

# Eine Bemerkung zur Quantentheorie der ferromagnetischen Resonanz

Autor(en): **Luttinger, J.M. / Kittel, C.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **21 (1948)**

Heft VI

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-111923>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Eine Bemerkung zur Quantentheorie der ferromagnetischen Resonanz

J. M. Luttinger<sup>1)</sup>, ETH., Zürich

C. Kittel<sup>2)</sup>, Bell Telephone Laboratories, Murray Hill N. J. (U. S. A.)

(14. 10. 1948.)

Es ist zu erwarten, dass die Quantentheorie der ferromagnetischen Resonanz im wesentlichen dieselben Resultate liefert wie die klassische Theorie, da ja die Quantenzahlen ausserordentlich gross (ca.  $10^{15}$  oder noch grösser) sind. Trotzdem dürfte es vielleicht nicht ohne Interesse sein, direkt zu zeigen, dass bei quantenmechanischer Rechnung die Eigenwerte durch die Entmagnetisierungsenergie tatsächlich genau so überraschend verschoben werden<sup>3)</sup>. Eine solche Rechnung ist schon von POLDER<sup>4)</sup> mittels einer Methode von HOLSTEIN und PRIMAKOFF<sup>5)</sup> gemacht worden, bei der die vollständige Hamiltonfunktion des Systems verwendet wird. Diese Methode ist sehr wirksam, aber ziemlich langwierig.

Mit Hilfe eines Matrizenkalküls wollen wir hier zeigen, dass sich im allgemeinsten Falle des ferromagnetischen Resonanzproblems eines Ellipsoides benachbarte Eigenwerte um

$$\Delta E = g \mu_B [(H_x + (N_z - N_x) M_x) (H_x + (N_y - N_x) M_x)]^{1/2} \quad (1)$$

sich unterscheiden, wobei  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_z$  die Entmagnetisierungsfaktoren sind und das Magnetfeld parallel zur X-Achse steht.

Die klassische makroskopische Hamiltonfunktion des Systems ist

$$H = - M_x H_x V + \frac{1}{2} (N_x M_x^2 + N_y M_y^2 + N_z M_z^2) \quad (2)$$

mit  $V =$  Volumen

$\underline{M} =$  magnetisches Moment/Volumeneinheit.

$H_x =$  äusseres Magnetfeld (nur in der X-Richtung).

An Stelle des klassischen magnetischen Momentes  $\underline{M}V = g \mu_B \underline{J}$  ( $\underline{J}$  dimensionslos). Damit folgt die Hamiltonfunktion

$$H = - g \mu_B J_x H_x + (g^2 \mu_B^2 / 2V) (N_x J_x^2 + N_y J_y^2 + N_z J_z^2) \quad (3)$$

<sup>1)</sup> National Research Fellow.

<sup>2)</sup> Z. Z. Zürich.

<sup>3)</sup> C. KITTEL, Phys. Rev. **71**, 270 (1947); **73**, 155 (1948).

<sup>4)</sup> D. POLDER, Phys. Rev. **73**, 1116 (1948).

<sup>5)</sup> T. HOLSTEIN und H. PRIMAKOFF, Phys. Rev. **58**, 1098 (1948).

$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$  ist aber eine Bewegungskonstante, so dass wir — abgesehen von einer Konstante — schreiben können<sup>1)</sup>:

$$H = a J_x + b J_y^2 + c J_z^2$$

wo

$$a = -g \mu_B H_x, \quad b = \frac{g^2 \mu_B^2}{2 V} (N_x - N_y) \quad (4)$$

$$c = \frac{g^2 \mu_B^2}{2 V} (N_z - N_y).$$

Eine in  $J_z, J^2$  diagonale Darstellung der Matrizen gibt für die Säkulargleichung (wegen der wohlbekannten Eigenschaften der Drehimpulsoperatoren):

$$E p_m = p_m \left( c m^2 + \frac{b}{2} (j^2 + j - m^2) \right) + p_{m+1} ((j-m)(j+m+1))^{1/2} \left( \frac{a}{2} \right) \\ + \left( \frac{a}{2} \right) p_{m-1} ((j+m)(j-m+1))^{1/2} \\ + \left( \frac{b}{4} \right) p_{m+2} ((j-m)(j-m+1)(j+m+1)(j+m+2))^{1/2} \\ + \left( \frac{b}{4} \right) p_{m-2} ((j+m)(j+m-1)(j-m+1)(j-m+2))^{1/2} \quad (5)$$

wo

$$\psi = \sum_{m=-j}^j p_m u_m^j, \quad H \psi = E \psi,$$

und die  $u_m^j$  die Eigenfunktionen von  $J^2, J_z$  sind.

Weil  $j, m \gg 1$  sind, bekommen wir als sehr gute Näherung:

$$E p_m \cong p_m \left( c m^2 + \frac{b}{2} (j^2 + j - m^2) \right) + (j^2 - m^2)^{1/2} (p_{m+1} + p_{m-1}) \\ + \frac{b}{4} (j^2 - m^2) (p_{m+2} + p_{m-2}). \quad (6)$$

Wir können jetzt die Differenzgleichung in eine Differentialgleichung transformieren. Dazu entwickeln wir  $p_m$  in eine Taylorreihe um  $m$  und vernachlässigen die dritte und höhere Ableitungen. Für  $m \gg 1$  ist dies eine gute Näherung, beim Experiment beträgt ja  $m$  etwa  $10^{15}$ , so dass sie ausserordentlich gut wird. Gleichung (6) wird

$$E p_m = p_m \left[ \left( c m^2 + \frac{b}{2} (j^2 + j - m^2) \right) + a (j^2 - m^2)^{1/2} + \frac{b}{2} (j^2 - m^2) \right] \\ + \left( \frac{a}{2} (j^2 - m^2)^{1/2} + b (j^2 - m^2) \right) \frac{d^2 p_m}{d m^2}. \quad (7)$$

<sup>1)</sup>  $N_x + N_y + N_z = 4 \pi$ .

Um (7) weiter zu vereinfachen, bemerken wir, dass zwar  $m \gg 1$  nichts desto weniger aber um einen Faktor der Grössenordnung  $10^5$  kleiner als  $j$  ist. Demzufolge sind die wesentlichen Terme der Gleichung (7) in sehr guter Näherung

$$\left(bj^2 + \frac{a}{2}j\right) \frac{d^2 p_m}{dm^2} + \left(-E + \text{Konst.} + m^2 \left(c - b - \frac{a}{2j}\right)\right) p_m = 0 \quad (8)$$

oder

$$\frac{d^2 p_m}{dm^2} + \left(-\frac{E}{bj^2 + \frac{a}{2}j} - m^2 \frac{\left(b + \frac{a}{2j} - c\right)}{bj^2 + \frac{a}{2}j}\right) p_m = 0 \quad (9)$$

weil die Konstante in der Gleichung (8) keine Rolle spielt.

Gleichung (9) hat die Form einer Oszillatorgleichung und liefert gleichmässig verteilte Eigenwerte. Der Abstand zweier Eigenwerte ist:

$$\Delta E = 2 \left[ \left(bj^2 + \frac{a}{2}j\right) \left(b + \frac{a}{2j} - c\right) \right]^{1/2}. \quad (10)$$

Wenn wir für  $a$ ,  $b$ ,  $c$  die obigen Werte einsetzen, kommt

$$\Delta E = g \mu_B [(H_x + (N_z - N_x) M_x) (H_x + (N_y - N_x) M_x)]^{1/2} \quad (11)$$

also genau das klassische Ergebnis.

Wir möchten an dieser Stelle Herrn Dr. Jost für eine wertvolle Diskussion bestens danken.