Eine Bemerkung zur Quantentheorie der ferromagnetischen Resonanz

Eine Bemerkung zur Quantentheorie der ferromagnetischen Resonanz

J. M. Luttinger[1]), ETH., Zürich
C. Kittel[2]), Bell Telephone Labaratories, Murray Hill N. J. (U. S. A.)

(14. 10. 1948.)

Es ist zu erwarten, dass die Quantentheorie der ferromagnetischen Resonanz im wesentlichen dieselben Resultate liefert wie die klassische Theorie, da ja die Quantenzahlen ausserordentlich gross (ca. 10^{15} oder noch grösser) sind. Trotzdem dürfte es vielleicht nicht ohne Interesse sein, direkt zu zeigen, dass bei quantenmechanischer Rechnung die Eigenwerte durch die Entmagnetisierungsenergie tatsächlich genau so überraschend verschoben werden[3]). Eine solche Rechnung ist schon von POLDER[4]) mittels einer Methode von HOLSTEIN und PRIMAKOFF[5]) gemacht worden, bei der die vollständige Hamiltonfunktion des Systems verwendet wird. Diese Methode ist sehr wirksam, aber ziemlich langwierig.

Mit Hilfe eines Matrizenkalküls wollen wir hier zeigen, dass sich im allgemeinsten Falle des ferromagnetischen Resonanzproblems eines Ellipsoides benachbarte Eigenwerte um

$$\Delta E = g\,\mu_B\left[(H_x+(N_z-N_x)\,M_x)\,(H_x+(N_y-N_x)\,M_x)\right]^{1/2} \qquad (1)$$

sich unterscheiden, wobei N_x, N_y, N_z die Entmagnetisierungsfaktoren sind und das Magnetfeld parallel zur X-Achse steht.

Die klassische makroskopische Hamiltonfunktion des Systems ist

$$H = -M_x H_x V + \frac{1}{2}\left(N_x M_x^2 + N_y M_y^2 + N_z M_z^2\right) \qquad (2)$$

mit V = Volumen
$\underline{M}$ = magnetisches Moment/Volumeinheit.
$\underline{H_x}$ = äusseres Magnetfeld (nur in der X-Richtung).

An Stelle des klassischen magnetischen Momentes $\underline{M}V = g\,\mu_B\,\underline{J}$ ($\underline{J}$ dimensionslos). Damit folgt die Hamiltonfunktion

$$H = -g\,\mu_B J_x H_x + (g^2\ \mu_B^2/2V)\left(N_x J_x^2 + N_y J_y^2 + N_z J_z^2\right) \qquad (3)$$

1) National Research Fellow.
2) Z. Z. Zürich.
3) C. KITTEL, Phys. Rev. **71**, 270 (1947); **73**, 155 (1948).
4) D. POLDER, Phys. Rev. **73**, 1116 (1948).
5) T. HOLSTEIN und H. PRIMAKOFF, Phys. Rev. **58**, 1098 (1948).

$J^2 = J_x^2 + J_y^2 + J_z^2$ ist aber eine Bewegungskonstante, so dass wir — abgesehen von einer Konstante — schreiben können[1]):

$$H = a\, J_x + b\, J_y^2 + c\, J_z^2$$

wo

$$a = -g\, \mu_B\, H_x, \qquad b = \frac{g^2\, \mu_B^2}{2\, V}\,(N_x - N_y) \tag{4}$$

$$c = \frac{g^2\, \mu_B^2}{2\, V}\,(N_z - N_y)\,.$$

Eine in J_z, J^2 diagonale Darstellung der Matrizen gibt für die Säkulargleichung (wegen der wohlbekannten Eigenschaften der Drehimpulsoperatoren):

$$\begin{aligned} E\, p_m = p_m \left(c\, m^2 + \frac{b}{2}\,(j^2 + j - m^2)\right) &+ p_{m+1}\,((j-m)\,(j+m+1))^{1/2} \left(\frac{a}{2}\right) \\ &+ \left(\frac{a}{2}\right) p_{m-1}\,((j+m)\,(j-m+1))^{1/2} \\ &+ \left(\frac{b}{4}\right) p_{m+2}\,((j-m)\,(j-m+1)\,(j+m+1)\,(j+m+2))^{1/2} \\ &+ \left(\frac{b}{4}\right) p_{m-2}\,((j+m)\,(j+m-1)\,(j-m+1)\,(j-m+2))^{1/2} \end{aligned} \tag{5}$$

wo

$$\psi = \sum_{m=-j}^{j} p_m\, u_m^j, \qquad H\, \psi = E\, \psi,$$

und die u_m^j die Eigenfunktionen von J^2, J_z sind.

Weil $j, m \gg 1$ sind, bekommen wir als sehr gute Näherung:

$$\begin{aligned} E\, p_m \cong p_m \left(c\, m^2 + \frac{b}{2}\,(j^2 + j - m^2)\right) &+ (j^2 - m^2)^{1/2}\,(p_{m+1} + p_{m-1}) \\ &+ \frac{b}{4}\,(j^2 - m^2)\,(p_{m+2} + p_{m-2})\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Wir können jetzt die Differenzengleichung in eine Differentialgleichung transformieren. Dazu entwickeln wir p_m in eine Taylorreihe um m und vernachlässigen die dritte und höhere Ableitungen. Für $m \gg 1$ ist dies eine gute Näherung, beim Experiment beträgt ja m etwa 10^{15}, so dass sie ausserordentlich gut wird. Gleichung (6) wird

$$\begin{aligned} E\, p_m = p_m \left[\left(c\, m^2 + \frac{b}{2}\,(j^2 + j - m^2)\right) + a\,(j^2 - m^2)^{1/2} + \frac{b}{2}\,(j^2 - m^2)\right] \\ + \left(\frac{a}{2}\,(j^2 - m^2)^{1/2} + b\,(j^2 - m^2)\right) \frac{d^2\, p_m}{d\, m^2}\,. \end{aligned} \tag{7}$$

---

[1]) $N_x + N_y + N_z = 4\,\pi$.

Um (7) weiter zu vereinfachen, bemerken wir, dass zwar $m \gg 1$ nichts desto weniger aber um einen Faktor der Grössenordnung 10^5 kleiner als j ist. Demzufolge sind die wesentlichen Terme der Gleichung (7) in sehr guter Näherung

$$\left(b j^2 + \frac{a}{2} j\right) \frac{d^2 p_m}{d m^2} + \left(-E + \text{Konst.} + m^2 \left(c - b - \frac{a}{2 j}\right)\right) p_m = 0 \qquad (8)$$

oder

$$\frac{d^2 p_m}{d m^2} + \left(-\frac{E}{b j^2 + \frac{a}{2} j} - m^2 \frac{\left(b + \frac{a}{2 j} - c\right)}{b j^2 + \frac{a}{2} j}\right) p_m = 0 \qquad (9)$$

weil die Konstante in der Gleichung (8) keine Rolle spielt.

Gleichung (9) hat die Form einer Oszillatorgleichung und liefert gleichmässig verteilte Eigenwerte. Der Abstand zweier Eigenwerte ist:

$$\Delta E = 2 \left[\left(b j^2 + \frac{a}{2} j\right)\left(b + \frac{a}{2 j} - c\right)\right]^{1/2}. \qquad (10)$$

Wenn wir für a, b, c die obigen Werte einsetzen, kommt

$$\Delta E = g \mu_B [(H_x + (N_z - N_x) M_x)(H_x + (N_y - N_x) M_x)]^{1/2} \qquad (11)$$

also genau das klassische Ergebnis.

Wir möchten an dieser Stelle Herrn Dr. Jost für eine wertvolle Diskussion bestens danken.