

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 17 (1944)
Heft: III

Artikel: Die Rahmenantenne als Empfangsantenne
Autor: Müller-Strobel, Josef / Patry, Jean
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-111501>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die Rahmenantenne als Empfangsantenne

von Josef Müller-Strobel und Jean Patry.

(24. I. 1944.)

1. Einleitung.

HALLÉN¹⁾ zeigte wie eine Rahmenantenne ähnlich der geraden Empfangsantenne auf Grund der Maxwell'schen Theorie berechnet werden kann. Eine praktische brauchbare Schlussformel für die Rahmenantenne hat HALLÉN nicht bekanntgegeben.

Es ist deshalb der Gegenstand der folgenden Untersuchung eine brauchbare Schlussformel für die Rahmenantenne zu entwickeln. Folgende Annahmen mussten getroffen werden: der Rahmen ist ein Kreis, der Drahtradius ρ ist klein gegenüber dem Rahmenradius a , der Rahmenradius a ist klein gegenüber der Wellenlänge λ des einfallenden Feldes. Diese Annahmen berechtigen zum Schluss, dass in den später folgenden Potenzreihenentwicklungen nur die ersten Glieder zu berücksichtigen sind.

Die Gültigkeit der Schlussformel wird für grössere Rahmen im Lang- und Mittelwellenbereich, für kleinere Rahmen im Kurzwellengebiet gewährleistet sein.

Im folgenden sind die Bezeichnungen nach HALLÉN zusammengestellt:

Rahmenradius:	a [m]
Drahtradius:	ρ
Anzahl der Windungen des Rahmens:	N
Koordinate längs des Drahtes:	x, ξ
Winkelkoordinate:	φ, α, β

Abstand zwischen 2 Punkten des Rahmens:

$$r = \sqrt{4 a^2 \sin^2 \left(\frac{\varphi - \alpha}{2} \right) + \rho^2}$$

Näherungsgrösse:

$$y = 2 \cdot a \cdot \sin \left(\frac{\varphi - \alpha}{2} \right)$$

Tangentielle Feldstärke des äusseren Feldes am Rahmen: \mathfrak{E}_0

Die zu \mathfrak{E}_0 gehörende magnetische Feldstärke: \mathfrak{H}_0

Elektrische und magnetische Feldstärke des Feldes: $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$

Antennenstrom längs der Antenne: $\mathfrak{I}(x)$

Stromdichte: \mathbf{i}

Klemmenspannung des Empfangskreises: $2 \mathfrak{U}$

Impedanz des Empfangskreises \mathfrak{R}_e

Wellenwiderstand der Einheitslänge des Rahmens: \mathfrak{r}_w

Totaler Wellenwiderstand der Rahmenantenne: \mathfrak{R}_w

Wellenlänge: $\lambda = \frac{2\pi}{s} = \frac{2\pi \cdot c}{\omega}$

Wellenparameter: $s = 2\pi/\lambda$

Radiusparameter: $\eta = a \cdot s = a \cdot 2\pi/\lambda$

In der vorliegenden Untersuchung ist der Antenneneffekt, d. h. die kapazitive Wirkung des Rahmens gegenüber der Erde nicht berücksichtigt. Es wird daher nur der Strom berechnet, der durch den Empfangskreis, wenn letzterer entweder in der Mitte, oder überhaupt nicht geerdet ist, fließt.

2. Die Grundgleichungen.

HALLÉN¹⁾ hat auf Grund der Maxwell'schen Theorie folgende Gleichungen aufgestellt:

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_0}{\partial t} - \text{grad} \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial^2}{\partial t^2} \cdot \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{i}_{t+r/c}}{r} dv \quad (1)$$

$$\frac{\partial V(x)}{\partial t} = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} (\mathbf{i})_{t-r/c}}{r} d\xi \quad (2)$$

wo V das skalare elektrische Potential bedeutet. Die magnetische und die elektrische Konstante μ und ε sind beide gleich 1 gesetzt.

Das Prinzip der HALLÉN'schen Theorie liegt in der Vernachlässigung von (ϱ/a) und (ϱ/λ) , aber nicht deren Logarithmen.

Nach Einführung der Definition:

$$x = a \cdot \varphi \quad (3)$$

$$\xi = a \cdot \alpha \quad (4)$$

$$\cos(x\xi) = \cos(\varphi - \alpha) \quad (5)$$

und eines exponentiellen Zeitfaktors, wird:

$$j s c V(\varphi) = - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{d}{d\varphi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathfrak{I}(a) \cdot e^{-j s r}}{r} d\alpha \quad (6)$$

$$j s c \mathfrak{E}_0(\varphi) = j \frac{s c}{a} \cdot \frac{dV(\varphi)}{d\varphi} - \frac{s^2 a}{4\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-j s r} \cdot \mathfrak{I}(\alpha) \cdot \cos(\alpha - \varphi)}{r} d\alpha + j s c \mathfrak{r}_w \mathfrak{I}(\varphi) \quad (7)$$

Die Integrationsgrenzen der Integrale 6,7 von $-\pi$ bis $+\pi$ deuten darauf hin, dass der mehrwindige Rahmen bei $\varphi = \pm \pi$ mit der Empfängerimpedanz \mathfrak{R}_e abgeschlossen ist. Ist N die Windungszahl des Rahmens, so wird die Klemmenspannung definitionsgemäss:

$$2\mathfrak{U} = N (V_{(-\pi)} - V_{(+\pi)}) = -N \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\partial V}{\partial \varphi} d\varphi \quad (8)$$

$V(\varphi)$ lässt sich aus den Gl. 6,7 eliminieren. Nach einigen Umformungen erhält man:

$$j4\pi\eta c \mathfrak{E}_0 = - \left[\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \eta^2 \right] \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathfrak{J}(\alpha) \cdot e^{-jsr}}{r} d\alpha + \eta^2 \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathfrak{J}(\alpha) \cdot e^{-jsr}}{r} (1 - \cos(\varphi - \alpha)) d\alpha + 4\pi j\eta c r_w \cdot \mathfrak{J}(\alpha) \quad (9)$$

Daraus folgt der Wert des Integrales:

$$aF(\varphi) = a \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathfrak{J}(\alpha) e^{-jsr}}{r} d\alpha = B \cos(\varphi\eta) + \int_0^\varphi \sin \eta(\varphi - \alpha) d\alpha \left\{ \eta \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\mathfrak{J}(\beta) e^{-js} (1 - \cos(\alpha + \beta))}{\left(\frac{r}{a}\right)} d\alpha + j4\pi a c (r_w \mathfrak{J} - \mathfrak{E}_0) \right\} \quad (10)$$

B wird später durch die Grenzbedingung

$$\mathfrak{J}(\pi) = \mathfrak{J}(-\pi) = -\frac{2\mathfrak{U}}{\mathfrak{R}_e} \quad (11)$$

bestimmt. Es ermöglichen uns die Gl. 6 und 8 eine weitere Beziehung abzuleiten:

$$j8\pi\eta c \frac{\mathfrak{U}}{N} = 4\pi j\eta a c \int_{-\pi}^{+\pi} \mathfrak{E}_0(\varphi) d\varphi + \eta^2 \left\{ \frac{4\pi j a c \mathfrak{R}_0}{\eta} + \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{jsr} (1 - \cos \alpha)}{\left(\frac{r}{a}\right)} d\alpha - \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{e^{-jsr}}{\left(\frac{r}{a}\right)} d\alpha \right\} \int_{-\pi}^{+\pi} \mathfrak{J}(\alpha) d\alpha \quad (12)$$

Da $\varrho/a \ll 1$ ist, kann in der Integralen der G. 12 die Grösse r ersetzt werden durch:

$$r \rightarrow y = 2a \left| \sin \left(\frac{\varphi - \alpha}{2} \right) \right| \quad (13)$$

3. Ableitung einer Näherungslösung für kleinere Rahmen.

Ist das Verhältnis Rahmenradius zu Wellenlänge der einfallenden Strahlung klein, also

$$\eta = 2\pi \frac{a}{\lambda} \ll 1 \quad (14)$$

so lassen sich Vereinfachungen dahin vornehmen, dass in den Reihenentwicklungen von η nur die niedrigsten Potenzen von η berücksichtigt werden müssen. Um die Gl. 10, 12 unter den Voraussetzungen lösen zu können, stellt man die Gleichung der Ströme und Spannungen bzw. Feldstärken als Fourierreihen dar,

$$\mathfrak{I}(\varphi) = \frac{i_0}{2} + \sum_n i_n \cos(n\varphi) + \sum_n i'_n \sin(n\varphi) \quad (15)$$

$$\mathfrak{E}_0(\varphi) = \frac{e_0}{2} + \sum_n e_n \cos(n\varphi) + \sum_n e'_n \sin(n\varphi) \quad (16)$$

Führt man den Integralwert

$$c_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\cos(n\varphi)}{\left(\frac{r}{a}\right)} d\varphi \quad (17)$$

ein, so entsteht aus Gl. 12 die neue Gleichung

$$j 8\pi c \eta \frac{\mathfrak{U}}{N} = -4\pi j a c (\pi \cdot e_0) + \eta^2 (\pi i_0) \left(\frac{4\pi j a c r_W}{\eta} - c_0 + 4 \right) \quad (18)$$

Analog erhält man für Gl. 10 eine neue Beziehung,

$$\begin{aligned} & \frac{i_0}{2} c_0 + \sum_n i_n c_n \cos(n\varphi) + \sum_n i'_n c_n \sin(n\varphi) = \\ & + B \cos(\eta\varphi) \\ & + 1/\eta (1 - \cos(\eta\varphi)) \left\{ \eta \frac{4i_0}{2} - 2\pi j a c (e_0 - r_W i_0) \right\} \\ & + \eta \cos(\eta\varphi) \sum_n \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{4\eta i_n}{1-4n^2} - 4\pi j a c (e_n - r_W i_n) \right\} \\ & - \eta \sum_n \frac{\cos(n\varphi)}{n^2} \left\{ \frac{4\eta i'_n}{1-4n^2} - 4\pi j a c (e'_n - r_W i'_n) \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

In der Entwicklung der Gl. 19 sind alle Sinusglieder weggelassen. Ihre Existenz bedeutete nämlich einen antisymmetrischen Strom

$$\mathfrak{I}'(\varphi) = -\mathfrak{I}(-\varphi) \quad (20)$$

der durch die kapazitive Wirkung der Antenne gegenüber Erde hervorgerufen wird. Voraussetzungsgemäss berücksichtigen wir den Antenneneffekt nicht, weshalb der antisymmetrische Stromanteil für unsere Betrachtung belanglos wird.

Fasst man alle Koeffizienten des Faktors $\cos(\eta\varphi)$ in einer Grösse D zusammen, so wird,

$$D = B - \frac{1}{\eta} \{ 2 i_0 \eta - 2 \pi j a c (e_0 - r_W i_0) + \eta \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left\{ \frac{4 \eta i_n}{1 - 4 n^2} - 4 \pi j a c (e_n - r_W i_n) \right\} \quad (21)$$

Man entwickelt $\cos(\eta\varphi)$ in eine Reihe. Gl. 19 zerfällt dann in unendlich viele Gleichungen, die von φ unabhängig sind. Berücksichtigt man nur das erste Glied der Entwicklung, also $m = 1$ nach Gl. 27, so wird Gl. 19

$$\frac{i_0}{2} \left(c_0 - 4 - \frac{4 \pi j a c r_W}{\eta} \right) = D - \frac{2 \pi j a c \cdot e_0}{\eta} \quad (22)$$

Für $n \geq 1$ wird,

$$i_n \left(c_n - \frac{4 \eta^2}{4 n^4 - n^2} + \frac{4 \pi j a c \eta r_W}{n^2} \right) = \frac{2 \eta^2}{n^2} \left(D \cdot (-1)^n - \frac{2 \pi j a c e_n}{\eta} \right) \quad (23)$$

D lässt sich aus den Gl. 22, 18 eliminieren und heisst:

$$D = - \frac{4 j c}{\eta} \cdot \frac{\mathfrak{U}}{N} \quad (24)$$

Aus der Grenzbedingung 11 lässt sich nun eine Gleichung zwischen \mathfrak{U} und e_n der Gl. 16 herleiten:

$$\mathfrak{J}(\pi) = - \frac{2 \mathfrak{U}}{\mathfrak{R}_e} = - \frac{4 j c}{\eta} \cdot \frac{\mathfrak{U}}{N} \left(\frac{1}{c_0 - 4 - \frac{4 \pi j a c r_W}{\eta}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \eta^2 (-1)^n}{c_n - \frac{4 \eta^2}{4 n^4 - n^2} - \frac{4 \pi j a c \eta r_W}{n^2}} \right) - \frac{2 \pi j a c}{\eta} \left(\frac{e_0}{c_0 - 4 - \frac{4 \pi j a c r_W}{\eta}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \eta^2 e_n}{c_n - \frac{4 \eta^2}{4 n^4 - n^2} - \frac{4 \pi j a c \eta r_W}{n^2}} \right) \quad (25)$$

4. Schlussformel.

Unter Berücksichtigung der Gl. 14 lässt sich Gl. 25 vereinfachen. Wir nehmen an: die einfallende Strahlung besitze eine elektrische Feldstärke parallel zur Achse $\varphi = \pi/2$. e_1 ist dann am grössten. Die Teilspannungen e_n lassen sich dann wie folgt berechnen: Die tangentielle Feldstärke des äusseren Feldes am Rahmen ist mit \bar{H}_\perp als Mittelwert

$$\mathfrak{E}_0 = e^{-j\eta \cos \varphi} \cos \varphi \cdot H_\perp \quad (26)$$

Die Fourierzerlegung der Exponentialfunktion in 26 führt auf BESSEL'sche Funktionen,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\bar{H}_\perp} \cdot \mathfrak{E}_0 &= J_0(-\eta) \cos \varphi \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} J_m(-\eta) \cdot j^m (\cos(m-1)\varphi + \cos(m+1)\varphi) = j J_1(-\eta) \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} \cos(m\varphi) j^{m-1} (J_{m-1}(-\eta) - J_{m+1}(-\eta)) \end{aligned} \quad (27)$$

Für kleine Werte von η (siehe Voraussetzung) gilt die Näherung

$$J_n(-\eta) = (-1/2 \eta) \frac{1}{n!} \quad (28)$$

Es lassen sich nun die einzelnen Teilspannungen bestimmen. Sie sind:

$$e_0 = -j \eta \bar{H}_\perp \quad (29)$$

$$e_1 = 1 \cdot \bar{H}_\perp \quad (30)$$

$$e_2 = \frac{j \eta}{2} \bar{H}_\perp \quad (31)$$

Weiter lassen sich die Integrale in Gl. 17 nach Berücksichtigung der Gl. 14 näherungsweise berechnen. Es sind:

$$c_0 = 2 \ln \left(\frac{8a}{\varrho} \right) = 2 \ln \left(\frac{a}{\varrho} \right) + 4,16 \quad (32)$$

$$c_n = c_0 - 4 \sum_{u=1}^{k=n} \frac{1}{2k-1} = c_0 - g_n \quad (33)$$

wobei g eine schwache Funktion von n ist. Ist die Bedingung,

$$n \leq \frac{a}{4\varrho} = M \quad (34)$$

erfüllt, so werden die Nenner der Gl. 25 immer von Null verschieden sein. Beschränken wir uns auf das Gültigkeitsgebiet der Gl. 35, so lässt sich die zweite Reihe in Gl. 25 folgendermassen umschreiben:

$$\frac{e_0}{\left(c_0 - 4 - \frac{4\pi j a c r_W}{\eta}\right)} - \sum_{n=1}^{n \leq M} \frac{2\eta^2 \cdot e_n}{\left(c_n - \frac{4\eta^2}{4n^4 - n^2} + \frac{4\pi j a c \eta r_W}{\eta^2}\right)} = b_0 \eta + b_1 \eta^2 + b_2 \eta^3 + \dots \quad (35)$$

Es sind die b_n alle von derselben Grössenordnung. Es zeigt sich, dass man für die Herleitung der Schlussformel bei der gemachten Voraussetzung nur das Glied

$$e_0 = -j\eta \bar{H}_\perp \quad (36)$$

zu berücksichtigen braucht. Man erhält dann für die Gl. 25 die neue Beziehung

$$-2 \frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{R}_e} \left(c_0 - 4 - \frac{4\pi j a c r_W}{\eta} - \frac{2j c \mathfrak{R}_e}{\eta N} \right) = -\frac{2\pi j a c e_0}{\eta} = -2\pi a c \bar{H}_\perp \quad (37)$$

woraus die Schlussformel folgt,

$$\mathfrak{I}(\pi) = \mathfrak{I}(-\pi) = -\frac{2\mathfrak{U}}{\mathfrak{R}_e} = \frac{2\pi a c \bar{H}_\perp}{4 - c_0 + \frac{4\pi j a c r_W}{\eta} + \frac{2j c \mathfrak{R}_e}{\eta N}} \quad (38)$$

Die Gl. 38, 39 sind im Lorentz-Heaviside Maßsystem geschrieben. Im technischen Maßsystem lautet die Gl. 38

$$\mathfrak{I}(\pi) = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \bar{H}_\perp}{4 - c_0 + \frac{4\pi j a r_W}{30\eta} + 2j \frac{\mathfrak{R}_e}{30\eta N}} \quad (39)$$

Diese Schlussformel hat eine ähnliche Form wie diejenige für die gerade Empfangsantenne⁴⁾. \bar{H}_\perp ist definitionsgemäss eine positiv reelle Grösse.

Die Ersatzimpedanz der Antenne lässt sich ableiten als:

$$\mathfrak{R}_a = 2\pi a N r_W + j \cdot 15 \eta N (c_0 - 4) = \mathfrak{R}_W + j \cdot 30 \eta N \left(\ln \left(\frac{a}{\varrho} \right) + 0,08 \right) \quad (40)$$

Das zweite Glied in Gl. 41 entspricht einer Induktivität des Rahmens von:

$$L_a = \frac{30 a N}{c} \left(\ln \left(\frac{a}{\varrho} \right) + 0,08 \right) \quad (41)$$

5. Numerisches Beispiel und Schlussfolgerung.

In Fig. 1 ist der Verlauf von $|\mathfrak{I}(\pi)|$ in Funktion der Impedanz

$$Z_0 = \frac{\Re_e}{N} \cdot \frac{1}{(0,1 + j)}$$

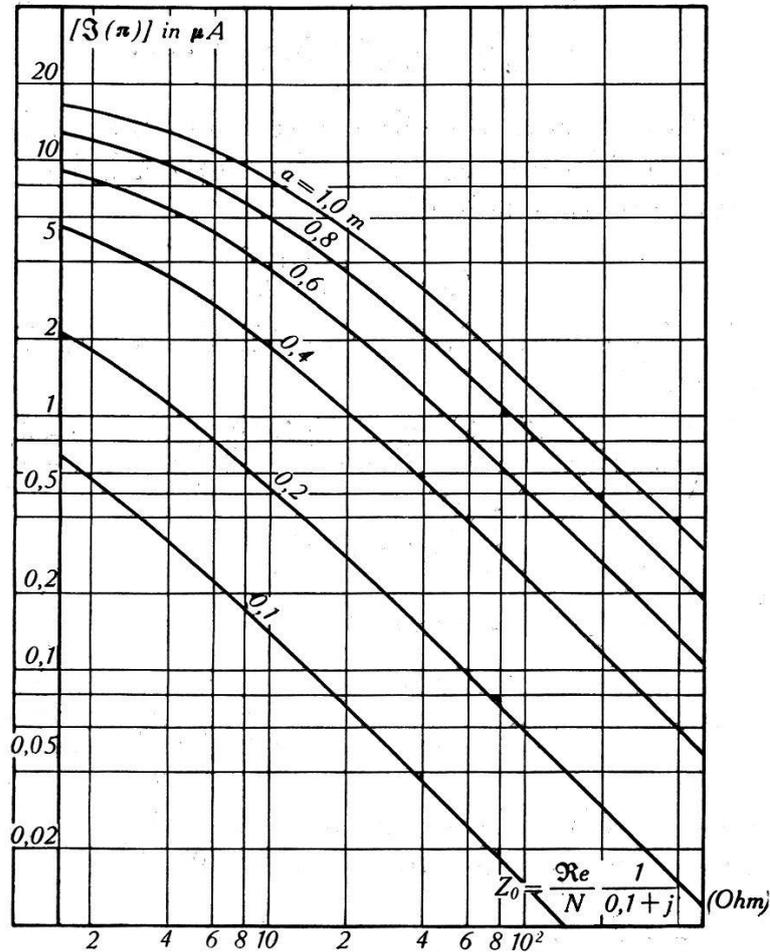


Fig. 1.

mit dem Parameter Radius a der Rahmenantenne dargestellt. Folgende Daten wurden zu Grunde gelegt:

$$\Re_e = N (0,1 + 1 \cdot j) Z_0$$

$$\bar{H}_\perp = 1 \frac{\text{mA}}{\text{m}}$$

$$Z_0 = 1,5 \text{ bis } 500$$

$$\lambda = 314,15 \text{ m}$$

$$r_w = 1,5 \cdot \pi \cdot (0,1 + 1 \cdot j)$$

$$a = 0,1 \text{ bis } 1,0 \text{ m}$$

$$\varrho = 0,05 \text{ cm}$$

Eine Resonanz tritt nicht auf, weil die Antenne sowie der Empfangskreis induktiv wirken.

Wirkt der Rahmen induktiv oder schwach kapazitiv, werden die Real- und Imaginärteile des Stromes $\mathfrak{J}(\pi)$ negativ. Die Existenz des Vorzeichens ist darauf zurückzuführen, weil \bar{H}_\perp definitionsgemäss eine positiv reelle Grösse ist (Gl. 26). Die induzierte Spannung und der Strom kommen deshalb in den 3. und 4. Quadranten zu liegen.

6. Zusammenfassung.

Ausgehend von der Theorie von HALLÉN wird eine Näherungslösung für die Rahmenantenne (Kreis) mit N Windungen abgeleitet. Die Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln sind: Der Rahmen ist ein Kreis, der Drahradius ϱ ist klein gegenüber dem Rahmenradius a , der Rahmenradius a ist klein gegenüber der Wellenlänge λ des einfallenden Feldes.

Diese Annahmen sind im Lang- und Mittelwellengebiet praktisch immer, im Kurzwellengebiet bei kleineren Rahmen ebenfalls, erfüllt.

Aus Platzgründen sind alle Zwischenrechnungen weggelassen.

Albiswerk Zürich AG.

Literatur.

1) HALLÉN: Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsalensis, Vol. XI, Fasc. I, S. 1: Theoretical Investigations into the transmitting in receiving qualities of antennae.

2) HALLÉN: Arch. Elektrotechn. 32 (1938), S. 128.

3) FRANK-VON MISES: Diff.- und Integralgl. der Physik Bd. 2 (1935), S. 867.

4) MÜLLER-STROBEL und PATRY: Die gerade Empfangsantenne. Ableitung einer Schlussformel. Helv. Phys. Acta, XVII (1944) S. 127.

5) F. VILBIG und J. ZENNECK: Fortschritte der Hochfrequenztechnik: S. 235—308, Leipzig, 1941.

F. VILBIG: Lehrbuch der Hochfrequenztechnik Bd. I, Leipzig, 1942.
