Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 16 (1943)
Heft: VI

Artikel: Forces nucléaires de la théorie des paires
Autor: Houriet, A.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-111417

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Forces nucléaires de la théorie des paires

par **A. Houriet.**

(25. IX. 43.)

Le potentiel $V(r)$ entre deux nucléons, fourni par la théorie des paires d'électrons, a été calculé par J. M. JAUCH (I)[1]) dans l'hypothèse d'un couplage scalaire. Le but du présent travail est de compléter les résultats déjà obtenus dans le cas des couplages forts, puis de déterminer l'énergie potentielle U_Z d'un réseau de nucléons. Les calculs montreront que l'hypothèse d'un couplage fort conduit à des forces attractives et saturées.

Soit un champ de particules de spin $\frac{1}{2}$, de masse μ et de charge ε, obéissant aux équations de Dirac. Son hamiltonien sera

$$H_0 = \int d\,x\, \psi^* (\mathfrak{x}) \left\{ \frac{1}{i} \; (\vec{\alpha} \cdot \mathrm{grad}) + \beta\mu \right\} \psi (\mathfrak{x})$$

L'interaction entre le champ et les nucléons de coordonnées $\mathfrak{x}_s$, $s = 1, 2 \ldots Z$, sera décrite, comme dans (I)[1]) par le terme

$$H_1 = \lambda \sum_{s=1}^{Z} \int d\,x'\, f(|\,\mathfrak{x}'\,|)\, \psi^* (\mathfrak{x}' + \mathfrak{x}_s)\, \beta \int d\,x\, f(|\,\mathfrak{x}\,|)\, \psi (\mathfrak{x} + \mathfrak{x}_s)$$

λ est le paramètre de couplage que nous choisissons, comme dans (I) plus grand que zéro: $\lambda > 0$; $f\,(|\,\mathfrak{x}\,|)$ est une fonction-poids qui ne diffère de zéro qu'aux environs de $|\,\mathfrak{x}\,| = 0$. Le système champ + nucléons aura pour hamiltonien

$$H = H_0 + H_1$$

Transformons H dans l'espace d'impulsion $\mathfrak{k}$ en supposant le champ périodique suivant V. On a

$$\psi (\mathfrak{x}) = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \sum_{\mathfrak{k}} e^{i\,(\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{x})}\, \psi_{\mathfrak{k}}\,, \quad \psi^* (\mathfrak{x}) = \frac{1}{V^{\frac{1}{2}}} \sum_{\mathfrak{k}} e^{-i\,(\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{x})}\, \psi^*_{\mathfrak{k}}\,,$$

$$H = \sum_{\mathfrak{k}} \psi^*_{\mathfrak{k}} \left\{ \vec{\alpha} \cdot \mathfrak{k}) + \beta\mu \right\} \psi_{\mathfrak{k}} + \frac{\lambda}{V} \sum_{s=1}^{Z} \sum_{\mathfrak{k}, \mathfrak{k}'} g^*_{\mathfrak{k}}\, g_{\mathfrak{k}'}\, e^{i\,(\mathfrak{k}' - \mathfrak{k} \cdot \mathfrak{x}_s)}\, \psi^*_{\mathfrak{k}}\, \beta\, \psi_{\mathfrak{k}'}$$

---

[1]) J. M. JAUCH, H.P.A. XV p. 175 et suiv. Travail que nous désignerons par (I).

Les $g_{\mathfrak{k}}$ s'introduisent comme correspondants de $f(|\mathfrak{x}|)$ dans le développement de Fourier et sont tels que

$$g_{\mathfrak{k}} = g(|\mathfrak{k}|) \cong \begin{matrix} 0 \text{ si } |\mathfrak{k}| \gg A \\ 1 \text{ si } |\mathfrak{k}| \ll A \end{matrix}$$

La longueur $1/A$ est introduite dans la théorie comme mesure du rayon du proton.

Soient ω_m et Ω_m les valeurs propres des systèmes H_0 et H. Par définition l'énergie E_Z du système formé par les Z nucléons sera donnéé par (cf. I)

$$E_Z = \sum_m (\Omega_m - \omega_m)$$

$$\Omega_m, \ \omega_m < 0$$

La détermination des valeurs propres Ω_m de H revient à trouver les Ω qui annulent le déterminant $\Delta(\Omega^2)$ du système

$$\{(\vec{\alpha} \cdot \mathfrak{k}) + \beta\mu - \Omega\} \psi_{\mathfrak{k}} + \frac{\lambda}{V} \sum_{s=1}^{Z} \sum_{\mathfrak{k}'} g_{\mathfrak{k}}^* \, g_{\mathfrak{k}'} \, e^{i(\mathfrak{k}'-\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{x}_s)} \beta \, \psi_{\mathfrak{k}'} = 0 \tag{1}$$

Pour calculer E_Z, nous utiliserons la méthode développée par G. Wentzel (II)[1]) dans le cas des mésons de spin 0. Désignons par $\Delta_0(\Omega^2)$ le déterminant du système (1) pour $\lambda = 0$. Soient Ω_m^2 les racines de $\Delta(\Omega^2)$, ω_m^2 celles de $\Delta_0(\Omega^2)$. Posons $\Omega^2 = \zeta$ et introduisons $\varphi_Z(\zeta)$ définie par

$$\varphi_Z^2(\zeta) = \frac{\Delta(\zeta)}{\Delta_0(\zeta)} \ ^{2)} \tag{2}$$

Soit C un chemin du plan ζ évitant l'origine et qui enveloppe toutes les racines ω_m^2 et Ω_m^2. On a

$$E_Z = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \log \varphi_Z(\zeta) \tag{3}$$

Nous posons $\zeta = \mu^2 + \xi + i\eta = \mu^2 + \varkappa^2$($\xi$ et η réels) et désignons par $\varphi_Z(\varkappa)_\pm$ les limites de $\varphi_Z(\zeta)$ pour $\eta = \pm 0 \, . \, \varkappa$ (réel). Comme nous le verrons, l'hypothèse $\lambda > 0$ conduit à des valeurs propres

---

[1]) G. Wentzel, H.P.A. XV, p. 111. Travail que nous désignerons par (II).

[2]) Remarquons que dans (II) $\varphi_z(\zeta)$ était définie un peu différemment:

$$\varphi_Z(\zeta) = \frac{\Delta(\zeta)}{\Delta_0(\zeta)} \, .$$

La définition (2) est ici plus adéquate du fait que Δ et Δ_0 ont toutes leurs racines doubles.

$\Omega^2 \geqslant \mu^2$[1]), les $\varkappa$ seront donc toujours réels. Il viendra

$$E_Z = -\frac{1}{\pi i} \int_0^\infty d\varkappa \cdot \frac{\varkappa}{\sqrt{\mu^2 + \varkappa^2}} \log \left(\frac{\varphi_Z(\varkappa)_+}{\varphi_Z(\varkappa)_-} \right) \tag{4}$$

En remarquant que $\varphi_Z(\varkappa)_+ = (\varphi_Z(\varkappa)_-)^*$, on peut encore écrire

$$E_Z = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty d\varkappa \frac{\varkappa}{\sqrt{\mu^2 + \varkappa^2}} \arg \varphi_Z(\varkappa)_+ \tag{5}$$

Un seul nucléon (Z = 1).

Soit un nucléon en $\mathfrak{x}_1 = 0$. Le système (1) se réduit à

$$\{(\vec{\alpha} \cdot \mathfrak{k}) + \beta\mu - \Omega\} \psi_{\mathfrak{k}} + \frac{\lambda}{V} g_{\mathfrak{k}}^* \beta \sum_{\mathfrak{k}'} g_{\mathfrak{k}'} \psi_{\mathfrak{k}'} = 0$$

On trouve pour $\varphi_1(\zeta)$, $(\omega_{\mathfrak{k}}^2 = \mu^2 + k^2)$

$$\varphi_1(\zeta) = \left(1 + \frac{\lambda}{V} \sum_{\mathfrak{k}} |g_{\mathfrak{k}}|^2 \frac{\mu + \sqrt{\zeta}}{\omega_{\mathfrak{k}}^2 - \zeta}\right)\left(1 + \frac{\lambda}{V} \sum_{\mathfrak{k}} |g_{\mathfrak{k}}|^2 \frac{\mu - \sqrt{\zeta}}{\omega_{\mathfrak{k}}^2 - \zeta}\right)$$

Il est évident que pour $\lambda > 0$ et $\zeta < \mu^2$ on a $\varphi_1(\zeta) > 0$. Il n'existe pas de racines $|\Omega_m| < \mu$. Nous choisissons, pour la commodité des calculs, la fonction-poids particulière

$$|g_{\mathfrak{k}}|^2 = \frac{1}{1 + \frac{k^2}{A^2}} = |g_{\mathfrak{k}}|^2 \tag{6}$$

Cette fonction ne suffit pas pour assurer la convergence de l'énergie propre. Ce fait ne joue d'ailleurs aucun rôle, puisque dans le calcul du potentiel $V(r)$ entre deux nucléons et de l'énergie potentielle U_Z de Z nucléons, le terme correspondant à l'énergie propre est toujours éliminé. Nous posons de nouveau $\zeta = \mu^2 + \xi + i\eta = \mu^2 + \varkappa^2$. La passage aux limites $V = \infty$, $\eta = \pm 0$ donnera

$$\lim_{\substack{V=\infty \\ \eta=\pm 0}} \frac{1}{V} \sum_{\mathfrak{k}} \frac{|g_{\mathfrak{k}}|^2}{\omega_{\mathfrak{k}}^2 - (\mu^2 + \varkappa^2)} = \frac{1}{4\pi} (A \pm i\varkappa) |g(\varkappa)|^2$$

$$= \frac{1}{4\pi} (A \pm i\varkappa) \cdot \frac{1}{1 + \frac{\varkappa^2}{A^2}} \tag{7}$$

---

[1]) Lorsque λ est négatif, $\lambda < 0$, il existe pour $\Delta(\Omega^2)$ des racines Ω_m telles que $\Omega^2{}_m < \mu^2$. Le $\varkappa$ correspondant, tel que $R\varphi(\varkappa)_\pm = 0$ est alors purement imaginaire $\varkappa = i\beta$. Cette éventualité, déjà étudiée par CRITCHFIELD (Phys. Rev. **59**, p. 48 et suiv.) correspond à l'apparition d'états où une paire de particules du champ se trouve liée à la particule lourde. La méthode de calcul indiquée par WENTZEL (II) s'applique aussi à ce cas. Il suffit de choisir un chemin C qui contienne toutes les racines $\Omega^2{}_m$ y compris la racine $\mu^2 - \beta^2$.

ce qui donne pour $\varphi_1(\varkappa) \pm$

$$\varphi_1(\varkappa) \pm = 1 + \frac{\lambda \mu}{2\pi} |g(\varkappa)|^2 \cdot (A \pm i\varkappa) - \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} \varkappa^2 \cdot |g(\varkappa)|^4 \cdot (A \pm i\varkappa)^2 \tag{8}$$

Pour éviter la divergence de E_1, nous intégrons formellement jusqu'à A', nous réservant de poser plus tard $A' = \infty$ une fois l'énergie propre soustraite de E_2 et de E_Z.

$$E_1 = -\frac{1}{\pi i} \int_0^{A'} d\varkappa \cdot \frac{\varkappa}{\sqrt{\mu^2 + \varkappa^2}} \log \left(\frac{\varphi_1(\varkappa)_+}{\varphi_1(\varkappa)_-} \right)$$

Potentiel V (r) entre deux nucléons.

Soient deux nucléons de coordonnées $\mathfrak{x}_1 = (0, 0, r/2)$ et $\mathfrak{x}_2 = (0, 0, -r/2)$. Le calcul du déterminant du système (1) conduit à la fonction $\varphi_2{}^2(\zeta)$. Cette fonction se trouve dans le travail de Jauch (I) sous le n⁰ (2.3). Il suffit d'y remplacer Ω par $\sqrt{\zeta}$ et η par $\lambda/4\pi^3$ et de poser notre fonction $|g_k|$ (6) en lieu de la fonction-poids

$$|g_k| = \begin{matrix} 0 \text{ si } |\mathfrak{k}| > K \\ 1 \text{ si } |\mathfrak{k}| < K \end{matrix}$$

utilisée par Jauch. Il vient en passant à la limite $V = \infty$.

$$\varphi_2(\zeta) = \varphi_{21}(\zeta) \cdot \varphi_{22}(\zeta)$$

avec

$$\varphi_{21}(\zeta) = 1 + \lambda(\mu + \sqrt{\zeta}) D + \lambda(\mu - \sqrt{\zeta}) F + (\mu^2 - \zeta) DF + \lambda^2 E^2$$

$$\varphi_{22}(\zeta) = 1 + \lambda(\mu - \sqrt{\zeta}) D + \lambda(\mu + \sqrt{\zeta}) F + (\mu^2 - \zeta) DF + \lambda^2 E^2$$

D, F, E étant définis par

$$D = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dk \, |g_k|^2 \left(\frac{k^2 r + k \sin kr}{\omega_k^2 - \zeta} \right)$$

$$F = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dk \, |g_k|^2 \left(\frac{k^2 r - k \sin kr}{\omega_k^2 - \zeta} \right)$$

$$E = \frac{1}{2\pi^2 r^2} \int_0^\infty dk \, |g_k|^2 \cdot k \cdot \left(\frac{\sin kr - kr \cos kr}{\omega_k^2 - \zeta} \right)$$

Soit de nouveau $\zeta = \mu^2 + \varkappa^2 = \mu^2 + \xi + i\eta$. Définissons

$$J_0 \pm = \lim_{\eta = \pm 0} \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dk \, |g_k|^2 \cdot \frac{k^2}{k^2 - \varkappa^2}$$

$$J_{1\pm} = \lim_{\eta = \pm 0} \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty dk \cdot |g_k|^2 \left(\frac{k \cdot \sin k r}{k^2 - \varkappa^2} \right)$$

J_0 a été calculé, voir (7). J_1 s'obtient facilement à l'aide du calcul des résidus

$$J_{1\pm} = \frac{1}{4\pi} |g(\varkappa)|^2 \left\{ \frac{e^{\pm i\varkappa r} - e^{-A r}}{r} \right\} \equiv \chi(r, \varkappa)_\pm \tag{9}$$

Pour la suite de nos calculs, nous supposerons $A r \gg 1$ de telle sorte que nous puissions négliger $e^{-A r}$. Avec ces notations, on a

$$D = J_0 + J_1 \qquad F = J_0 - J_1 \qquad E = -\frac{\partial J_1}{\partial r}$$

et il vient pour $\varphi_{21}(\varkappa)$ et $\varphi_{22}(\varkappa)$

$$\begin{aligned} \varphi_{21}(\varkappa) \pm = 1 &+ \frac{\lambda\mu}{2\pi} |g(\varkappa)| (A \pm i\varkappa) - \frac{\lambda^2 \varkappa^2}{(4\pi)^2} \cdot |g(\varkappa)|^4 \cdot (A \pm i\varkappa)^2 \\ &+ \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\mu^2 + \varkappa^2} \cdot |g(\varkappa)|^2 \frac{e^{\pm i\varkappa r}}{r} \\ &+ \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} |g(\varkappa)|^4 \cdot \frac{e^{\pm 2 i\varkappa r}}{r^4} (1 \mp 2 i\varkappa r) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{22}(\varkappa) \pm = 1 &+ \frac{\lambda\mu}{2\pi} |g(\varkappa)|^2 (A \pm i\varkappa) - \frac{\lambda^2 \varkappa^2}{(4\pi)^2} |g(\varkappa)|^4 (A \pm i\varkappa)^2 \\ &- \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\mu^2 + \varkappa^2} \, |g(\varkappa)|^2 \frac{e^{\pm i\varkappa r}}{r} \\ &+ \frac{\lambda^2}{(4\pi)^2} |g(\varkappa)|^4 \cdot \frac{e^{\pm 2 i\varkappa r}}{r^4} (1 \mp 2 i\varkappa r) \end{aligned} \tag{11}$$

Le potentiel $V(r)$ est défini par

$$V(r) = E_2(r) - 2 E_1$$

L'utilisation des formules (4) et (5) donne

$$V(r) = -\frac{1}{\pi i}\int_0^\infty d\varkappa \cdot \frac{\varkappa}{\sqrt{\mu^2+\varkappa^2}}\left\{\log\left(\frac{\varphi_{21}(\varkappa)_+}{\varphi_{21}(\varkappa)_-}\right) + \log\left(\frac{\varphi_{22}(\varkappa)_+}{\varphi_{22}(\varkappa)_-}\right) - 2\log\left(\frac{\varphi_1(\varkappa)_+}{\varphi_1(\varkappa)_-}\right)\right\} \tag{12}$$

$$V(r) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\varkappa \cdot \frac{\varkappa}{\sqrt{\mu^2+\varkappa^2}}\left\{\arg\varphi_{21}(\varkappa)_+ + \arg\varphi_{22}(\varkappa)_+ - 2\arg\varphi_1(\varkappa)_+\right\} \tag{13}$$

Couplage très fort $\lambda \to \infty$.

Dans $\varphi_{21}(\varkappa)$ et $\varphi_{22}(\varkappa)$, nous ne conserverons que les termes en λ^2. Cette approximation permet de poser $\varphi_{21}(\varkappa)_\pm = \varphi_{22}(\varkappa)_\pm$

$$= \overline{\varphi_2(\varkappa)}_\pm = \frac{\lambda^2\,|g(\varkappa)|^4}{4\pi)^2}\left\{\frac{e^{\pm 2i\varkappa r}}{r^4}(1\mp 2i\varkappa r) - \varkappa^2(A\pm i\varkappa)^2\right\} \tag{14}$$

Représentons $\overline{\varphi}_2$ en fonction de $\varkappa$ dans son plan complexe. Soit $\varkappa_2$ tel que la partie réelle de $\overline{\varphi}_2$ soit nulle.

$$R\,\overline{\varphi_2(\varkappa_2)}_\pm = 0 \tag{15}$$

On vérifie que l'on a approximativement $\varkappa_2 \cong 1/Ar^2$ donc

$$|\varkappa_2 r| \ll 1 \qquad |\varkappa_2| \ll A \qquad |g(\varkappa_2)| \cong 1 \tag{16}$$

En $\varkappa = \varkappa_2$ on a pour partie imaginaire de $\overline{\varphi_2(\varkappa)}_\pm$

$$\text{Imag}\ \overline{\varphi_2(\varkappa)}_\pm \cong \mp\frac{2\lambda^2 A}{(4\pi)^2}\cdot \varkappa_2{}^3$$

L'argument de $\overline{\varphi}_{2+}$ croit de $-\pi$ aux environs de $\varkappa = \varkappa_2$. Cet accroissement s'effectue sur un intervalle $\Delta\varkappa_2$ tel que $|\Delta\varkappa_2| \ll \varkappa_2$. On pourra donc poser

$$\begin{aligned} &\arg\overline{\varphi_2(\varkappa)}_+ \cong 0 && \text{si}\quad 0 \leqslant \varkappa < \varkappa_2 \\ &\arg\overline{\varphi_2(\varkappa)}_+ \cong -\pi && \text{si}\quad \varkappa_2 < \varkappa \ll A \end{aligned} \tag{17}$$

et l'on obtient pour $\overline{\varphi_2(\varkappa)}_\pm$ la représentation suivante:

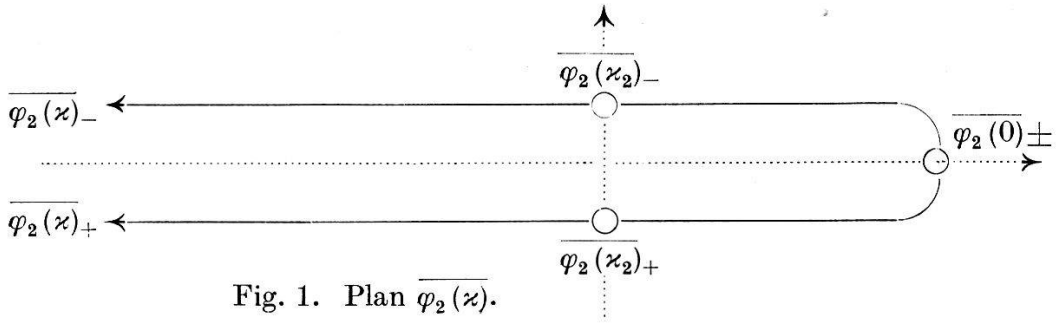

Fig. 1. Plan $\overline{\varphi_2(\varkappa)}$.

Représentons aussi $\varphi_1(\varkappa)_\pm$ dans son plan complexe. Soit $\varkappa_1$ tel que la partie réelle de $\varphi_1(\varkappa)_\pm$ soit nulle

$$R\varphi_1(\varkappa_1)_\pm = 0 \tag{18}$$

On vérifie que pour λ tendant vers ∞, $\varkappa_1$ tend vers 0 comme $1/\lambda$. L'argument de $\varphi_1(\varkappa)_+$ croît de $-\pi$ aux environs de $\varkappa = \varkappa_1$. Cet accroissement s'effectue sur un intervalle $\Delta\varkappa_1$ tel que $|\Delta\varkappa_1| \ll \varkappa_1$. Par conséquent, quand $\lambda \to \infty$ $(\varkappa_1 \to 0)$ nous poserons:

$$\arg \varphi_1(\varkappa)_+ \cong -\pi \quad \text{pour} \quad 0 \cong \varkappa_1 < \varkappa \ll A \tag{19}$$

et nous obtiendrons pour $\varphi_1(\varkappa)_\pm$ une représentation identique à celle de la fig. 1, l'indice 1 remplaçant l'indice 2 de la figure. La comparaison entre (17) et (19) montre que sur l'intervalle $0 \cong \varkappa_1 < x < \varkappa_2$ les arguments des fonctions $\varphi_1(\varkappa)_+$ et $\overline{\varphi_2(\varkappa)}_+$ diffèrent de π, tandis que pour $\varkappa > \varkappa_2$ les deux fonctions ont approximativement le même argument. En conséquence, pour calculer $V(r)$, nous diviserons l'intervalle d'intégration $0 \leqslant \varkappa \leqslant \infty$ en deux parties: l'une $0 \cong \varkappa_1 \leqslant \varkappa \leqslant \varkappa_2 \cong 1/Ar^2$ qui fournit $V_1(r)$, l'autre $1/Ar^2 \cong \varkappa_2 < \varkappa \leqslant \infty$ qui donne $V_2(r)$, le potentiel total $V(r)$ s'exprimant comme somme de $V_1(r)$ et de $V_2(r)$.

$$V(r) = V_1(r) + V_2(r) \tag{20}$$

Nous calculons $V_1(r)$ à l'aide de (5), $V_2(r)$ avec (4). On trouve d'abord

$$V_1(r) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{Ar^2}} d\varkappa \cdot \frac{\varkappa}{\sqrt{\mu^2+\varkappa^2}} \cdot 2\pi$$

$$V_1(r) = -4\left(\sqrt{\mu^2 + \left(\frac{1}{Ar^2}\right)^2} - \mu\right) \tag{21}$$

$V_2(r)$ calculé à partir de (4) est donné par

$$V_2(r) = -\frac{1}{\pi i}\int_{\frac{1}{Ar^2}}^{\infty} d\varkappa \frac{\varkappa}{\sqrt{\mu^2+\varkappa^2}}\, 2\log \frac{\left(\frac{\overline{\varphi_2(\varkappa)}_+}{\varphi_1(\varkappa)_+}\right)}{\left(\frac{\overline{\varphi_2(\varkappa)}_-}{\varphi_1(\varkappa)_-}\right)}$$

On a d'ailleurs en ne conservant dans $\varphi_1(\varkappa)_\pm$ que le terme en λ^2

$$\frac{\overline{\varphi_2(\varkappa)}_\pm}{\varphi_1(\varkappa)_\pm} = 1 - \frac{(1 \mp 2i\varkappa r)e^{\pm 2i\varkappa r}}{\varkappa^2 r^4 (A \pm i\varkappa)^2} = 1 + y(\varkappa)_\pm$$

Si $\varkappa > 1/Ar^2$, on aura $|y(\varkappa)| < 1$. Nous développerons

*

$\log(1 + y(\varkappa)_\pm) = y(\varkappa)_\pm + \cdots$. L'évaluation de l'erreur commise montre que, pour l'intervalle $\varkappa > 1/Ar^2$ on peut poser

$$\log(1 + y(\varkappa)_\pm) \cong y(\varkappa)_\pm$$

Il vient

$$V_2(r) = -\frac{1}{\pi i} \int_{\frac{1}{Ar^2}}^{\infty} d\varkappa \cdot \frac{2\varkappa}{\sqrt{\mu^2 + \varkappa^2}} (y(\varkappa)_+ - y(\varkappa)_-)$$

Seuls les éléments $\varkappa \ll A$ contribuent à l'intégrale (à cause de $Ar \gg 1$). Au dénominateur de $y(\varkappa)_\pm$ nous remplacerons donc $(A \pm i\varkappa)$ par A.

$$V_2(r) = \frac{8}{\pi A^2 r^3} \int_{\frac{1}{Ar^2}}^{\infty} \frac{d\varkappa}{\sqrt{\mu^2 + \varkappa^2}} \left(\frac{\sin 2\varkappa r}{2\varkappa r} - \cos 2\varkappa r\right)$$

Utilisant le fait que $|\varkappa_2 r| \cong 1/Ar \ll 1$ on vérifie que l'on peut remplacer dans $V_2(r)$ la limite inférieure $1/Ar^2$ par 0

$$V_2(r) = \frac{8}{\pi A^2 r^3} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{\mu^2 + \varkappa^2}} \left(\frac{\sin 2\varkappa r}{2\varkappa r} - \cos 2\varkappa r\right) \tag{23}$$

Nous retrouvons dans $V_2(r)$, à un facteur numérique près qui provient du choix de fonctions-poids différentes, le potentiel donné par J. Jauch dans (I), page 187. Les calculs précédents montrent que cette formule est incomplète et que l'on a d'après (20), (21) et (23)

$$V(r) = -4\left\{\sqrt{\mu^2 + \left(\frac{1}{Ar^2}\right)^2} - \mu\right\} + \frac{8}{\pi A^2 r^3} \int_0^{\infty} \frac{d\varkappa}{\sqrt{\mu^2 + \varkappa^2}} \left\{\frac{\sin 2\varkappa r}{2\varkappa r} - \cos 2\varkappa r\right\} \tag{24}$$

Pour discuter $V(r)$ nous exprimerons $V_2(r)$ au moyen des fonctions de Hankel. On a

$$\int_0^{\infty} dy \frac{\cos y}{\sqrt{(2\mu r)^2 + y^2}} \equiv \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(2i\mu r)$$

$V_2(r)$ s'écrira

$$V_2(r) = \frac{4}{A^2 r^3} \left\{\frac{1}{2\mu r} \int_0^{2\mu r} d\varrho\, i H_0^{(1)}(i\varrho) - i H_0^{(1)}(2i\mu r)\right\}$$

$$V_2(r) = \frac{4}{A^2 r^3} \left\{ \frac{1}{2\mu r} \int_0^\infty d\varrho\, i H_0^{(1)}(i\varrho) \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2\mu r} \int_{2\mu r}^\infty d\varrho\, i H_0^{(1)}(i\varrho) - i H_0^{(1)}(2 i \mu r) \right\}$$

L'intégrale

$$\int_0^\infty d\varrho\, i\, H_0^{(1)}(i\varrho)$$

vaut 1. On aura finalement

$$V_2(r) = \frac{4}{A^2 r^3} \left\{ \frac{1}{2\mu r} - \frac{1}{2\mu r} \int_{2\mu r}^\infty d\varrho\, i H_0^{(1)}(i\varrho) - i H_0^{(1)}(2 i \mu r) \right\} \quad (23a)$$

Remarquons que $V_2(r)$ (23) a pour valeur maximale $\frac{8}{\pi A^2 r^3}$, valeur atteinte pour $\mu r = 0$, puisque

$$\int_0^\infty \frac{dy}{y} \left(\frac{\sin 2yr}{2yr} - \cos 2yr \right) = 1$$

et que $V_2(r)$ est une fonction décroissante de μr.

Intervalle I:

$$\frac{1}{A} \ll r \ll \frac{1}{\sqrt{\mu A}}$$

c'est-à-dire

$$\mu r \ll \frac{1}{Ar} \ll 1$$

On a (21) et (23)

$$V_1(r) = -\frac{4}{Ar^2}$$

$$V_2(r) \cong -\frac{8}{\pi A^2 r^3} \int_0^\infty \frac{dy}{y} \left(\frac{\sin y}{y} - \cos y \right) = \frac{8}{\pi A^2 r^3}$$

Comme on avait supposé $Ar \gg 1$, il restera pour $V(r)$

$$V(r) \cong V_1(r) = -\frac{4}{Ar^2} \quad (25)$$

Dans le cas particulier de la théorie des paires d'électrons $\mu \cong 0$; la formule (25) est valable pour toutes les valeurs intéressantes

de r. Comme nous le verrons plus loin, la partie $V_1(r)$ du potentiel fournit des forces saturées qui n'ont aucun équivalent dans la théorie des paires de mésons de spin 0 (cf. II).

Intervalle II:

$$r \gg \frac{1}{\sqrt{\mu A}} \quad \text{soit} \quad \mu \gg \frac{1}{A r^2}$$

Dans ce cas, l'utilisation de (20), (21) et (23) conduit à

$$V(r) = -\frac{2}{(Ar^2)^2 \mu} + \frac{4}{A^2 r^3} \left\{ \frac{1}{2\mu r} - \frac{1}{2\mu r} \int_{2\mu r}^{\infty} d\varrho \, i H_0^{(1)}(i\varrho) - i H_0^{(1)}(2 i \mu r) \right\}$$

$$V(r) = -\frac{4}{A^2 r^3} \left\{ i H_0^{(1)}(2 i \mu r) + \frac{1}{2\mu r} \int_{2\mu r}^{\infty} d\varrho \, i H_0^{(1)}(i\varrho) \right\} \tag{26}$$

L'utilisation des développements asymptotiques des fonctions de Hankel pour $\mu r \gg 1$ permettra de poser, en nous bornant au terme principal

$$V(r) = -\frac{4}{A^2 r^3} \cdot \frac{e^{-2\mu r}}{\sqrt{\pi \mu r}} \quad (\mu r \gg 1) \tag{27}$$

$V(r)$ correspond donc à une force attractive de portée $\sim 1/\mu$.

Réseau de nucléons.

Supposons que le volume de périodicité $V = L^3$ contienne $Z = N^3$ nucléons disposés en réseau cubique de maille a^3, c'est-à-dire que $\mathfrak{x}_{si}$ est un multiple de $a = N/L$. (1) aura la forme

$$\{(\vec{\alpha} \cdot \mathfrak{k}) + \beta\mu - \Omega\} \, \psi_{\mathfrak{k}} + \frac{\lambda}{V} g_{\mathfrak{k}}^* \beta \sum_{s=1}^{Z} \sum_{\mathfrak{k}'} e^{i(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}' \cdot \mathfrak{x}_s)} g_{\mathfrak{k}'} \psi_{k'} = 0$$

La somme

$$\sum_{s=1}^{Z} e^{i(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}' \cdot \mathfrak{x}_s)}$$

n'est différente de zéro que si $\mathfrak{k} - \mathfrak{k}'$ appartient au réseau réciproque. Soit $\mathfrak{b}_h$ $\left(\mathfrak{b}_{hi} = \frac{2\pi}{a} h_i\right)$ l'un de ces vecteurs, alors

$$\frac{1}{V} \sum_{s=1}^{Z} e^{i(\mathfrak{k}'-\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{x}_s)} = \begin{cases} a^{-3} \text{ si } \mathfrak{k}' - \mathfrak{k} = \mathfrak{b}_h \\ 0 \text{ dans les autres cas} \end{cases}$$

Chacune des mailles du réseau réciproque $\left(\text{volume}\left(\frac{2\pi}{a}\right)^3\right)$ contient $\left(\frac{L}{a}\right)^3 = Z$ points du réseau $\mathfrak{k}$. Le terme H' n'établit un couplage qu'entre les points équivalents de $\mathfrak{k}$. Par suite, le quotient du déterminant Δ par Δ_0 (cf. (2)) se réduit à un produit de Z fonctions du type

$$\Delta_{\mathfrak{k}}(\Omega^2) = \{(1+\lambda\mu F_{\mathfrak{k}}(\Omega^2))^2 - \lambda^2\Omega^2 F_{\mathfrak{k}}^2(\Omega^2) + \lambda^2 \mathfrak{G}_{\mathfrak{k}}^2(\Omega^2)\}^2 \quad (29)$$

où

$$F_{\mathfrak{k}}(\Omega^2) = \sum_{s=1}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)} \cdot \frac{1}{V}\sum_{\mathfrak{k}'} e^{i(\mathfrak{k}'\cdot\mathfrak{x}_s)} \frac{|g_{\mathfrak{k}'}|^2}{\omega_{\mathfrak{k}'}^2 - \Omega^2}$$

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{k}}(\Omega^2) = \sum_{s=1}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)} \frac{1}{V}\sum_{\mathfrak{k}'} \mathfrak{k}' e^{i(\mathfrak{k}'\cdot\mathfrak{x}_s)} \frac{|g_{\mathfrak{k}'}|^2}{\omega_{\mathfrak{k}'}^2 - \Omega^2}$$

Définissons les fonctions $\varphi_{Z\mathfrak{k}}$

$$\varphi_{Z\mathfrak{k}}^2(\zeta) = \Delta_{\mathfrak{k}}(\zeta) \quad (30)$$

$\varphi_Z(\zeta)$ (2), s'écrira

$$\varphi_Z(\zeta) = \prod_{[\mathfrak{k}]} \varphi_{Z\mathfrak{k}}(\zeta) \quad (31)$$

$[\mathfrak{k}]$ désignant l'ensemble des points de $\mathfrak{k}$ contenus dans une cellule du réseau réciproque. Dans $\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\zeta)$ introduisons de nouveau $\varkappa$ lié à ζ par la relation $\zeta = \mu^2 + \varkappa^2 = \mu^2 + \xi + i\eta$. Soit

$$\chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_{\pm} = \lim_{\eta=\pm 0} \frac{1}{V}\sum_{\mathfrak{k}'} e^{i(\mathfrak{k}'\cdot\mathfrak{x}_s)} \frac{|g_{\mathfrak{k}'}|^2}{\mathfrak{k}'^2 - \varkappa^2} \quad (32)$$

A la limite $V = \infty$, $\chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_{\pm}$ s'identifie avec $\chi(r_s, \varkappa)_{\pm}$ (9), $r_s = |\mathfrak{x}_s|$ remplaçant r dans (9). $F_{\mathfrak{k}}(\varkappa)$ et $\mathfrak{G}_{\mathfrak{k}}(\varkappa)$ s'écriront

$$F_{\mathfrak{k}}(\varkappa) = \sum_{s=1}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)} \cdot \chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_{\pm}$$

$$\mathfrak{G}_{\mathfrak{k}}(\varkappa) = \sum_{s=1}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)} \frac{1}{i} \operatorname{grad}_s \chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_{\pm}$$

Dans $\mathfrak{G}_{\mathfrak{k}}(\varkappa)$ le terme $s = 1$ disparaît quand le nucléon $s = 1$ est à l'origine ($\mathfrak{x}_1 = 0$), ce que nous supposerons dorénavant. Il vient pour $\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)_{\pm}$

$$\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)_{\pm} = 1 + 2\lambda\mu\left(\sum_{s=1}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)} \chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_{\pm}\right)$$

$$- \lambda^2\varkappa^2\left(\sum_{s=1}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)} \chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_{\pm}\right)^2 + \lambda^2\left(\sum_{s=2}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)} \frac{1}{i} \operatorname{grad}_s \chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_{\pm}\right)^2 \quad (33)$$

Séparons dans les sommes s le terme $s = 1$ qui fournit la fonction $\varphi_1(\varkappa)_\pm$

$$\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)_\pm = \varphi_1(\varkappa)_\pm + 2\lambda\mu\left(\sum_{s=2}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)}\chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_\pm\right)$$
$$- \lambda^2\varkappa^2\left\{\left(\sum_{s=1}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)}\chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_\pm\right)^2 - \frac{|g(\varkappa)|^4}{(4\pi)^2}(A \pm i\varkappa)^2\right\}$$
$$+ \lambda^2\left(\sum_{s=2}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)}\frac{1}{i}\operatorname{grad}_s\chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_\pm\right)^2 \tag{33a}$$

A la limite $a \to \infty$, Z constant, $V = Za^3 \to \infty$

$$\lim_{a=\infty}\chi(r_s, \varkappa)_\pm = 0 \qquad \text{si } s \neq 1 \qquad (r_s \neq 0)$$

Dans cette limite $\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)_\pm = \varphi_1(\varkappa)_\pm$ et il reste pour l'énergie

$$E_Z(\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^{A'}\frac{\varkappa\, d\varkappa}{\sqrt{\mu^2+\varkappa^2}}\, 2\sum_{[\mathfrak{k}]}\log\left(\frac{\varphi_1(\varkappa)_+}{\varphi_1(\varkappa)_-}\right) = ZE_1 \tag{34}$$

L'énergie du volume V est constituée par la somme des énergies propres des Z nucléons. L'énergie potentielle de V sera par définition

$$U_Z(a) = E_Z(a) - ZE_1 \tag{35}$$

Pour calculer $U_Z(a)$, définissons

$$U_{Z\mathfrak{k}}(a) = -\frac{1}{\pi i}\int_0^{\infty}\frac{\varkappa\, d\varkappa}{\sqrt{\mu^2+\varkappa^2}}\left\{\log\left(\frac{\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)_+}{\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)_-}\right) - \log\left(\frac{\varphi_1(\varkappa)_+}{\varphi_1(\varkappa)_-}\right)\right\} \tag{36}$$

$$U_Z(a) = \sum_{[\mathfrak{k}]} U_{Z\mathfrak{k}} \tag{37}$$

Couplage très fort ($\lambda \to \infty$).

Conservons dans (33) les termes en λ^2 seulement

$$\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)_\pm = -\lambda^2\varkappa^2\left(\sum_{s=1}^{Z} e^{i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)}\chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_\pm\right)^2$$
$$+ \lambda^2\left(\sum_{s=2}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)}\cdot\frac{1}{i}\operatorname{grad}_s\chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_\pm\right)^2 \tag{38}$$

On reconnaît facilement qu'il existe pour chaque $\varphi_{Z\mathfrak{k}}$ une valeur $\varkappa_{\mathfrak{k}}$ telle que la partie réelle de $\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)_\pm$ soit nulle

$$R\,\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa_{\mathfrak{k}})_\pm = 0 \tag{39}$$

Nous calculerons $\varkappa_{\mathfrak{k}}$ plus loin et montrerons que l'on a pour a

suffisamment grand $|\varkappa_{\mathfrak{k}} r_s| \ll 1$ (pour tout s). On vérifiera aisément d'après ce qui suit que la partie imaginaire de $\varphi_{Z\mathfrak{k}}$ en $\varkappa_{\mathfrak{k}}$ vaut

$$\operatorname{Imag} \varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa_{\mathfrak{k}})_{\pm} \mathrel{\underline{\mathcal{S}}} \mp \lambda^2 \varkappa_{\mathfrak{k}}^2 \frac{1}{(4\pi)^2} 2 A \varkappa_{\mathfrak{k}} \tag{40}$$

autrement dit, comme pour $\overline{\varphi_2(\varkappa)_{\pm}}$ on aura à distinguer deux intervalles d'intégration

$$\begin{aligned} \varkappa < \varkappa_{\mathfrak{k}} \quad & \arg \varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)_- \mathrel{\underline{\mathcal{S}}} \arg \varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)_+ \mathrel{\underline{\mathcal{S}}} 0 \\ \varkappa > \varkappa_{\mathfrak{k}} \quad & \arg \varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)_- \mathrel{\underline{\mathcal{S}}} \arg \varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)_+ + 2\pi \end{aligned} \tag{41}$$

Pour le calcul de $U_{Z\mathfrak{k}}$ la situation est la même que celle qui s'était présentée pour celui de $V(r)$, (17), (19) et fig. 1. Nous divisons l'intervalle d'intégration en deux parties, désignant par $U_{Z\mathfrak{k}}^{(1)}$ et $U_{Z\mathfrak{k}}^{(2)}$ les parties de $U_{Z\mathfrak{k}}$ qui en proviennent. Soit d'abord $U_{Z\mathfrak{k}}^{(1)}$ défini par

$$U_{Z\mathfrak{k}}^{(1)} = -\frac{1}{\pi i} \int_0^{\varkappa_{\mathfrak{k}}} \frac{\varkappa\, d\varkappa}{\sqrt{\mu^2 + \varkappa^2}} \left\{ \log\left(\frac{\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)_+}{\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)_-}\right) - \log\left(\frac{\varphi_1(\varkappa)_+}{\varphi_1(\varkappa)_-}\right) \right\} \tag{42}$$

d'après (41) et (19) on a

$$\log\left(\frac{\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)_+}{\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)_-}\right) \mathrel{\underline{\mathcal{S}}} 0 \qquad \log\left(\frac{\varphi_1(\varkappa)_+}{\varphi_1(\varkappa)_-}\right) \mathrel{\underline{\mathcal{S}}} -2\pi i \quad \text{pour } \varkappa < \varkappa_{\mathfrak{k}}$$

ce qui donne

$$U_{Z\mathfrak{k}}^{(1)} = -2\left(\sqrt{\mu^2 + \varkappa_{\mathfrak{k}}^2} - \mu\right) \tag{43}$$

Soit d'autre part

$$U_{Z\mathfrak{k}}^{(2)} = U_{Z\mathfrak{k}} - U_{Z\mathfrak{k}}^{(1)}$$

$$U_{Z\mathfrak{k}}^{(2)} = -\frac{1}{\pi i} \int_{\varkappa_{\mathfrak{k}}}^{\infty} \frac{\varkappa\, d\varkappa}{\sqrt{\mu^2 + \varkappa^2}} \left\{ \log\left(\frac{\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)_+}{\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)_-}\right) - \log\left(\frac{\varphi_1(\varkappa)_+}{\varphi_1(\varkappa)_-}\right) \right\} \tag{44}$$

Lorsque $\varkappa > \varkappa_{\mathfrak{k}}$, les arguments de $\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)_{\pm}$ et $\varphi_1(\varkappa)_{\pm}$ diffèrent peu. On a

$$\left(\frac{\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)}{\varphi_1(\varkappa)}\right)_{\pm} = 1 + \frac{2\left(\sum_{s=2}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)} \chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_{\pm}\right)}{\frac{1}{4\pi} |g(\varkappa)|^2 (A \pm i\varkappa)}$$

$$+ \frac{\left(\sum_{s=2}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)} \chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_{\pm}\right)^2}{\left(\frac{1}{4\pi} \cdot |g(\varkappa)|^2 (A \pm i\varkappa)\right)^2} - \frac{\left(\sum_{s=2}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)} \frac{1}{i} \operatorname{grad}_s \chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_{\pm}\right)^2}{\varkappa^2 \left(\frac{1}{4\pi} |g(\varkappa)|^2 \cdot (A \pm i\varkappa)\right)^2} \tag{45}$$

Développons

$$\log\left(\frac{\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)}{\varphi_1(\varkappa)}\right)_{\pm}$$

suivant

$$\frac{\chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_{\pm}}{\frac{1}{4\pi}\,|\,g(\varkappa)\,|^2(A \pm i\varkappa)},$$

négligeons les termes d'ordre $\geqslant 3$ et définissons

$$U_Z^{(2)} = \sum_{\mathfrak{k}} U_{Z\mathfrak{k}}^{(2)} \tag{46}$$

$$\begin{aligned}
U_Z^{(2)} = -\frac{1}{\pi i}\sum_{[\mathfrak{k}]}\int_{\varkappa_{\mathfrak{k}}}^{\infty}\frac{\varkappa\,d\varkappa}{\sqrt{\mu^2+\varkappa^2}}\Bigg\{ & 2\,\frac{\left(\sum_{s=2}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)}\,\chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_+\right)}{\frac{1}{4\pi}\,|\,g(\varkappa)\,|^2(A+i\varkappa)} \\
& -2\,\frac{\left(\sum_{s=2}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)}\,\chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_-\right)}{\frac{1}{4\pi}\,|\,g(\varkappa)\,|^2(A-i\varkappa)} \\
& -\left(\frac{\sum_{s=2}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)}\,\chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_+}{\frac{1}{4\pi}\,|\,g(\varkappa)\,|^2(A+i\varkappa)}\right)^2 + \left(\frac{\sum_{s=2}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)}\,\chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_-}{\frac{1}{4\pi}\,|\,g(\varkappa)\,|^2(A-i\varkappa)}\right)^2 \\
& -\left(\frac{\sum_{s=2}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)}\,\frac{1}{i}\,\mathrm{grad}_s\,\chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_+}{\frac{\varkappa}{4\pi}\cdot|\,g(\varkappa)\,|^2(A+i\varkappa)}\right)^2 \\
& +\left(\frac{\sum_{s=2}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)}\,\frac{1}{i}\,\mathrm{grad}_s\,\chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_-}{\frac{\varkappa}{4\pi}\,|\,g(\varkappa)\,|^2(A-i\varkappa)}\right)^2\Bigg\}
\end{aligned}$$

Une évaluation de l'erreur commise montre que l'on peut remplacer $\varkappa_{\mathfrak{k}}$ par 0 dans chacune des intégrales ci-dessus. (L'hypothèse $|\,\varkappa_{\mathfrak{k}} r_s\,| \ll 1$ est alors utilisée.) Remarquons de plus que

$$\sum_{[\mathfrak{k}]} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)} = 0 \quad \text{si} \quad \mathfrak{x}_s \neq 0 \tag{47}$$

$$\sum_{[\mathfrak{k}]} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s+\mathfrak{x}_{s'})} = \begin{cases} Z & \text{si} \quad \mathfrak{x}_s + \mathfrak{x}_{s'} = 0 \quad \mathrm{mod}\ L\ ^{1)} \\ 0 & \text{dans les autres cas} \end{cases}$$

[1]) $\mathfrak{x}_s = 0$ mod. L signifie que les composantes de $\mathfrak{x}_s$ sont des multiples entiers de $L = V^{1/3}$.

Il vient pour $U_Z^{(2)}$

$$U_Z^{(2)} = \frac{Z}{2\pi i} \sum_{s>1} \int_0^\infty \frac{\varkappa d\varkappa}{\sqrt{\mu^2+\varkappa^2}} \left\{ \frac{\chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_+ \cdot \chi(-\mathfrak{x}_s, \varkappa)_+}{\left(\frac{1}{4\pi} |g(\varkappa)|^2 (A+i\varkappa)\right)^2} \right.$$

$$- \frac{\chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_- \cdot \chi(-\mathfrak{x}_s \varkappa)_-}{\left(\frac{1}{4\pi} |g(\varkappa)|^2 (A-i\varkappa)\right)^2} - \frac{(\mathrm{grad}_s \chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_+ \cdot \mathrm{grad}_s \chi(-\mathfrak{x}_s, \varkappa)_+)}{\left(\frac{\varkappa}{4\pi} |g(\varkappa)|^2 (A+i\varkappa)\right)^2}$$

$$\left. + \frac{(\mathrm{grad}_s \chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_- \cdot \mathrm{grad}_s \chi(-\mathfrak{x}_s, \varkappa)_-)}{\left(\frac{\varkappa}{4\pi} |g(\varkappa)|^2 (A-i\varkappa)\right)^2} \right\} \tag{48}$$

Calculons (47) en prenant pour valeur approximative de $\chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)$ celle obtenue en supposant $Z = \infty$, c'est-à-dire $\chi(r_s, \varkappa)_\pm$ (cf. (9), $|\mathfrak{x}_s| = r_s \gg 1/A$). De plus, posons au dénominateur $(A \pm i\varkappa) \cong A$. Il vient

$$U_Z^{(2)}(a) = \frac{Z}{2} \sum_{s>1} \frac{8}{\pi A^2 r_s^3} \int_0^\infty \frac{d\varkappa}{\sqrt{\mu^2+\varkappa^2}} \left(\frac{\sin 2\varkappa r_s}{2\varkappa r_s} - \cos 2\varkappa r_s \right) \tag{49}$$

La comparaison avec (23) montre que l'on a

$$U_Z^{(2)}(a) = \frac{Z}{2} \sum_{s>1} V_2(r_s) \tag{50}$$

Nous définirons

$$U_Z^{(1)}(a) = \sum_{[\mathfrak{k}]} U_{Z\mathfrak{k}}^{(1)}(a) = -2 \sum_{[\mathfrak{k}]} (\sqrt{\mu^2+\varkappa_{\mathfrak{k}}^2} - \mu) \tag{51}$$

ce qui donnera

$$U_Z(a) = U_Z^{(1)}(a) + U_Z^{(2)}(a) = -2 \sum_{[\mathfrak{k}]} (\sqrt{\mu^2+\varkappa_{\mathfrak{k}}^2} - \mu) + \frac{Z}{2} \sum_{s>1} V_2(r_s) \tag{52}$$

Pour discuter $U_Z(a)$ il nous faut calculer les $\varkappa_{\mathfrak{k}}$ définis par (39). Nous les déterminons approximativement en reprenant (38) où nous remplaçons de nouveau $\chi(\mathfrak{x}_s, \varkappa)_\pm$ par $\chi(r_s, \varkappa)_\pm$ (9)[1].

$$\varkappa_{\mathfrak{k}}^2 R \left(\sum_{s=1}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)} \cdot \chi(r_s, \varkappa_{\mathfrak{k}})_\pm \right)^2$$

$$= R \left(\sum_{s=2}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)} \cdot \frac{1}{i} \mathrm{grad}_s \chi(r_s, \varkappa_{\mathfrak{k}})_\pm \right)^2 \tag{53}$$

---

[1]) Cette substitution n'est strictement permise qu'à la limite $V = \infty$, $Z = \infty$. Cependant elle fournit une bonne approximation pour Z fini lorsque les points $\mathfrak{x}_s$ ne se trouvent pas dans le voisinage des surfaces du cube V centré à l'origine. La contribution de ces points n'est d'ailleurs pas notable puisque la somme du membre de droite converge rapidement et que la somme $\sum_{s=2}^{Z} \frac{e^{-i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)}}{r_s}$ se révélera négligeable devant A.

Retournons à (9). Nous avons supposé $|\varkappa_{\mathfrak{k}} r_s| \ll 1$ et $A r_s \gg 1$, ce qui entraîne $e^{\pm i \varkappa_{\mathfrak{k}} r_s} \mathrel{\underline{\backsim}} 1$, $e^{-A r_s} \mathrel{\underline{\backsim}} 0$ et $|g(\varkappa_{\mathfrak{k}})| \mathrel{\underline{\backsim}} 1$. Il reste pour $s > 1$

$$\chi(r_s, \varkappa_{\mathfrak{k}}) \mathrel{\underline{\backsim}} \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{1}{r_s}$$

$$\operatorname{grad} \chi(r_s, \varkappa_{\mathfrak{k}}) \mathrel{\underline{\backsim}} -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\mathfrak{e}_s}{r_s^2} \quad \left(\mathfrak{e}_s = \frac{\mathfrak{x}_s}{r_s}\right)$$

Séparons encore le terme $s = 1$ et négligeons $\varkappa_{\mathfrak{k}}$ devant A, on obtient

$$\varkappa_{\mathfrak{k}}^2 \left(A + \sum_{s=2}^{Z} \frac{e^{-i(\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{x}_s)}}{r_s}\right)^2 = -\left(\sum_{s=2}^{Z} e^{-i(\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{x}_s)} \cdot \frac{\mathfrak{e}_s}{r_s^2}\right)^2 \equiv -(\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}})^2 \tag{54}$$

Pour $\mathfrak{k} = 0$ on a $\varkappa_{\mathfrak{k}} = 0$. Il reste à considérér les vecteurs $\mathfrak{k} \neq 0$, c'est-à-dire $|\mathfrak{k}| \gtrsim \frac{1}{L} = \frac{1}{a Z^{1/3}}$. Dans ce but soit

$$S = \sum_{s>1} \frac{e^{i(\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{x}_s)}}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_s|} \tag{55}$$

Pour $\mathfrak{x} = 0$ on retrouve la somme qui figure à côté de A, comme coefficient de $\varkappa_{\mathfrak{k}}^2$ dans (54) tandis que

$$(\operatorname{grad}_{\mathfrak{x}} S)_{\mathfrak{x}=0} = \sum_{s>1} \frac{e^{i(\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{x}_s)}}{|\mathfrak{x} - \mathfrak{x}_s|^3} (\mathfrak{x}_s - \mathfrak{x})$$

$$= \sum_{s>1} \frac{e^{i(\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{x}_s)}}{r_s^2} \mathfrak{e}_s = \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} \tag{56}$$

Suivant une méthode tirée de l'optique cristalline d'Ewald, nous diviserons S en deux parties

$$S = S_{\mathrm{I}} + S_{\mathrm{II}}$$

A la limite $Z = \infty$ on trouve (cf. p. ex. Born: Dynamik der Kristallgitter, formules 493 et suivantes)

$$S_{\mathrm{I}} = \frac{4\pi}{a^3} \sum_h \frac{e^{-\frac{\mathfrak{k}_h^2}{4E^2} + i(\mathfrak{k}_h \cdot \mathfrak{x})}}{|\mathfrak{k}_h|^2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^E e^{-\mathfrak{x}^2 \cdot \varepsilon^2} d\varepsilon \tag{55a}$$

$$S_{\mathrm{II}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_s{}' e^{i(\mathfrak{k} \cdot \mathfrak{x}_s)} \int_{\mathrm{E}}^{\infty} e^{-(\mathfrak{x}_s - \mathfrak{x})^2 \cdot \varepsilon^2} d\varepsilon$$

$\mathfrak{k}_h$ désignant un vecteur du type

$$\mathfrak{k}_h = \mathfrak{b}_h + \mathfrak{k}$$

E est un paramètre de séparation choisi convenablement. Lorsque $|\mathfrak{k}| \gtrsim \frac{1}{a Z^{1/3}}$, $S_{\mathfrak{x}=0}$ est de l'ordre de grandeur de $1/a$, ce qu'on voit facilement en choisissant $E = \frac{\gamma \pi}{2a}$ $(\gamma \sim 1)$ de façon que le terme $h = 0$, $\mathfrak{k}_h = \mathfrak{k}$ soit le terme principal. A cause de $Aa \gg 1$, nous négligeons $S_{\mathfrak{x}=0}$ devant A dans (54), ce qui donne

$$\varkappa_{\mathfrak{k}}^2 \cong -\frac{1}{A^2}\,\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}^2 \qquad \text{pour } |\mathfrak{k}| \gtrsim \frac{1}{aZ^{1/3}} \tag{57}$$

On trouve d'abord en utilisant (47) et (56)

$$\sum_{[\mathfrak{k}]} \varkappa_{\mathfrak{k}}^2 = -\frac{1}{A^2}\sum_{[\mathfrak{k}]} \mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}^2 = \frac{Z}{A^2}\cdot\sum_{s>1}\frac{1}{r_s^4} \tag{58}$$

qui, évalué au moyen d'une intégrale, donne

$$\sum_{\mathfrak{k}} \varkappa_{\mathfrak{k}}^2 = \frac{Z}{A^2 a^4}\cdot 4\pi\gamma' \;(\gamma' \sim 1) \tag{58a}$$

Nous calculons $\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$ au moyen de (55a)

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} = (\mathrm{grad}_{\mathfrak{x}}\, S)_{\mathfrak{x}=0} = \frac{4\pi}{a^3}\sum_h i\mathfrak{k}_h \frac{e^{-\frac{\mathfrak{k}_h^2}{4E^2}}}{|\mathfrak{k}_h|^2} + \frac{4}{\sqrt{\pi}}\sum_s{}' \mathfrak{x}_s e^{i(\mathfrak{k}\cdot\mathfrak{x}_s)}\int_E^\infty e^{-\mathfrak{x}_s^2\varepsilon^2}\,d\varepsilon$$

Le choix $E = \frac{\gamma\pi}{2a}$ nous permet d'évaluer $\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}}$ et $\varkappa_{\mathfrak{k}}$ (57) à l'aide du premier terme de la somme h.

$$\mathfrak{a}_{\mathfrak{k}} \cong \frac{4\pi}{a^3}\, i\mathfrak{k}\,\frac{e^{-\frac{|\mathfrak{k}|^2}{4E^2}}}{|\mathfrak{k}|^2}$$

$$|\varkappa_{\mathfrak{k}}| = \frac{4\pi}{a^3 A}\,\frac{e^{-\frac{\mathfrak{k}^2}{4E^2}}}{|\mathfrak{k}|} \quad \text{pour } |\mathfrak{k}| \gtrsim \frac{1}{aZ^{1/3}} \tag{59}$$

Remarquons que la valeur moyenne de $\varkappa_{\mathfrak{k}}^2$ prise sur les Z points de la cellule $|\mathfrak{k}|$ est d'après (58a)

$$\overline{\varkappa_{\mathfrak{k}}^2} = \frac{1}{A^2 a^4}\cdot 4\pi\gamma' \tag{60}$$

L'hypothèse $|\varkappa_{\mathfrak{k}} r_s| \ll 1$ faite ci-dessus implique donc la condition

$$\overline{\varkappa_{\mathfrak{k}}^2}\,(aZ^{1/3})^2 \ll 1 \tag{61}$$

ou encore

$$a \gg \frac{Z^{1/3}}{A}$$

Nous chercherons à retrouver dans $U_Z(a)$ des intervalles correspondant aux intervalles I et II de $V(r)$.

Intervalle I: Soit $\overline{\varkappa_{\mathfrak{k}}^2} \gg \mu^2$, c'est-à-dire d'après (60) et (61)

$$\frac{Z^{1/3}}{A} \ll a \ll \frac{1}{\sqrt{\mu A}} \tag{62}$$

ce qui implique $A/\mu \gg Z^{2/3}$, condition réalisable dans la théorie des paires d'électrons où $\mu \cong 0$. D'après (51)

$$U_Z^{(1)}(a) = -2 \sum_{[\mathfrak{k}]} |\varkappa_{\mathfrak{k}}|$$

que nous évaluons au moyen d'une intégrale en utilisant (59)

$$U_Z^{(1)}(a) = -2 \frac{1}{A a^3} \int_0^B \frac{1}{|\mathfrak{k}|} e^{-\frac{|\mathfrak{k}|^2}{4E^2}} \cdot \frac{4\pi |\mathfrak{k}|^2 d|\mathfrak{k}|}{\frac{1}{(Z a^3)}}$$

$$= -\frac{8\pi Z}{A} \int_0^B |\mathfrak{k}| e^{-\frac{|\mathfrak{k}|^2}{4E^2}} d|\mathfrak{k}|$$

nous déterminons B par la condition

$$\frac{4\pi}{3} B^3 = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^3,$$

ce qui donne

$$U_Z^{(1)}(a) = -\frac{16\pi Z}{A} \left(-\frac{e^{-\frac{|\mathfrak{k}|^2}{4E^2}}}{E^2} \Bigg|_0^B \right) \cong -\frac{16\pi Z}{A \cdot E^2}$$

$$= -\frac{16\pi}{A a^2} \cdot \left(\frac{2}{\gamma\pi}\right)^2 \cdot Z$$

le second terme de $U_Z(a)$ est

$$U_Z^{(2)}(a) = \frac{Z}{2} \sum_{s>1} V(r_s).$$

$V(r_s)$ a pour valeur maximale

$$\frac{8}{\pi A^2 r_s^3}$$

(cf. remarque de la page 9). On en conclut à l'aide de $A a \gg Z^{1/3}$ (61) que $U_Z^{(2)}(a)$ est négligeable devant $U_Z^{(1)}(a)$ pour l'intervalle considéré. Il restera

$$U_Z(a) \cong U_Z^{(1)}(a) \cong -16\pi \left(\frac{2}{\gamma\pi}\right)^2 \cdot \frac{Z}{a^2 A} \tag{63}$$

L'énergie potentielle du volume V est négative et proportionnelle au nombre Z des nucléons. *Les forces sont attractives et saturées.* Le facteur de proportionnalité a^{-2} correspond bien à la dépendance en r du potentiel $V(r)$ de l'intervalle I (25). Remarquons que cet intervalle n'a aucun équivalent dans la théorie des paires de spin 0.

Intervalle II: Supposons $\overline{\varkappa_{\mathfrak{k}}^2} \ll \mu^2$, c'est-à-dire

$$a \ll \frac{1}{\sqrt{A\mu}} \qquad U_Z(a) \cong -2 \sum_{[\mathfrak{k}]} \frac{\varkappa_{\mathfrak{k}}^2}{2\mu} + \frac{Z}{2} \cdot \sum_{s>1} V_2(r_s) \tag{64}$$

et d'après (58), (23a) et (26)

$$U_Z(a) \cong -\frac{Z}{2} \sum_{s=2}^{Z} \frac{4}{A^2 r_s^3} \left\{ i H_0^{(1)}(2 i \mu r_s) + \frac{1}{2\mu r_s} \int_{2\mu r_s}^{\infty} d\varrho\, i H_0^{(1)}(i\varrho) \right\} \tag{65}$$

$$U_Z(a) = \frac{Z}{2} \sum_{s>1} V(r_s) \tag{65a}$$

L'énergie est égale à la somme des énergies potentielles de toutes les paires de nucléons, résultat identique à celui que l'on obtient dans la théorie des paires de spin 0 pour l'intervalle correspondant (II). La formule (65) n'est d'ailleurs qu'une formule approchée puisque dans le développement de

$$\log \frac{\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa)}{\varphi_1(\varkappa)}$$

(45) qui sert au calcul de (46), nous avons négligé les termes d'ordre $\geqslant 3$. Si l'on tient compte de ces termes, on obtient, comme dans la théorie scalaire, des forces multicorps (« Mehrkörperkräfte ») que nous avons négligées.

Nous calculons encore $U_Z(a)$ lorsque $a \to 0$. Dans ce but nous choisirons pour fonction $g_{\mathfrak{k}}$

$$|g_{\mathfrak{k}}| = \begin{cases} 1 \text{ si } |\mathfrak{k}| < B \\ 0 \text{ si } |\mathfrak{k}| > B \end{cases} \tag{66}$$

B étant introduit dans la théorie au même titre que A, $\frac{1}{B}$ sera interprété comme rayon du nucléon. Le choix de cette nouvelle fonction n'apporte pas de changement notable lorsque $a < \frac{\pi}{B}$ (cf. II). On calculera $E_Z(a)$ au moyen de (3) et de (31)

$$E_Z(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}} \sum_{[\mathfrak{k}]} \log \varphi_{Z\mathfrak{k}}(\zeta) \tag{67}$$

Si l'on utilise (28) dans le calcul des sommes sur s de (33), il vient (cf. 32)

$$\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\varkappa) = 1 + \frac{2\lambda\mu}{a^3}\sum_h \frac{|g_{\mathfrak{k}+\mathfrak{b}_h}|^2}{|\mathfrak{k}+\mathfrak{b}_h|^2 - \varkappa^2} - \frac{\lambda^2\varkappa^2}{a^6}\left(\sum_h \frac{|g_{\mathfrak{k}+\mathfrak{b}_h}|^2}{|\mathfrak{k}+\mathfrak{b}_h|^2 - \varkappa^2}\right)^2 + \frac{\lambda^2}{a^6}\left(\sum_h \frac{(\mathfrak{k}+\mathfrak{b}_h)\cdot|g_{\mathfrak{k}+\mathfrak{b}_h}|^2}{|\mathfrak{k}+\mathfrak{b}_h|^2 - \varkappa^2}\right)^2 \tag{68}$$

Choisissons pour cellule $[\mathfrak{k}]$ celle qui a pour centre l'origine

$$-\frac{\pi}{a} \leqslant \mathfrak{k}_i \leqslant \frac{\pi}{a}$$

Si l'on a $a \lesssim \pi/B$ alors d'après (66) $g_{\mathfrak{k}+\mathfrak{b}_h} = 0$ pour tout $\mathfrak{b}_h \neq 0$. Les sommes h qui figurent dans (68) se réduisent aux termes $h = 0$. Avec $\mu^2 + \varkappa^2 = \Omega^2$ il vient

$$\varphi_{Z\mathfrak{k}}(\Omega^2) = \begin{cases} 1 + \left(\dfrac{2\lambda\mu}{a^3} + \dfrac{\lambda^2}{a^6}\right)\left\{\dfrac{1}{\omega_{\mathfrak{k}}^2 - \Omega^2}\right\} \text{ pour } |\mathfrak{k}| < B \\ 1 \text{ dans les autres cas.} \end{cases} \tag{69}$$

Cette fonction de $\zeta = \Omega^2$ n'a qu'une racine pour $|\mathfrak{k}| < B$

$$\Omega_{\mathfrak{k}}^2 = \omega_{\mathfrak{k}}^2 + \frac{2\lambda\mu}{a^3} + \frac{\lambda^2}{a^6}$$

et (67) donnera

$$E_Z(a) = -2\sum_{\substack{\mathfrak{k} \\ |\mathfrak{k}|<B}} (\Omega_{\mathfrak{k}} - \omega_{\mathfrak{k}})\,;\ \Omega_{\mathfrak{k}},\ \omega_{\mathfrak{k}} > 0$$

ou encore

$$E_Z(a) = -\frac{Z a^3}{\pi^2}\int_0^B dk\cdot k^2\left(\sqrt{\omega_{\mathfrak{k}}^2 + \frac{2\lambda\mu}{a^3} + \frac{\lambda^2}{a^6}} - \omega_{\mathfrak{k}}\right) \tag{70}$$

Supposons que

$$\omega_B^2 = \mu^2 + B^2 \ll \frac{2\lambda\mu}{a^3} + \frac{\lambda^2}{a^6} \tag{71}$$

ce qui est toujours réalisable pour a suffisamment petit et $\mu \lesssim B$. Nous calculerons avec $\mu = 0$ et observerons que la condition (71) peut être remplacée par

$$a \ll \left(\frac{\lambda}{B}\right)^{1/3} \tag{71a}$$

Lorsque le couplage est fort $\lambda B^2 \gg 1$, la condition $a \lesssim \pi/B$ que nous

avions admise, suffit pour garantir (71a). Il vient en ne conservant que les termes en λ et en λ^0

$$E_Z(a) \cong -\frac{Za^3}{\pi^2}\int_0^B dk\, k^2\left(\frac{\lambda}{a^3}-k\right)$$

$$E_Z(a) \cong -\frac{Z\lambda B^3}{3\pi^2}+\frac{Za^3\cdot B^4}{4\pi^2} \tag{72}$$

L'énergie potentielle de V est égale à

$$U_Z(a) = E_Z(a) - ZE_1$$

Les formules qui donnent E_1 avec la fonction particulière (66) se trouvent déjà dans le travail de Jauch (I)[1]. On trouve pour E_1

$$E_1 = -\frac{\lambda B^3}{3\pi^2} + B\left(\frac{2}{3\pi}\log(\lambda B^2)+\gamma\right) \qquad \gamma \cong 0{,}8 \tag{73}$$

L'énergie potentielle de V sera

$$U_Z(a) = -Z\left\{B\left[\frac{2}{3\pi}\log(\lambda B^2)+\gamma\right]-\frac{a^3B^4}{4\pi^2}\right\}$$

Ce résultat, lorsque $a = 0$ coïncide avec celui de Wigner, Critchfield et Teller[2]. L'énergie de liaison d'un nucléon

$$-\frac{U_Z(a)}{Z} = B\left\{\frac{2}{3\pi}\log(\lambda B^2)+\gamma\right\}-\frac{B^4a^3}{4\pi^2} \tag{74}$$

est positive et de l'ordre de grandeur de B. *Les forces décrites sont saturées et attractives.* La formule (74) est d'ailleurs valable pour $a < B^{-1} \cong$ rayon du nucléon. Une comparaison entre (74) et (63)

---

[1]) E_1 se compose de deux parties E_1' et E_1''

$$E_1 = E_1' + E_1''$$

E_1' provient du déplacement des niveaux compris entre 0 et $-B$. On évalue facilement E_1' à l'aide de (5) où l'on remplace $\varphi_Z(\varkappa)$ par $\varphi_1(\varkappa)$ (8); (cf. aussi (I) formule (4.4)). On trouve

$$E_1' = B\left\{\frac{2}{3\pi}\log(\lambda B^2)+\gamma\right\} \qquad \gamma \cong 0{,}8\ldots$$

tandis que E_1'' calculé dans (I) § 7, et qui provient du déplacement de deux niveaux inférieurs $-B$ qui se détachent du spectre continu vaut (η est à remplacer par $\lambda/4\pi^3$)

$$E_1'' = -\frac{\lambda B^3}{3\pi^2}$$

[2]) Phys. Rev. **56**, p. 530 et suiv.

montre que dans cette région les forces sont beaucoup plus grandes que celles de l'intervalle I (62)

$$a \gg \frac{Z^{1/3}}{A} .$$

Par conséquent, si l'on veut identifier les forces nucléaires observées avec celles que nous avons calculées, *la longueur* B^{-1} ou A^{-1} *doit être choisie de l'ordre de grandeur de leur portée, c'est-à-dire* $\sim 10^{-13}$ *cm.* La théorie se révèle donc ici identique à la théorie scalaire (cf. II). En particulier, dans chacune de ces théories, la masse μ de la particule du champ ne joue aucun rôle pour autant que μ soit $\lesssim A$. A cet égard la théorie des paires d'électrons est tout aussi légitime que celle des paires de mésons. Par contre, la discussion de *la diffusion* des particules du champ par les nucléons exclut une théorie des paires de mésons, comme NELSON et OPPENHEIMER[1]) l'ont indiqué. En effet, la section de diffusion calculée d'après WEINBERG[2]) est de l'ordre de grandeur de $1/A^2$, ce qui donne $\sim 10^{-26}$ cm^2 d'après ce qui précède. Les particules du champ ne peuvent donc pas être identifiées avec les mésotons des rayons cosmiques, dont la section de diffusion est, comme on le sait, cent fois plus petite. En ce qui concerne la théorie des paires *d'électrons,* les expériences sur les anomalies de diffusion ne paraissent pas encore suffisamment concluantes pour permettre une comparaison avec la théorie.

En terminant ce travail, je me fais un plaisir de remercier Monsieur le Professeur WENTZEL qui m'en a proposé le sujet et qui m'a constamment guidé de ses conseils.

Institut de Physique de l'Ecole Polytechnique Fédérale, Zurich.

---

[1]) Bulletin of the Amer. Phys. Soc. Dec. 1941, Vol. 16, N° 6.
[2]) Phys. Rev. **59**, p. 776 (1941).