Über reversible Kreisprozesse mit maximalem thermischem Wirkungsgrad

von **H. Greinacher.**

(7. II. 1944.)

Von allen Kreisprozessen, bei denen nur 2 Wärmespeicher Verwendung finden, besitzt der Carnot'sche, der sich aus 2 isothermen und 2 adiabatischen Vorgängen zusammensetzt, den höchsten thermischen Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2} \qquad (1)$$

Lässt man aber beliebig viele Wärmereservoire zu, so lassen sich unendlich viele Prozesse angeben, welche diesen Wirkungsgrad

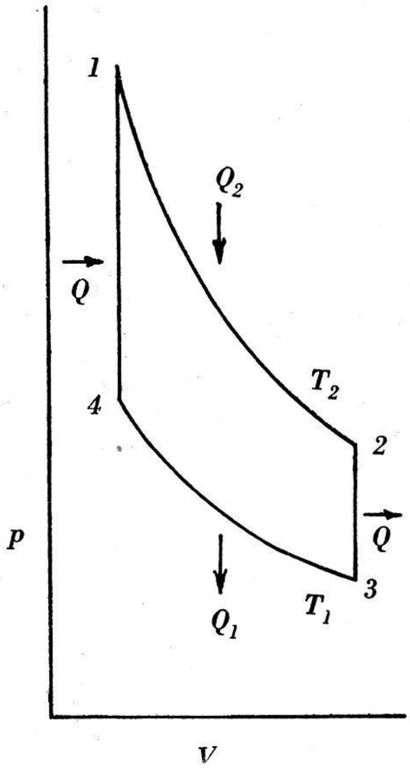

Fig. 1.

liefern. Ein solcher ist der Clapeyron'sche mit 2 Isothermen und 2 Isochoren (Fig. 1). Hier sind die beiden Wärmemengen, die auf dem Wege $2 \rightarrow 3$ abzuführen und auf $4 \rightarrow 1$ wieder zuzuführen sind, gleich gross. Die auf $2 \rightarrow 3$ abgeführte Wärme kann also gerade zur Erwärmung auf $4 \to 1$ benützt werden. Man hat nur, um jede Temperaturdifferenz zu vermeiden, unendlich viele zwischen T_2 und T_1 temperierte Wärmespeicher bereitzustellen, die man einmal auf der Strecke $2 \to 3$, dann auf der Strecke $4 \to 1$ einsetzt. Die insgesamt verbrauchte Wärmemenge ist daher Q_2, und der Nutzeffekt ergibt sich zu

$$\eta = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2}, \tag{2}$$

was dann zu der Beziehung (1) führt. Lässt man die Möglichkeit der Wiederverwendung von abgeführter Wärme (hier von Q) nicht zu, so würde als Nutzeffekt zu bezeichnen sein

$$\eta' = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2 + Q}, \tag{3}$$

so dass also $\eta > \eta'$. Dieser Ausdruck entspricht aber keinesfalls dem Nutzeffekt, den man bei bester Ausnützung der zugeführten Wärme erhält, sondern lediglich einer engeren Fassung des Begriffes Wirkungsgrad. Beschränkt man sich auf diese, dann ist der Carnot'sche Prozess allerdings der einzige, der den *maximalen* Wert (1) liefert. Praktisch interessiert aber der Nutzeffekt, den man bei einem reversiblen Prozess unter bestmöglicher Ausnützung der Wärme zur Arbeitsleistung erhält. Im folgenden soll auch der Begriff „Nutzeffekt" entsprechend dieser allgemeineren Fassung verwendet werden.

Die Frage nach den reversiblen Kreisprozessen mit maximalem Wirkungsgrad ist also in diesem Sinne aufzufassen. Ausser dem Clapeyron'schen gibt es, wie man leicht feststellt, einen zweiten von gleicher Einfachheit, nämlich den mit 2 Isothermen und 2 Isobaren. Beide Kreisprozesse haben das Gemeinsame, dass auf den Strecken $2 \to 3$ und $4 \to 1$ die spezifische Wärme einen konstanten Wert aufweist, im einen Falle c_v, im andern c_p. Auch dem Carnot-schen Prozess kommt diese Eigenschaft zu. Nur hat die spezifische Wärme in diesem Falle den speziellen Wert o (Adiabate). Die spezifische Wärme eines Gases kann nun aber alle Werte zwischen $-\infty$ und $+\infty$ annehmen. Es lassen sich daher unendlich viele Kreisprozesse durchführen, bei denen die Bedingung erfüllt ist, dass auf den Strecken $2 \to 3$ und $4 \to 1$ die spezifische Wärme einen konstanten Wert besitzt. Wie bekannt[1]), kommt nun aber bei allen diesen Kreisprozessen auch derselbe maximale Wirkungsgrad heraus.

---

[1]) Cl. Schaefer, Einführung in die theoretische Physik, 1921, II. 1, S. 130.

Mit Rücksicht auf die späteren Ausführungen sei kurz auf den Beweis eingegangen. Zunächst ist einzusehen, dass die Wärmemenge, die auf $2 \to 3$ (Fig. 2) abgegeben wird, so gross ist als die, welche auf $4 \to 1$ zugeführt werden muss, da ja vorschriftsgemäss c konstant sein soll. Es ist daher auf beiden Wegen pro Masseneinheit

$$Q = c(T_2 - T_1) \tag{4}$$

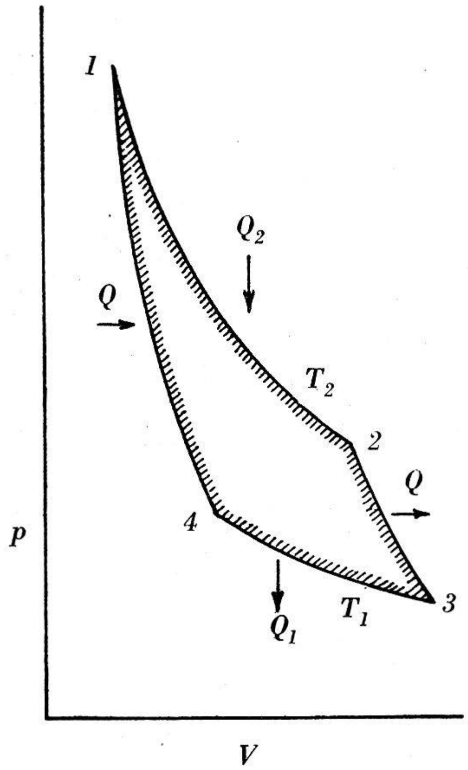

Fig. 2.

Es ist nun nur zu zeigen, dass das Arbeitsintegral über den geschlossenen Linienzug $\oint pdV$ oder die schraffierte Arbeitsfläche ebenso gross ist wie beim CARNOT'schen Prozess. Für

$$A_2 = \int_1^2 p\,dV \text{ bzw. } A_1 = \int_4^3 p\,dV$$

ergibt dies ebenso wie bei CARNOT

$$A_2 = \frac{R\,T_2}{m} \log \frac{V_2}{V_1} \quad \text{und} \quad A_1 = \frac{R\,T_1}{m} \log \frac{V_3}{V_4} \tag{5}$$

Die Arbeitsbeträge auf den Strecken $2 \to 3$ und $4 \to 1$ heben sich wegen der Gleichheit von Q weg. Also ist der Nutzeffekt

$$\eta = \frac{Q_2 - Q_1}{Q_2} = \frac{A_2 - A_1}{A_2} = \frac{T_2 \log \frac{V_2}{V_1} - T_1 \log \frac{V_3}{V_4}}{T_2 \log \frac{V_2}{V_1}}. \tag{6}$$

Der maximale Wirkungsgrad kommt heraus, wenn die Logarithmen sich wegheben, wenn also $\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}$. Um zu beweisen, dass dies der Fall ist, müssen die Kurvenstücke $2 \to 3$ und $4 \to 1$ bekannt sein. Es sind dies Kurven konstanter spezifischer Wärmen oder *Polytropen.* Die Differentialgleichung dieser Polytropen lautet nach dem 1. Hauptsatz

$$c_v dT + p dV = c dT, \tag{7}$$

wo c irgend einen vorgegebenen konstanten Wert besitzt (im Spezialfall der Adiabaten $c = 0$). Dies ergibt die Integralbeziehung

$$p V^{\frac{c_p - c}{c_v - c}} = \text{const.} \tag{8}$$

Indem man diese auf die Punkte 2 und 3, bzw. 4 und 1 anwendet, findet man in der Tat

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}, \tag{9}$$

und damit $\eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2}$, wie bei Carnot.

Die Bedingung, dass der Kreisprozess aus 2 Isothermen und 2 Polytropen bestehe, ist also hinreichend, um maximalen Wirkungsgrad zu erzielen. Man kann sich indessen fragen, ob dies notwendig sei. Es liegt nahe zu vermuten, dass es genügt, dafür zu sorgen, dass die beiden Wärmemengen auf den Strecken $2 \to 3$ und $1 \to 4$ gleich gross sind. Die Bedingung hiefür wäre, dass die spezifische Wärme eine reine Temperaturfunktion ist. Wir hätten also auf beiden Strecken $2 \to 3$ und $4 \to 1$ bei einer bestimmten Temperatur T denselben Wert, c wäre aber im übrigen auf diesen Strecken variabel, d. h. $c = f(T)$. Damit ist für die Linienführung auf den genannten beiden Strecken eine bestimmte Vorschrift gegeben, die offenbar allgemeiner ist als im Falle der Polytropen. Für den Nutzeffekt η erhält man zunächst genau denselben Ausdruck (6). Aber es ist noch nicht erwiesen, dass (9) erfüllt und damit der Nutzeffekt maximal ist. Hierzu muss auf Beziehung (7) zurückgegriffen werden. Integriert man diese unter der Annahme, dass $c = f(T)$, so erhält man

$$\log \frac{p V^{\varkappa}}{p_0 V_0^{\varkappa}} = \frac{1}{c_v} \int_{T_0}^{T} \frac{c}{T} \, dT, \tag{10}$$

$\left(\varkappa = \frac{c_p}{c_v}\right)$. Unter Verwendung von $pV = \frac{R}{m} T$ kommt

$$\log \frac{T V^{\varkappa - 1}}{T_0 V_0^{\varkappa - 1}} = \frac{1}{c_v} \int_{T_0}^{T} \frac{c}{T} \, dT \tag{11}$$

Das Integral rechts hat für ein gegebenes Temperaturintervall immer denselben Wert, ist also für die Strecke $2 \rightarrow 3$ und $1 \rightarrow 4$ gleich gross. Somit folgt, wenn man (11) auf die Punkte 2 und 3 bzw. 4 und 1 anwendet

$$\log \frac{T_2 V_2^{\varkappa-1}}{T_1 V_3^{\varkappa-1}} = \log \frac{T_2 V_1^{\varkappa-1}}{T_1 V_4^{\varkappa-1}} ,$$

und dies führt unmittelbar zu (9), so dass sich auch in diesem allgemeinen Falle die log der Formel (6) wegheben. Damit ist aber bewiesen, dass der CARNOT'sche Nutzeffekt nicht nur bei Verwendung von Polytropen erzielt werden kann. Es genügt vielmehr, die Strecken $2 \rightarrow 3$ bzw. $4 \rightarrow 1$ so zu wählen, dass auf diesen gleiche Wärmemengen fortgeführt bzw. zugeführt werden. Für c kann irgend eine reine Temperaturfunktion angesetzt werden. Sie darf

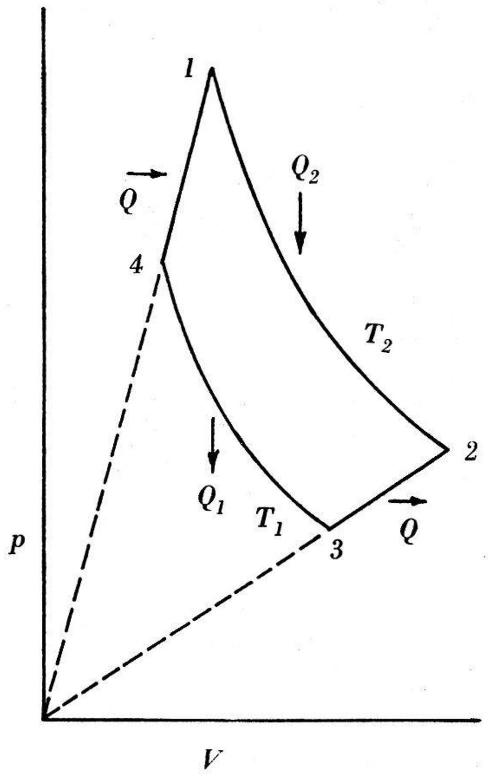

Fig. 3.

also auf Grund der Gasgleichung nur eine Funktion des Produktes pV sein. Da im übrigen diese Funktion nicht vorgeschrieben ist, kann z. B. die Kurve $2 \rightarrow 3$ beliebig gewählt werden. Hingegen ist dann Kurve $1 \rightarrow 4$ vollständig bestimmt. Sie hat an jeder Stelle gerade eine solche Neigung aufzuweisen, dass c gleich gross wird wie an den entsprechenden (gleich temperierten) Stellen der Kurven $2 \rightarrow 3$. Wird so verfahren, so gelangt man von 1 aus zu einem Punkte 4 der Temperatur T_1, welchem ein Volumen V_4 zukommt, das die Bedingung (9) erfüllt. Wählt man Polytropen, so entspricht dies dem Spezialfall, dass $c = f(T)$ zu einer Konstanten zusammenschrumpft. Die durch Gleichung (11) bestimmten Kurven könnten als allgemeine Polytropen oder auch als *Isocaloren* bezeichnet werden, da bei irgend einem gegebenen $c = f(T)$ bei Erwärmung von T_1 auf T_2 auf allen Kurven gleiche Wärmemengen zuzuführen sind. Die Gleichung der *Isocaloren* wird im allgemeinen in der Form $\varphi(p, V) = 0$ erhalten werden, wird sich aber nur in wenigen Fällen explicite als $p = \psi(V)$ angeben lassen. Es ist daher der Umstand bemerkenswert, dass die Kenntnis dieser Funktion für den oben gegebenen Beweis nicht erforderlich ist.

Zum Schluss sei noch auf einen speziellen Kreisprozess mit maximalem Wirkungsgrad hingewiesen, der sich, wie die eingangs aufgeführten 2 Beispiele durch besondere Einfachheit auszeichnet. Er besteht aus 2 Isothermen und 2 Geraden, die nach dem Nullpunkt der pV-Ebene zielen (Fig. 3). Es entspricht dies, wie sich leicht zeigen lässt, der Verwendung zweier Polytropen mit dem besonderen Wert $c = \frac{c_p + c_v}{2}$. Setzt man nämlich diesen Wert in die Gleichung der Polytropen (8) ein, so erhält man $pV^{-1} = \text{const.}$, d. h. eine Geradenschar durch den Ursprung.

Physikalisches Institut der Universität Bern.