  $O_s$  gibt es die folgenden Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} O_1 &= 1 & O_6 &= i\Gamma^\mu p^\mu \\ O_2 &= \Gamma^\mu \gamma^\mu & O_7 &= \Gamma^{[\mu\nu]} (\gamma^\mu p^\nu - \gamma^\nu p^\mu) \\ O_3 &= \Gamma^{[\mu\nu]} \gamma^{[\mu\nu]} & O_8 &= i\Gamma^{[\mu\nu\lambda]} (\gamma^{[\mu\nu]} p^\lambda + \gamma^{[\nu\lambda]} p^\mu + \gamma^{[\lambda\mu]} p^\nu) \\ O_4 &= \Gamma^{[\mu\nu\lambda]} \gamma^{[\mu\nu\lambda]} \\ O_5 &= \Gamma^5 \gamma^5 \end{aligned}$$

Über gleiche Indizes wird immer summiert. Die Darstellung der Invarianten durch die  $\Gamma^\mu, \gamma^\mu$  ist zweckmässig, wenn es sich um eine Übersicht handelt. Für die rechnerische Verwendung ist es vorteilhafter auf die Darstellung in  $\vec{\alpha}, \beta$  überzugehen. Wir wollen ausserdem die Geschwindigkeit der schweren Teilchen gleich null setzen. Das bedeutet, dass  $\Gamma^\mu = 0$  für  $\mu = 1, 2, 3$  und  $\Gamma^4 = 1$  gesetzt wird. Ferner ist  $\Gamma^\mu \Gamma^\nu = i\Sigma^\lambda$ , wo  $\Sigma^\lambda$  die Spinoperatoren für die schweren Teilchen sind, und  $\Psi^* \Psi = \delta(\vec{x})$ , wenn das schwere Teilchen im Nullpunkt angenommen wird, was wir im Folgenden immer tun werden. In dieser Spezialisierung schreiben wir für den Zusatzterm  $\psi^* P_s \psi$ . Man sieht dann sofort, dass  $P_5$  verschwindet. Für die übrigen  $P_s$  hat man<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} P_1 &= -\beta & P_6 &= -i\beta p^4 \\ P_2 &= -1 & P_7 &= -(\vec{\Sigma}, [\vec{\alpha} \times \vec{p}]) \\ P_3 &= -\beta(\vec{\Sigma}, \vec{\sigma}) & P_8 &= i\beta(\vec{\Sigma}, \vec{\sigma}) p^4 - i\beta(\vec{\Sigma}, [\vec{\alpha} \times \vec{p}]) \\ P_4 &= -(\vec{\Sigma}, \vec{\sigma}) \end{aligned}$$

Die Dichte der Lagrangefunktion setzt sich aus zwei Termen zusammen:

$$\begin{aligned} L &= L_0 + L_w \\ L_0 &= i\psi^* \dot{\psi} - \psi^* \{(\vec{\alpha}, \vec{p}) + \beta\} \psi \\ L_w &= \eta \delta(\vec{x}) \psi^* P_s \psi \end{aligned}$$

$\eta$  ist ein Parameter, welcher die Stärke der Kopplung beschreibt.

<sup>1)</sup> Vgl. BETHE und BACHER, Rev. of Mod. Phys. 8, 190, 192 (1936).

Die zu  $\psi_\alpha$  kanonisch konjugierte Variable  $\pi_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_\alpha}$  ist  $\pi_\alpha = i\psi_\alpha^*$  für diejenigen Wechselwirkungen, welche  $p^4$  nicht explizite enthalten. Für  $P_6$  und  $P_8$  dagegen gilt:

$$\begin{aligned} P_6: \quad \pi_\alpha &= i\psi_\alpha^* - i\eta\delta(\vec{x}) (\beta\psi)_\alpha^* \\ P_8: \quad \pi_\alpha &= i\psi_\alpha^* + i\eta\delta(\vec{x}) \{ \beta(\vec{\Sigma}, \vec{\sigma}) \psi \}_\alpha^* \end{aligned}$$

Für die Dichte der Hamiltonfunktion hat man allgemein  $H = \pi \dot{\psi} - L$ . Das ergibt für unsere Fälle

$$H = \psi^* \{ (\vec{\alpha}, \vec{p}) + \beta - \eta\delta(\vec{x}) P_s \} \psi \quad \text{für } s \neq 6, 8 \quad (\text{I})$$

$$\left. \begin{aligned} H &= \psi^* \{ (\vec{\alpha}, \vec{p}) + \beta \} \psi && \text{für } s = 6 \\ H &= \psi^* \{ (\vec{\alpha}, \vec{p}) + \beta + i\eta\delta(\vec{x}) \beta(\vec{\Sigma}, [\vec{\alpha} \times \vec{p}]) \} \psi && \text{für } s = 8 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

In der letzten Form (II) kommt  $\eta$  noch implizite in  $\psi^*$  vor, das durch  $\pi$  ausgedrückt werden muss. In den nächsten Paragraphen soll das Eigenwertproblem (I) für die fünf Fälle (I) gelöst werden. Die beiden letzten Fälle (II), welche zeitliche Ableitungen enthalten, führen zu Schwierigkeiten in der Quantisierung. Auf die nähere Diskussion dieser Schwierigkeiten wird FIERZ in einer nachfolgenden Note eingehen<sup>1)</sup>.

### § 3. Die skalare Wechselwirkung $P_1$ .

Mit dem skalaren Wechselwirkungsansatz lautet das Eigenwertproblem (1)

$$\{ (\vec{\alpha}, \vec{p}) + \nu\beta \} \psi = \varepsilon\psi$$

mit

$$\nu = 1 + \eta\Delta(\varrho)$$

Der Einfluss des schweren Teilchens auf das Elektron ist einer Veränderung der Elektronenmasse im Bereich  $\varrho < \varrho_0$  äquivalent. Die scheinbare Masse an der Stelle  $\varrho$  ist  $\nu = 1 + \eta\Delta(\varrho)$ . Da  $\nu$  kugelsymmetrisch ist, lassen sich die Winkelfaktoren genau so abseparieren wie in der relativistischen Theorie des Wasserstoffatoms. Für die beiden radialen Funktionen  $F_\kappa$  und  $G_\kappa$  erhält man die simultanen Differentialgleichungen<sup>2)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{d}{d\varrho} - \frac{\kappa}{\varrho} \right) G_\kappa + (\varepsilon + \nu) F_\kappa &= 0 \\ \left( \frac{d}{d\varrho} + \frac{2 + \kappa}{\varrho} \right) F_\kappa - (\varepsilon - \nu) G_\kappa &= 0 \end{aligned} \right\}$$

<sup>1)</sup> M. FIERZ, *Helv. Phys. Acta* **14**, 487 (1941).

<sup>2)</sup> H. BETHE, *Handb. der Phys.*, Bd. **24/1**, S. 313.

Für  $\kappa$  sind alle positiven und negativen ganzzahligen Werte zugelassen mit Ausnahme von  $\kappa = -1$ , für welchen Wert keine regulären Lösungen existieren. Der Bahndrehimpuls und die Gesamtdrehimpulsquantenzahlen  $l$  bzw.  $j$  sind mit  $\kappa$  verknüpft durch

$$\begin{aligned} j &= \kappa + \frac{1}{2}; & l &= \kappa & \text{für } \kappa \geq 0 \\ j &= -\kappa - 1 - \frac{1}{2}; & l &= -\kappa - 1 & \text{für } \kappa < 0 \end{aligned}$$

Die Lösungen im Aussenraum  $G'_\kappa$  zeigen das asymptotische Verhalten

$$G'_\kappa \sim \frac{1}{\varrho} \cos(\varrho + \eta_\kappa) \quad (4)$$

Aus den Phasenverschiebungen ergeben sich die Streuamplituden<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} f(\vartheta) &= \frac{i}{2} \sum_{\kappa=0}^{\infty} [(\kappa+1) \{e^{2i\eta_\kappa + i\kappa\pi} + 1\} + \kappa \{e^{2i\eta_{-\kappa-1} + i\kappa\pi} + 1\}] P_\kappa(\cos\vartheta) \\ g(\vartheta) &= \frac{i}{2} \sum_{\kappa=0}^{\infty} [-\{e^{2i\eta_\kappa + i\kappa\pi} - 1\} + \{e^{2i\eta_{-\kappa-1} + i\kappa\pi} - 1\}] P_{\kappa+1}(\cos\vartheta) \end{aligned} \quad (5)$$

Der differentielle Streuquerschnitt ist dann

$$I(\vartheta) = \frac{1}{|k|^2} \{ |f(\vartheta)|^2 + |g(\vartheta)|^2 \}$$

Die Phasenverschiebungen bestimmen sich aus der Stetigkeitsbedingung des Stromes an der Grenzfläche

$$\zeta_\kappa \equiv \frac{f_\kappa}{g_\kappa} = \frac{F'_\kappa}{G'_\kappa} \quad (6)$$

dabei bedeuten:

$$\begin{array}{ll} F'_\kappa, G'_\kappa & \text{die Lösungen für den Aussenraum } \varrho > \varrho_0 \\ f_\kappa, g_\kappa & \text{,, ,, ,, ,, Innenraum } \varrho < \varrho_0 \end{array}$$

Im Fall  $\varrho_0 \ll 1$  sind nur Kugelwellen für  $\kappa = 0$  und  $\kappa = -2$  zu erwarten.

Es sei  $G_\kappa, F_\kappa$  die reguläre Lösung und  $\bar{G}_\kappa, \bar{F}_\kappa$  die singuläre Lösung für den kraftfreien Fall. Die letztere ist erst bestimmt durch die Angabe ihres asymptotischen Verhaltens:

$$\begin{aligned} G_0 &\sim -\frac{1}{x} \sin x & \bar{G}_0 &\sim \frac{1}{x} \cos x \\ G_{-2} &\sim \frac{1}{x} \cos x & \bar{G}_{-2} &\sim \frac{1}{x} \sin x \end{aligned} \quad x = (\varepsilon^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \varrho \quad (7)$$

<sup>1)</sup> N. F. MOTT, Proc. Roy. Soc. **135**, 429 (1932).

Die Lösung im Aussenraum für  $\eta \neq 0$  ist dann eine Linearkombination dieser beiden Funktionen.

$$\begin{aligned} G_{\kappa}' &= \text{const.} \{G_{\kappa} - \xi_{\kappa} \overline{G_{\kappa}}\} \\ F_{\kappa}' &= \text{const.} \{F_{\kappa} - \xi_{\kappa} \overline{F_{\kappa}}\} \end{aligned} \quad (8)$$

Auflösung nach  $\xi_{\kappa}$  und Verwendung von (6) ergibt

$$\xi_{\kappa} = \left( \frac{F_{\kappa} - \zeta_{\kappa} G_{\kappa}}{\overline{F_{\kappa}} - \zeta_{\kappa} \overline{G_{\kappa}}} \right)_{\varrho_0} \quad (9)$$

Aus dem asymptotischen Verhalten der Lösungen im Aussenraum (7) und aus (4) ergibt sich die Beziehung zwischen den Phasenverschiebungen  $\eta$  und den  $\xi$

$$\left. \begin{aligned} \text{ctg } \eta_0 &= -\xi_0 \\ \text{tg } \eta_{-2} &= +\xi_{-2} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Bei Beschränkung auf  $\kappa = 0, -2$  vereinfachen sich auch die Formeln (5) zu

$$\begin{aligned} f(\vartheta) &= \frac{i}{2} \{(1 + e^{2i\eta_0}) + (1 - e^{2i\eta_{-2}}) \cos \vartheta\} \\ g(\vartheta) &= \frac{i}{2} (1 - e^{2i\eta_{-2}}) \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Damit  $f(\vartheta), g(\vartheta)$  nach Null streben, muss  $\eta_0 \rightarrow \frac{\pi}{2}, \eta_{-2} \rightarrow 0$  streben. Wegen (10) genügt es zu zeigen, dass für  $\Delta \rightarrow \delta, \xi_0$  und  $\xi_{-2}$  beide nach Null streben.

Die Lösungen  $F, G$  und  $\overline{F}, \overline{G}$  ohne Wechselwirkung, mit dem verlangten asymptotischen Verhalten (7), lassen sich durch die halbzahligen Besselfunktionen ausdrücken.

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= - \left( \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} J_{3/2}(x) \sim \left( \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ -\frac{x}{3} + \frac{x^3}{30} + \dots \right\} \\ G_0 &= - \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x) \sim -1 + \frac{x^2}{6} + \dots \\ F_{-2} &= \left( \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x) \sim + \left( \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 - \frac{x^2}{6} + \dots \right\} \\ G_{-2} &= - \left( \frac{\pi}{2} \right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} J_{3/2}(x) \sim -\frac{x}{3} + \frac{x^3}{30} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{F}_0 &= -\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{3}{2}}(x) \sim -\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{2} + \dots \right\} \\
 \bar{G}_0 &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{x}{2} + \dots \\
 \bar{F}_{-2} &= \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(x) \sim \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{x}{2} + \dots \right\} \\
 \bar{G}_{-2} &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} J_{-\frac{3}{2}}(x) \sim -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{2} + \dots
 \end{aligned} \right\} (12)$$

$$x = (\varepsilon^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \varrho.$$

Wir haben hier noch den Anfang der Potenzreihenentwicklungen für  $x \ll 1$  hingeschrieben.

Die Lösungen  $f, g$  im Innenraum sind

$$f_0 = (\nu - \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y} \left( \frac{\sinh y}{y} - \cosh y \right)$$

$$g_0 = (\nu + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y} \sinh y$$

$$f_{-2} = (\nu - \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y} \sinh y$$

$$g_{-2} = -(\nu + \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y} \left( \frac{1}{y} \sinh y - \cosh y \right)$$

$$y = (\nu^2 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \varrho (> 0), \quad \nu = 1 + \eta \cdot \frac{3}{4\pi\varrho_0^3} (> \varepsilon)$$

Mit  $\zeta_x = f_x/g_x$  (vgl. (6)) wird

$$\zeta_0 = \left( \frac{\nu - \varepsilon}{\nu + \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \zeta \quad \zeta = \frac{1}{y_0} - \operatorname{ctgh} y_0$$

$$\zeta_{-2} = -\left( \frac{\nu - \varepsilon}{\nu + \varepsilon} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{3} \quad y_0 = (\nu^2 - \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} \varrho_0$$

Im Limes  $\Delta \rightarrow \delta$  ( $\varrho_0 \rightarrow 0$ ) geht  $y_0$  wie  $\varrho_0^{-2}$  gegen  $\infty$ . Man erkennt, dass infolge des Auftretens des  $\operatorname{ctgh} y$ ,  $\lim_{\Delta \rightarrow \delta} \zeta = -1$  ist. Also

$$\zeta_0 \rightarrow -1$$

$$\zeta_{-2} \rightarrow +1$$

Setzen wir in (9) die Potenzentwicklungen (11) (12) ein, so wird

$$\xi_0 = x^2 \frac{\frac{x}{3} \left( \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \right)^{\frac{1}{2}} - \zeta_0}{\zeta_0 x - \left( \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\xi_{-2} = x^2 \frac{+ \left( \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \right)^{\frac{1}{2}} + \zeta_{-2} \frac{x}{3}}{\left( \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \right)^{\frac{1}{2}} x + \zeta_{-2}}$$

Der Faktor  $x^2$  zusammen mit dem beschränkten Verhalten von  $\zeta$  im Limes  $\Delta \rightarrow \delta$  sorgt dann dafür, dass für beide im Limes

$$\xi_0 = \xi_{-2} = 0$$

wird, wie behauptet wurde.

#### § 4. Die Vektorwechselwirkung $P_2$ .

Das Eigenwertproblem lautet hier

$$\{(\vec{\alpha}, \vec{p}) + \beta + \eta \Delta(\varrho)\} \psi = \varepsilon \psi$$

Das ist das Eigenwertproblem eines sich in einem Zentralfeld  $\Delta(\varrho)$  bewegenden Elektrons. Die Lösungen im Innengebiet sind halbzahlige Besselfunktionen des Argumentes  $x = \{(\varepsilon - \eta \Delta)^2 - 1\}^{\frac{1}{2}} \varrho$ , welche sich nun nicht mehr abklingend, sondern oszillatorisch verhalten. Für die in (6) definierte Funktion  $\zeta$  erhalten wir somit

$$\zeta = 1/x_0 - \text{ctg } x_0$$

Im Gegensatz zum vorigen § ist nun hier für  $\varrho_0 \rightarrow 0$   $\zeta$  nicht mehr beschränkt, vielmehr schwankt  $\zeta$  mit abnehmendem  $\varrho_0$  zwischen den Werten  $-\infty$  und  $+\infty$ . Die Werte für  $\xi_0$  und  $\xi_{-2}$ , welche durch die Formeln (9) gegeben sind, nehmen dann mit abnehmendem  $\varrho_0$  immer wieder unendlich grosse Werte an, nämlich dann, wenn einer der Nenner verschwindet. Die Streuung und somit auch die Eigenfunktion bleiben dann also im Limes  $\varrho_0 \rightarrow 0$  unbestimmt. Das  $\delta$ -Potential hat in der relativistischen Theorie des Elektrons keinen Sinn.

#### § 5. Die Tensorwechselwirkung $P_3$ .

Das Eigenwertproblem lautet in diesem Fall

$$(\vec{\alpha}, \vec{p}) \psi + \beta \{1 + \eta \Delta(p) (\vec{\Sigma}, \vec{\sigma})\} \psi = \varepsilon \psi \quad (13)$$

Die Funktion  $\psi$  hängt nun ausser von den Spin- und Ortskoordinaten des Elektrons auch noch vom Spin des schweren Teilchens ab, den wir als  $\frac{1}{2}$  annehmen wollen. Die exakte Berechnung der



Eigenfunktionen und der Streuung lässt sich zwar durchführen, doch für die uns hier interessierende Fragestellung genügt es ja zu untersuchen, ob die Eigenfunktionen im Innengebiet  $\varrho < \varrho_0$  abklingendes oder periodisches Verhalten aufweisen. Im ersten Fall existiert die Grenzfunktion, im zweiten Falle nicht.

Die Lösung von (13) in Polarkoordinaten lässt sich leicht angeben, wenn man beachtet, dass die Gleichung invariant ist bei Drehungen und Spiegelungen des Koordinatensystems. Die Lösungen lassen sich also als Linearkombination solcher Teillösungen schreiben, von denen sich jede nach einer bestimmten irreduziblen Darstellung der Drehungsgruppe transformiert und die ausserdem zu einem bestimmten Spiegelungscharakter gehört.

Um diese Teillösungen zu bestimmen, führen wir die vier Dirac'schen Spinfunktionen  $u^s_1, u^s_2, u^a_1, u^a_2$  und ausserdem die Spinfunktion für den Kernspin  $v_1, v_2$  ein. Die  $u^s_1, u^s_2$  gehören zu den beiden sogenannten grossen Komponenten, während die  $u^a_1, u^a_2$  zu den kleinen Komponenten gehören. Bei Spiegelungen bleiben die  $u^s$  und die  $v$  unverändert, während die  $u^a$  das Vorzeichen wechseln<sup>1)</sup>.

Wir zerlegen die Funktion  $\psi$  in grosse und kleine Komponenten  $\Omega$  und  $\omega$

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= \Psi_1 u_1^s v_1 + \Psi_2 u_2^s v_1 + \Phi_1 u_1^a v_2 + \Phi_2 u_2^a v_2 \\ \omega &= \psi_1 u_1^a v_1 + \psi_2 u_2^s v_1 + \varphi_1 u_1^a v_2 + \varphi_2 u_2^a v_2 \end{aligned} \right\}$$

Unter Einführung eines Operators  $\pi$ , welcher  $u^s$  mit  $u^a$  vertauscht, lässt sich die Gleichung (13) aufspalten in die zwei

$$\left. \begin{aligned} \pi(\vec{\sigma}, \vec{p}) \omega &= \{\varepsilon - 1 - \eta \Delta(p) (\vec{\Sigma}, \vec{\sigma})\} \Omega \\ \pi(\vec{\sigma}, \vec{p}) \Omega &= \{\varepsilon + 1 + \eta \Delta(p) (\vec{\Sigma}, \vec{\sigma})\} \omega \end{aligned} \right\}$$

$\vec{\sigma}$  bedeutet hier die zweireihigen Spinmatrizen.

Die Linearkombination der Spin- und Kugelfunktion, die sich nach einer bestimmten irreduziblen Darstellung transformieren, lassen sich mittelst gruppentheoretischen Methoden bestimmen<sup>2)</sup>. Das Resultat lässt sich folgendermassen schreiben: Wir reduzieren zuerst die Spinräume in einen symmetrischen (triplett) und einen antisymmetrischen (singlett) Bestandteil mit den Spinfunktionen

$$\left. \begin{aligned} u_1^1 &= u_1^a v_1 \\ u_1^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u_1^a v_2 + u_2^a v_1) & u_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u_1^a v_2 - u_2^a v_1) \\ u_1^{-1} &= u_2^a v_2 \end{aligned} \right\}$$

<sup>1)</sup> Vgl. VAN DER WAERDEN, Gruppentheorie und Quantenmechanik, S. 98.

<sup>2)</sup> Vgl. VAN DER WAERDEN, S. 70, Tabelle.

Analog für die grossen Komponenten

$$\begin{aligned} U_1^1 &= u_1^s v_1 \\ U_1^0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u_1^s v_2 + u_2^s v_1) & U_0 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u_1^s v_2 - u_2^s v_1) \\ U_1^{-1} &= u_2^s v_2 \end{aligned}$$

Dann transformiert sich jede der vier Funktionen

$$\begin{aligned} w_{j,j-1}^m &= \frac{1}{(2j-1)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \left[ \frac{(j+m)(j+m-1)}{2} \right]^{\frac{1}{2}} Y_{j-1}^{m-1} u_1^1 + [(j+m)(j-m)]^{\frac{1}{2}} Y_{j-1}^m u_1^0 \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{(j-m)(j-m-1)}{2} \right]^{\frac{1}{2}} Y_{j-1}^{m+1} u_1^{-1} \right\} \\ w_{j,j}^m &= \frac{1}{(2j+1)^{\frac{1}{2}}} \left\{ -[2(j+m)(j-m+1)]^{\frac{1}{2}} Y_j^{m-1} u_1^1 + 2m Y_j^m u_1^0 \right. \\ &\quad \left. + [2(j+m+1)(j-m)]^{\frac{1}{2}} Y_j^{m+1} u_1^{-1} \right\} \\ w_{j,j+1}^m &= \frac{1}{(2j+3)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \left[ \frac{(j-m+2)(j-m+1)}{2} \right]^{\frac{1}{2}} Y_{j+1}^{m-1} u_1^1 \right. \\ &\quad \left. - [(j+m+1)(j-m+1)]^{\frac{1}{2}} Y_{j+1}^m u_1^0 \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{(j+m+2)(j+m+1)}{2} \right]^{\frac{1}{2}} Y_{j+1}^{m+1} u_1^{-1} \right\} \\ v_{j,j}^m &= \frac{1}{(2j+1)^{\frac{1}{2}}} Y_j^m u_0 \end{aligned}$$

nach der Darstellung  $D_j$ . Analog seien die  $W_{j,j-1}^m$ ,  $W_{j,j}^m$ ,  $W_{j,j+1}^m$ ,  $V_j^m$  definiert, indem man in den obigen Ausdrücken überall  $u$  durch  $U$  ersetzt. Es gehören ausserdem  $w_{j,j-1}$ ,  $w_{j,j+1}$ ,  $W_{j,j}$ ,  $V_{j,j}$  zum Spiegelungscharakter  $(-1)^j$ , während  $w_{j,j}$ ,  $v_{j,j}$ ,  $W_{j,j-1}$ ,  $W_{j,j+1}$  zum Spiegelungscharakter  $(-1)^{j+1}$  gehören. Die  $Y_j^m$  in den obigen Formeln stehen für die auf 1 normierten Kugelfunktionen:

$$Y_j^m(\vartheta_1 \varphi) = (-1)^m \left[ \frac{2j+1}{2} \frac{(j-m)!}{(j+m)!} \frac{(1-x^2)^{\frac{m}{2}}}{2^j j!} \right] \frac{d^{j+m}}{dx^{j+m}} (x^2-1)^j \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}}$$

( $x = \cos \vartheta$ )

Schliesslich sind dann

$$\begin{aligned} \omega_{j,m}^+ &= -if_j(\varrho) w_{j,j-1}^m - ih_j(\varrho) w_{j,j+1}^m \\ \Omega_{j,m}^+ &= G_j(\varrho) W_{j,j}^m + K_j(\varrho) V_{j,j}^m \\ \omega_{j,m}^- &= -ig_j(\varrho) w_{j,j}^m - ik_j(\varrho) v_{j,j}^m \\ \Omega_{j,m}^- &= F_j(\varrho) W_{j,j-1}^m + H_j(\varrho) W_{j,j+1}^m \end{aligned}$$

die gesuchten Teillösungen, die sich nach  $D_j$  transformieren und ausserdem zum Spiegelungscharakter  $(-1)^j$  bzw.  $(-1)^{j+1}$  gehören. Die Funktionen  $f, h, G, H$  einerseits und  $F, H, g, k$  andererseits erfüllen je ein System von Differentialgleichungen, das weiter unten angegeben werden soll. Es zeigt sich, dass zu jedem Spiegelungscharakter noch zwei linear unabhängige Lösungen gehören, so dass die Entartung des durch  $j$  charakterisierten Zustandes eine vierfache ist, was auch mit dem Resultat aus dem Vektormodell übereinstimmt. Im Grenzfall  $j = 0$  kann sich die Multiplizität nicht voll ausbilden. Es ist dann  $w_{j,j-1} = w_{j,j} = W_{j,j-1} = W_{j,j} = 0$ . Die Entartung ist dann also nur noch zweifach.

Im Folgenden wollen wir uns auf die Behandlung der mit  $+$  bezeichneten Lösungen beschränken. Die andere Lösung führt auf genau dasselbe System von Gleichungen, so dass damit nichts Neues erreicht wird.

Um die radialen Differentialgleichungen zu bestimmen, muss man das Resultat der Operation  $(\vec{\Sigma}, \vec{\sigma})$  und  $(\vec{p}\vec{\sigma})$  auf die Funktionen  $w$  und  $v$  kennen. Nun ist aber

$$\begin{aligned} (\vec{\Sigma}, \vec{\sigma}) w_{j,j-1} &= w_{j,j-1} \\ (\vec{\Sigma}, \vec{\sigma}) w_{j,j} &= w_{j,j} \\ (\vec{\Sigma}, \vec{\sigma}) w_{j,j+1} &= w_{j,j+1} \\ (\vec{\Sigma}, \vec{\sigma}) v_{j,j} &= -3 v_{j,j} \end{aligned}$$

Ferner ist  $\pi(\vec{p}, \vec{\sigma}) \omega_j^+$  wieder eine Grösse, die sich nach  $D_j$  transformiert.  $\pi$  und  $\vec{p}$  ändern beide bei Spiegelungen das Vorzeichen, also gehört diese Grösse wieder zum Spiegelungscharakter  $(-1)^j$ . Sie ist somit eine Linearkombination von  $W_{j,j}$  und  $V_{j,j}$ . Genau so schliesst man, dass  $\pi(\vec{p}, \vec{\sigma}) \Omega_j^+$  eine Linearkombination von  $w_{j,j-1}$  und  $w_{j,j+1}$  sein muss. Also:

$$\begin{aligned} \pi(\vec{p}, \vec{\sigma}) \omega_j^+ &= A(\varrho) W_{j,j} + B(\varrho) V_{j,j} \\ \pi(\vec{p}, \vec{\sigma}) \Omega_j^+ &= a(\varrho) w_{j,j-1} + b(\varrho) w_{j,j+1} \end{aligned}$$

Die Ausrechnung der Funktionen  $A, B, a, b$ , die etwas langwierig ist, soll hier nicht wiedergegeben werden. Man findet durch Rechnung:

$$\begin{aligned} A(\varrho) &= \frac{1}{2} \left( f' - \frac{j-1}{\varrho} f \right) + \frac{1}{2} \left( h' + \frac{j+2}{\varrho} h \right) \\ B(\varrho) &= -j \left( f' - \frac{j-1}{\varrho} f \right) + (j+1) \left( h' + \frac{j+2}{\varrho} h \right) \end{aligned}$$

$$a(\varrho) = i \frac{2(j+1)}{2j+1} \left( G' + \frac{j+1}{\varrho} G \right) - \frac{i}{2j+1} \left( K' + \frac{j+1}{\varrho} K \right)$$

$$b(\varrho) = i \frac{2j}{2j+1} \left( G' - \frac{j}{\varrho} G \right) + \frac{i}{2j+1} \left( K' - \frac{j}{\varrho} K \right)$$

Andererseits erhält man aus (13) durch Gleichsetzen der Koeffizienten der Winkelfunktionen

$$A(\varrho) = \{\varepsilon - 1 - \eta \Delta(\varrho)\} G(\varrho)$$

$$B(\varrho) = \{\varepsilon - 1 + 3\eta \Delta(\varrho)\} K(\varrho)$$

$$a(\varrho) = -i \{\varepsilon + 1 + \eta \Delta(\varrho)\} f(\varrho)$$

$$b(\varrho) = -i \{\varepsilon + 1 + \eta \Delta(\varrho)\} h(\varrho)$$

Wir führen noch die Abkürzung ein:

$$\zeta = \varepsilon + 1 + \eta \Delta$$

$$\zeta' = \varepsilon - 1 - \eta \Delta$$

$$\zeta'' = \varepsilon - 1 + 3\eta \Delta$$

Dann erhält man schliesslich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( f' - \frac{j-1}{\varrho} f \right) + \frac{1}{2} \left( h' + \frac{j+2}{\varrho} h \right) &= \zeta' G \\ -j \left( f' - \frac{j-1}{\varrho} f \right) + (j+1) \left( h' + \frac{j+2}{\varrho} h \right) &= \zeta'' K \\ -\frac{2(j+1)}{2j+1} \left( G' + \frac{j+1}{\varrho} G \right) + \frac{1}{2j+1} \left( K' + \frac{j+1}{\varrho} K \right) &= \zeta f \\ -\frac{2j}{2j+1} \left( G' - \frac{j}{\varrho} G \right) - \frac{1}{2j+1} \left( K' - \frac{j}{\varrho} K \right) &= \zeta h \end{aligned} \quad (14)$$

Wenn man beachtet, dass die halbzahligen Besselfunktionen Gleichungen genügen von der Form

$$\frac{d}{dx} \{x^{-\frac{1}{2}} J_{j+\frac{1}{2}}(x)\} - \frac{j}{x} x^{-\frac{1}{2}} J_{j+\frac{1}{2}}(x) = -x^{-\frac{1}{2}} J_{j+\frac{3}{2}}(x)$$

$$\frac{d}{dx} \{x^{-\frac{1}{2}} J_{j+\frac{1}{2}}(x)\} + \frac{j+1}{x} x^{-\frac{1}{2}} J_{j+\frac{1}{2}}(x) = x^{-\frac{1}{2}} J_{j-\frac{1}{2}}(x)$$

dann erkennt man, dass man die Lösungen von (14) ansetzen muss in der Form:

$$\begin{aligned} f_j &= c_j x^{-\frac{1}{2}} J_{j-\frac{1}{2}}(x) & G_j &= d_j x^{-\frac{1}{2}} J_{j+\frac{1}{2}}(x) \\ h_j &= c_j' x^{-\frac{1}{2}} J_{j+\frac{3}{2}}(x) & K_j &= d_j' x^{-\frac{1}{2}} J_{j+\frac{1}{2}}(x) \end{aligned} \quad (15)$$

$$x = \kappa \rho$$

$c_j, c_j', d_j, d_j', \kappa$  sind noch zu bestimmende Konstanten. Geht man mit dem Ansatz (15) in die Gleichungen (14), so erhält man für diese Konstanten das lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -\frac{\kappa}{2} c_j + \frac{\kappa}{2} c_j' - \zeta' d_j &= 0 \\ j \kappa c_j + (j+1) \kappa c_j' - \zeta'' d_j' &= 0 \\ -\zeta c_j - \frac{2(j+1)}{2j+1} \kappa d_j + \frac{\kappa}{2j+1} d_j' &= 0 \\ -\zeta c_j' + \frac{2j}{2j+1} \kappa d_j + \frac{\kappa}{2j+1} d_j' &= 0 \end{aligned}$$

Damit es Lösungen besitzt, muss die Determinante  $D$  der Koeffizienten verschwinden:

$$D = \kappa^4 - \kappa^2 \zeta (\zeta' + \zeta'') + \zeta^2 \zeta' \zeta'' = 0$$

$$\kappa^2 = \begin{cases} \zeta \zeta' & 1. \text{ Lösung} \\ \zeta \zeta'' & 2. \text{ Lösung} \end{cases}$$

1. Lösung

$$c_j = \frac{2(j+1)}{2j+1} (\zeta \zeta')^{\frac{1}{2}}$$

$$c_j' = -\frac{2j}{2j+1} (\zeta \zeta'')^{\frac{1}{2}}$$

$$d_j = -\zeta$$

$$d_j' = 0$$

2. Lösung

$$c_j = \frac{1}{2j+1} (\zeta \zeta'')^{\frac{1}{2}}$$

$$c_j' = \frac{1}{2j+1} (\zeta \zeta')^{\frac{1}{2}}$$

$$d_j = 0$$

$$d_j' = \zeta$$

Ob die Wellenfunktion im Innern ( $\rho < \rho_0$ ) oszilliert oder abklingt, hängt vom Vorzeichen von  $\kappa^2 = \zeta \zeta'$  bzw.  $\zeta \zeta''$  ab. Im Falle der zweiten Lösung ist  $\kappa^2 = (\varepsilon + 1 + \eta \Delta)(\varepsilon - 1 + 3 \eta \Delta)$  für grosse Werte von  $\Delta$  positiv. Das bedeutet, dass sich die Lösungen im Innern oszillatorisch verhalten und deshalb für  $\Delta \rightarrow \delta$  keiner Grenzlösung zustreben. Für die andere Lösung mit  $\kappa^2 = \zeta \zeta'$  ist dies zwar der Fall, jedoch genügt das nicht, da die existierenden Grenzfunktionen kein vollständiges Orthogonalsystem bilden.

### § 6. Die Pseudovektorwechselwirkung $P_4$ .

$$(\vec{\alpha}, \vec{p}) \psi + \beta \psi + \eta \Delta(\varrho) (\vec{\Sigma}, \vec{\sigma}) \psi = \varepsilon \psi$$

Diese Gleichung unterscheidet sich von (13) nur durch das Fehlen des Faktors  $\beta$  vor dem Wechselwirkungsterm. Es ändert sich deshalb in der Rechnung des letzten Paragraphen gar nichts ausser der Definition von  $\zeta$ ,  $\zeta'$  und  $\zeta''$

$$\begin{aligned} \zeta &= \varepsilon + 1 - \eta \Delta \\ \zeta' &= \varepsilon - 1 - \eta \Delta \\ \zeta'' &= \varepsilon - 1 + 3 \eta \Delta \end{aligned}$$

Die Lösungen für  $\kappa^2$  sind wieder

$$\kappa^2 = \begin{cases} \zeta \zeta' & \text{1. Lösung} \\ \zeta \zeta'' & \text{2. Lösung} \end{cases}$$

Hier ist es nun die erste Lösung, welche für grosse Werte von  $\Delta$  im Innengebiet das oszillatorische Verhalten hat.

### § 7. Wechselwirkung mit räumlichen Ableitungen $P_7$ .

$$\{(\vec{\alpha}, \vec{p}) + \eta \Delta([\vec{\alpha} \times \vec{p}], \vec{\Sigma})\} \psi + \beta \psi = \varepsilon \psi$$

Die Gleichung lässt sich wieder aufspalten in zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \pi \{(\vec{\sigma}, \vec{p}) + \eta \Delta(\vec{\Sigma}, [\vec{\sigma} \times \vec{p}])\} \omega &= (\varepsilon - 1) \Omega \\ \pi \{(\vec{\sigma}, \vec{p}) + \eta \Delta(\vec{\Sigma}, [\vec{\sigma} \times \vec{p}])\} \Omega &= (\varepsilon + 1) \omega \end{aligned} \quad (16)$$

Auch diese Gleichungen sind invariant bezüglich der Drehspiegelungsgruppe. Es lassen sich deshalb in derselben Weise wie in § 5 diejenigen Teillösungen bestimmen, welche sich nach einer bestimmten Darstellung der Drehgruppe transformieren und ausserdem zu einem bestimmten Spiegelungscharakter gehören. Mit der Bezeichnung des § 5 setzen wir wiederum an

$$\begin{aligned} \omega &= -if(\varrho) w_{j, j-1} - ih(\varrho) w_{j, j+1} \\ \Omega &= G(\varrho) W_{j, j} + K(\varrho) V_{j, j} \end{aligned}$$

Durch direkte Rechnung findet man

$$\begin{aligned} \pi(\vec{\Sigma}, [\vec{\sigma} \times \vec{p}]) \omega &= i \left\{ 2j \left( f' - \frac{j-1}{\varrho} f \right) - 2(j+1) \left( h' + \frac{j+2}{\varrho} h \right) \right\} V_{j, j} \\ \pi(\vec{\Sigma}, [\vec{\sigma} \times \vec{p}]) \Omega &= \frac{2}{2j+1} \left( K' + \frac{j+1}{\varrho} K \right) w_{j, j-1} - \frac{2}{2j+1} \left( K' - \frac{j}{\varrho} K \right) w_{j, j+1} \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Ausdrücke und Nullsetzen der Koeffizienten der Winkelfunktionen führt auf das folgende System von Differentialgleichungen für die radialen Funktionen

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \left( f' - \frac{j-1}{\varrho} f \right) + \frac{1}{2} \left( h' + \frac{j+2}{\varrho} h \right) = \zeta G \\
 & -j \left( f' - \frac{j-1}{\varrho} f \right) (1 - 2i\eta\Delta) + (j+1) \left( h' + \frac{j+2}{\varrho} h \right) (1 - 2i\eta\Delta) = \zeta K \\
 & -\frac{2(j+1)}{2j+1} \left( G' + \frac{j+1}{\varrho} G \right) + \frac{1}{2j+1} \left( K' + \frac{j+1}{\varrho} K \right) (1 + 2i\eta\Delta) = \zeta' f \quad (17) \\
 & -\frac{2j}{2j+1} \left( G' - \frac{j}{\varrho} G \right) - \frac{1}{2j+1} \left( K' - \frac{j}{\varrho} K \right) (1 + 2i\eta\Delta) = \zeta' h \\
 & \quad \zeta = \varepsilon - 1 \qquad \zeta' = \varepsilon + 1
 \end{aligned}$$

Derselbe Ansatz mit Besselfunktionen, wie (15) Seite 478 ergibt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\kappa}{2} c_j + \frac{\kappa}{2} c_j' - \zeta d_j = 0 \\
 & j\kappa(1 - 2i\eta\Delta)c_j + (j+1)\kappa(1 - 2i\eta\Delta)c_j' - \zeta d_j' = 0 \\
 & -\zeta' c_j - \frac{2(j+1)}{2j+1}\kappa d_j + \frac{\kappa(1+2i\eta\Delta)}{2j+1} d_j' = 0 \\
 & -\zeta' c_j' + \frac{2j}{2j+1}\kappa d_j + \frac{\kappa(1+2i\eta\Delta)}{2j+1} d_j' = 0
 \end{aligned}$$

mit der Determinante

$$D = \kappa^4(1+4\eta^2\Delta^2) - \kappa^2\zeta\zeta'(2+4\eta^2\Delta^2) + (\zeta\zeta')^2 = 0$$

$$\kappa^2 = \begin{cases} \zeta\zeta' & \text{1. Lösung} \\ \frac{\zeta\zeta'}{1+4\eta^2\Delta^2} & \text{2. Lösung} \end{cases}$$

Merkwürdig ist, dass  $\kappa$  in der einen Lösung überhaupt unabhängig vom Kopplungsparameter  $\eta$  wird. Die zweite Lösung strebt für  $\Delta \rightarrow \delta$  im Innengebiet nach Null. Die Grenzfunktionen existieren also und sind, wie wir noch zeigen wollen, ebene Wellen.

Zu dem Zweck müssen wir die Funktionen im Innengebiet in physikalisch richtiger Weise an die Funktionen im Aussengebiet anschliessen. Die richtigen Randbedingungen erhält man, wenn man von einer stetigen  $\Delta$ -Funktion ausgeht und dann



den Übergang zu der von uns gewählten unstetigen Funktion macht. Die ersten zwei Gleichungen (17) besagen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varrho} (f + h) &= A(\varrho) \\ \frac{d}{d\varrho} (-jf + (j+1)h) &= B(\varrho) \end{aligned} \quad (18)$$

wobei  $A(\varrho)$  und  $B(\varrho)$  beschränkte Funktionen von  $\varrho$  sind, die wir nicht explizite anzuschreiben brauchen. Integriert man jede der Gleichungen (18) von  $\varrho_1 < \varrho_0$  bis  $\varrho_2 > \varrho_0$ , dann ergibt sich

$$\begin{aligned} (f + h) \Big|_{\varrho_1}^{\varrho_2} &= \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} A(\varrho) d\varrho \\ (-jf + (j+1)h) \Big|_{\varrho_1}^{\varrho_2} &= \int_{\varrho_1}^{\varrho_2} B(\varrho) d\varrho \end{aligned}$$

Diese Gleichungen müssen gültig bleiben, wenn man nun vom stetigen Potentialverlauf zum unstetigen, von uns gewählten  $\Delta(\varrho)$  übergeht. Geht man mit  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  nach  $\varrho_0$ , so erkennt man, dass  $f + h$  und  $-jf + (j+1)h$  bei  $\varrho_0$  stetig verlaufen müssen. Daraus folgt aber auch die Stetigkeit von  $f$  und  $h$  allein. Genau so schliesst man aus der 3. und 4. Gleichung von (17) auf die Stetigkeit von  $G$  und  $K^1$ ). Natürlich ist dann auch die Stromdichte stetig, die sich bilinear aus  $f, h, G$  und  $K$  aufbaut. Um diese Stetigkeitsbedingungen erfüllen zu können, müssen noch diejenigen Lösungen für den kräftefreien Fall hinzugenommen werden, welche im Nullpunkt eine Singularität aufweisen. Wir haben diese nicht explizite aufgeschrieben. Sie lassen sich genau so wie die regulären durch Besselfunktionen, aber mit negativem halbzahligem Index ausdrücken. Wir wollen sie mit  $\bar{f}_a^I, \bar{f}_a^{II}$  bezeichnen, während wir für die mit positiv halbzahligem Index die Bezeichnung  $f_a^I, f_a^{II}$  einführen.

I und II soll die beiden noch möglichen Lösungen unterscheiden. Die Lösung im Innenraum  $f_i$  an der Stelle  $\varrho_0$  ist dann gleich einer Linearkombination dieser vier Funktionen an der Stelle  $\varrho_0$ ; d. h. man hat:

$$f_i(\varrho_0) = \lambda \bar{f}_a^I(\varrho_0) + \mu \bar{f}_a^{II}(\varrho_0) + \sigma f_a^I(\varrho_0) + \tau f_a^{II}(\varrho_0) \quad (19)$$

und noch drei weitere Gleichungen mit  $h, G$  und  $K$ . Das sind

<sup>1)</sup> Dass diese Grenzbindungen nicht selbstverständlich sind, erkennt man aus der analogen Diskussion bei KEMMER, Helv. Phys. Acta X, 57 (1937).

vier Gleichungen für die vier Unbekannten  $\lambda, \mu, \sigma, \tau$ , die sich daraus bestimmen lassen. Um zu zeigen, dass im Grenzfall  $\Delta \rightarrow \delta$  die ebenen Wellen Lösungen des Problems sind, brauchen wir nur zu zeigen, dass die irregulären Bestandteile  $\bar{f}_a^I \bar{f}_a^{II}$  in dieser Linearkombination fortfallen, dass also  $\lambda \rightarrow 0, \mu \rightarrow 0$ . Wenn wir in Gleichung (19) den Grenzübergang  $\Delta \rightarrow \delta (\varrho_0 \rightarrow 0)$  ausführen, so bleibt links für alle Werte von  $\varrho_0$  etwas Endliches stehen. Die beiden irregulären Funktionen  $\bar{f}_a^I(\varrho_0), \bar{f}_a^{II}(\varrho_0)$  dagegen streben mit  $\varrho_0 \rightarrow 0$  nach  $\infty$ , während die beiden regulären Bestandteile  $f_a^I(\varrho_0)$  und  $f_a^{II}(\varrho_0)$  selbst endlich bleiben, oder sogar nach Null streben. Im Grenzfall  $\varrho_0 = 0$  müssen deshalb die beiden Koeffizienten  $\lambda$  und  $\mu$  verschwinden und das bedeutet, dass die Lösung dann identisch ist mit der Lösung für den kräftefreien Fall. Durch geeignete Linearkombination unserer Eigenfunktionen lässt sich dann eine Lösung konstruieren, welche eine ebene Welle darstellt. Wir wollen darauf nicht näher eingehen.

### § 8. Eigenfunktionen im skalaren Fall bei Anwesenheit eines Coulombfeldes.

Bis jetzt haben wir das Coulombfeld vollständig beiseite gelassen. Bei gleichzeitigem Vorhandensein einer Coulombkraft und einer Wechselwirkung  $P_1$  lässt sich die Streuung ausdrücken durch die zusätzlichen Phasenverschiebungen  $\eta_\kappa'$  der Streuwellen im Unendlichen<sup>1)</sup>:

$$I(\vartheta) = \frac{1}{|k|^2} \{ |f + \Phi_f|^2 + |g + \Phi_g|^2 \}$$

$$\Phi_f = e^{2i\eta_0} \frac{\xi_0}{1 + i\xi_0} - e^{2i\eta_{-2}} \frac{\xi_{-2}}{1 + i\xi_{-2}} \cos \vartheta$$

$$\Phi_g = -e^{2i\eta_{-2}} \frac{\xi_{-2}}{1 + i\xi_{-2}} \sin \vartheta$$

mit  $\xi_\kappa = -\operatorname{tg} \eta_\kappa', f(\vartheta), g(\vartheta)$ ;  $\eta_0, \eta_{-2}$  sind die Streuamplituden und Phasenkonstanten für das Coulombfeld allein.

$$\xi_\kappa = \left( \frac{F_\kappa - \zeta_\kappa G_\kappa}{F_\kappa - \zeta G_\kappa} \right)_{\varrho = \varrho_0}$$

$F_\kappa, G_\kappa, \underline{F}_\kappa, \underline{G}_\kappa$  sind die radialen Funktionen (reguläre und irregu-

<sup>1)</sup> J. M. JAUCH, Helv. Phys. Acta XIII, 457 (1940), Gleichungen (6'), (10), (11). In dieser Arbeit sind leider einige entstellende Druckfehler stehen geblieben, die wir am Schluss dieser Arbeit berichtigen.

läre) für den Aussenraum mit den Entwicklungen für  $\alpha^2 \ll 1$  und  $\varrho^2 \ll 1^1$ ).

$$G_0 \sim 1 \qquad G_{-2} \sim \frac{1}{2}(a-b) + \frac{x}{3}$$

$$F_0 \sim \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2}(a+b) + \frac{x}{3} \right\} \qquad F_{-2} \sim - \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$
(19)

$$\underline{G}_0 \sim -\frac{1}{x} \qquad \underline{G}_{-2} \sim -\frac{1}{x^2}$$

$$\underline{F}_0 \sim -\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2} \qquad \underline{F}_{-2} \sim \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x}$$
(19)

Die Definition von  $\zeta_\kappa$  ist  $\zeta_\kappa \equiv f_\kappa/g_\kappa$ , wo  $f_\kappa, g_\kappa$  die Lösungen für den Innenraum sind. Wegen des singulären Verhaltens von  $\underline{G}_\kappa, \underline{F}_\kappa$  für  $x=0$  ist wiederum notwendig und hinreichend für das Verschwinden der Zusatzstreuung das beschränkte Verhalten von  $\zeta_\kappa$  beim Grenzübergang  $\Delta \rightarrow \delta$ .

Die radialen Differentialgleichungen im Innengebiet sind

$$\left( \frac{d}{d\varrho} - \frac{\kappa}{\varrho} \right) G_\kappa = - \left( \varepsilon + \nu + \frac{\alpha}{\varrho} \right) F_\kappa$$

$$\left( \frac{d}{d\varrho} + \frac{2+\kappa}{\varrho} \right) F_\kappa = \left( \varepsilon - \nu + \frac{\alpha}{\varrho} \right) G_\kappa$$
(20)

$\alpha$  ist die Feinstrukturkonstante ( $\sim \frac{Z}{137}$ ). Dabei hat man im Innengebiet ein Coulombpotential und dazu noch die  $\Delta$ -Wechselwirkung angesetzt. Man könnte auch das Coulombpotential im Innern ersetzen durch die  $\Delta$ -Wechselwirkung allein. Das wäre jedoch der in § 3 behandelte Fall und dort wurde ja verifiziert, dass  $\zeta_\kappa$  beschränkt ist.

Die Lösungen von (20), welche regulär im Innengebiet sind, haben nun genau dieselbe Form wie die mit  $\nu=1$  ( $\eta=0$ ), nur die Konstanten sind etwas verändert.

$$f = N \left( \frac{\varepsilon-\nu}{\varepsilon+\nu} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-ix}}{x} (\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$g = N \frac{e^{-ix}}{ix} (\varphi_2 + \varphi_1)$$

$$\varphi_1 = (\gamma + ia')(2ix)^\gamma F(\gamma + ia' + 1; 2\gamma + 1; 2ix)$$

$$\varphi_2 = (\kappa + 1 - ib')(2ix)^\gamma F(\gamma + ia'; 2\gamma + 1; 2ix)$$

$$a' = \frac{\varepsilon\alpha}{(\varepsilon^2 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad b' = \frac{\alpha\nu}{(\varepsilon^2 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad \gamma = [(\kappa + 1)^2 - \alpha^2]^{\frac{1}{2}}$$

<sup>1)</sup> J. M. JAUCH, loc. cit. Formel (27) und (27).

Benützen wir die Entwicklungen (19) für kleine  $x$  mit den Konstanten  $a', b'$  an Stelle von  $a, b$  und bilden wir  $\zeta_x = \frac{f_x}{g_x}$ , so erkennt man leicht, dass  $\zeta_x$  nach einem endlichen Grenzwert strebt, dessen genauer Wert belanglos ist.

In jedem Fall also streben die  $\xi_x$  nach Null mit abnehmendem  $e_0$  und die Streuung geht in die Coulomb'sche über.

### § 9. Ergebnis.

Von den fünf Wechselwirkungstermen  $P_s$  ohne zeitliche Ableitungen sind zwei dadurch ausgezeichnet, dass die Eigenfunktionen des Eigenwertproblems (1) auch im Limes  $\Delta \rightarrow \delta$  existieren. Die beiden Terme sind

$$P_1 = \eta \delta(\vec{x}) \psi^* \beta \psi$$

$$P_7 = \eta \delta(\vec{x}) \psi^* (\vec{\Sigma}, [\vec{\alpha} \times \vec{p}]) \psi$$

Die Eigenfunktionen des Eigenwertproblems (1) sind dann ebene Wellen; die Streuung ist deshalb Null.

Herrn Professor WENTZEL, von dem die Anregung zu dieser Arbeit stammt, möchte ich hier danken für viele klärende Diskussionen über diese Fragen.

Zürich, Physikal. Institut der E.T.H.