

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 25 (1952)
Heft: VI

Artikel: Allgemeine Theorie der Dämpfungsphänomene für nichtstationäre Prozesse. III., ϵ^4 -Korrekturen zur Linienbreite
Autor: Arnous, E.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-112328>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 13.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Allgemeine Theorie der Dämpfungsphänomene für nichtstationäre Prozesse.

III. e^4 -Korrekturen zur Linienbreite

von E. Arnous*).

(Seminar für Theoretische Physik, Universität Zürich.)

(9. VI. 1952.)

The e^4 -correction to the line breadth $Re \Gamma_{40/0}(E_0)$ is considered. It is shown that this quantity can be written in a covariant 4-dimensional manner (excepting a part depending on the excitation conditions) and that it is finite and unambiguous. The order of magnitude is $\sim \gamma/137^3 - \gamma^2/\pi \varepsilon$ where γ is the line breadth in second approximation and 2ε a measure for the extension of the incident exciting spectrum.

Die vorliegende Arbeit schliesst sich unmittelbar an zwei frühere Arbeiten¹⁾ desselben Titels an, die im folgenden mit I und II zitiert werden. Betreffend Problemstellung, Methode und Bezeichnungen verweisen wir auf diese Arbeiten, insbesondere auch auf II. Der Zweck der vorliegenden Arbeit III ist die Behandlung der nächsten Ordnung in der Entwicklung der Linienbreite, das heisst $Re \Gamma_{40/0}$. Die Hauptfrage ist, ob diese Grösse, die sich auf ein *gebundenes* Teilchen und auf Anregungsbedingungen bei einer endlichen Zeit t_0 bezieht, mit den gegenwärtigen Methoden der Ladungs- und Massenrenormalisation eindeutig berechenbar und endlich ist. Wir werden sehen, dass beides der Fall ist. In § 4 werden wir die Grössenordnung abschätzen. Da die Berechnung von $Re \Gamma_4$ sehr langwierig ist, so können wir nur den Gang der Untersuchung und die hauptsächlichsten theoretischen Punkte hier wiedergeben. Wir werden uns darauf beschränken, $Re \Gamma_{40/0}(E_0')$ (E_0' = verschobene Energie des angeregten Zustands) zu behandeln. Wir erhielten in II die

*) Chargé de Recherches au Centre national de la Recherche Scientifique, Paris.

¹⁾ E. ARNOUS und S. ZIENAU, *Helv. Phys. Acta* **24**, 279 (1951); E. ARNOUS und K. BLEULER, *ibid.* **25**, 581 (1952).

Formel (wir schreiben wieder E_0 statt E_0' ; im folgenden sind alle Energien die verschobenen Niveaus):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \Gamma_{40/0}(E_0) = \langle 0 | & (H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s) \delta (H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s)_{n\bar{a}} \\ & - \pi^2 H^{tr} \delta H^{tr} \delta (H^{tr} \delta H^{tr})_{n\bar{a}} + \left[H^{tr} \delta H^{tr} P (H^{tr} P H^{tr} + H_c \right. \\ & - H_s)_{n\bar{a}} + H^{tr} \delta (H_c - H_s - H_L) P H^{tr} - \frac{1}{2} H^{tr} \delta (H^{tr} P^2 H^{tr})_a H^{tr} \\ & \left. - \frac{1}{2} H^{tr} \delta H^{tr} (\tilde{H}^{tr} P^2 \tilde{H}^{tr})_a + \text{Konj. kompl.} \right] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (1)$$

$$\delta \equiv \delta(E_0 - H_0), \quad P \equiv \frac{P}{E_0 - H_0}.$$

§ 1. Berechnung der Matrixelemente.

H^{tr} und H_c sind Operatoren, in denen das *transversale* Photonfeld A_i und der Kommutator $[\bar{\psi}, \psi]$ vorkommen. ψ sei das, der zweiten Quantisierung unterworfenene Elektronenfeld, in *Anwesenheit des statischen Kernfeldes*. Es ist ($\hbar = c = 1$, Heavyside-Einheiten)

$$H^{tr} = -\frac{ie}{2} \int d\mathbf{r} [\bar{\psi}(\mathbf{r}), \gamma^i \psi(\mathbf{r})] A_i(\mathbf{r}) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} H_c = \frac{e^2}{32\pi} \int \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} [\psi^*(\mathbf{r}), \psi(\mathbf{r})] [\psi^*(\mathbf{r}'), \psi(\mathbf{r}')] , \\ \bar{\psi} = \psi^* \gamma^4 \end{aligned} \quad (3)$$

H_s ist schon in II (Formel (12)) explizit gegeben. In (1) kommen also Produkte von A_i und von Kommutatoren $[\bar{\psi}, \psi]$ vor. Die Antikommutatoren von ψ an zwei verschiedenen Raumpunkten im Kernfeld sind unbekannt. Im Anhang I stellen wir eine Zerlegungsmethode von A und ψ dar, die trotzdem eine verhältnismässig schnelle Bestimmung der Matrixelemente in (1) ermöglicht. Die Methode separiert die reellen von den virtuellen Prozessen und zerlegt die ersteren in „Ein-, zwei- usw. Teilchenterme“, das heisst Matrixelemente in denen nur ein, bzw. zwei usw. Teilchen in Übergängen beteiligt sind. In unserem Problem werden nur die Einteilchenterme eine Rolle spielen. Diese können dann durch die Diracschen Ein-elektronenfunktionen ausgedrückt werden. Endlich wird es leicht sein, unter den Ein-Teilchentermen diejenigen auszuscheiden, die den Vakuum Erwartungswert des Stromes $\langle j_i \rangle_0$ enthalten, und in Abwesenheit eines Magnetfeldes verschwinden.

Da in H^{tr} nur der Strom $j_i = [\bar{\psi}, \gamma^i \psi]$ vorkommt, nicht die Ladungsdichte, so verschwinden also alle von H^{tr} herrührenden Glieder

die den Vakuumserwartungswert eines Kommutators $\langle [\bar{\psi}, \psi] \rangle_0$ enthalten. Betrachten wir zum Beispiel

$$\langle 0 | (H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s) \delta (H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s)_{nd} | 0 \rangle$$

Es ist zuerst klar, dass die Zweiteilchenterme von

$$(H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s)_{nd}$$

Null geben, denn (siehe Anhang I, Formel [15]) sie entsprechen entweder Prozessen, die hier nicht stattfinden können (wenn zum Beispiel der Prozess mit Paarvernichtung, Positronensprung oder Vernichtung zweier Elektronen anfängt), oder sie verletzen die Energieerhaltung (Paarerzeugung), die durch die δ -Funktion in der Mitte verlangt wird.

Betrachten wir weiter die Nullteilchenteile

$$\langle H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s \rangle_{0 \text{ El}}^{0 \text{ Ph}} \quad \text{und} \quad \langle H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s \rangle_{2 \text{ Ph}}^{0 \text{ El}}$$

Der erste Operator ist diagonal und muss ausgeschlossen werden. Der zweite verletzt die Erhaltung der Energie²⁾. Es bleiben also

$$\langle H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s \rangle_{0 \text{ Ph}}^{1 \text{ El}} \quad \text{und} \quad \langle H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s \rangle_{2 \text{ Ph}}^{1 \text{ El}}$$

Der erste Operator gibt nur Erhaltung der Energie, wenn das im Anfangszustand $|0\rangle$ absorbierte Elektron reemittiert wird. Dieser Operator ist aber dann diagonal und muss wieder ausgeschlossen werden. Der zweite Operator reduziert sich auf

$$\langle H^{tr} P H^{tr} \rangle_{2 \text{ Ph}}^{1 \text{ El}}$$

was die Emission von zwei Photonen beschreibt (Doppelemission). Die Formel (16) des Anhanges I zeigt, dass die zwei ersten Terme dieser Formel $\langle j \rangle_0$ enthalten, also Null sind. Es bleiben also nur die Terme

$$4 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_1 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_0 + 4 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_1 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_0.$$

Die Hilfsformeln (1), (3), (11), (12) und (14) des Anhanges I liefern unmittelbar die zwei einzigen Matrixelemente.

²⁾ Würden wir $\text{Re } \Gamma_4(E)$ für $E \neq E_0$ berechnen, so könnten in $H^{tr} P H^{tr}$ zwei weiche Photonen emittiert werden und $\langle H^{tr} P H^{tr} \rangle_{2 \text{ Ph}}^{0 \text{ El}}$ wäre von Null verschieden.

Auch sonst würden viele der folgenden Vereinfachungen unmöglich sein.

Ähnliche Betrachtungen können für die anderen Terme gemacht werden. Wir werden jetzt einige Matrixelemente explizit schreiben, wie sie uns die obige Methode liefert, um einige Bemerkungen über die Fortsetzung der Rechnungen machen zu können.

Betrachten wir zum Beispiel das dritte Glied von (1) und insbesondere

$$\langle H^{tr} P (H^{tr} P H^{tr})_{n a} \rangle_{1 \text{ El}}^{1 \text{ Ph}}$$

was allein einen von Null verschiedenen Beitrag gibt. Um dieses Produkt berechnen zu können, benutzen wir die Formel (18) des Anhanges I, und man sieht sofort, dass nur die neun letzten Terme dort von Null verschieden sind (die anderen verschwinden, weil $\langle j \rangle_0 = 0$). Wir geben im Anhang II die entsprechenden Matrixelemente in tabellarischer Form.

1 c muss ausgeschlossen werden, so wie auch die Fälle $n = 0$ in 5 c und 9 c, weil das Produkt der zwei letzten H^{tr} nicht diagonal sein muss.

Terme mit verschwindenden Nennern treten also nicht auf. Ferner sehen wir, dass der Operator H_L diejenigen Terme subtrahiert, in denen der Hauptwert P und die δ -Funktion mit demselben Argument $E_0 - E_z$ auftreten, wo also $P/x \delta(x)$ vorkommt. Es sind die Fälle 3a und $n = G$ in 7a und $n' = G$ in 9a. Sie werden durch $\langle H_L \rangle_{0 \text{ El}} P H^{tr}$ bzw. $\langle H_L \rangle_{1 \text{ El}} P H^{tr}$ subtrahiert.

Die in den Renormalisationstermen auftretenden Paarglieder werden durch 2b kompensiert und die Fälle $n = 0$ in 4b und $n = G$ in 8b lassen sich mit den anderen Beiträgen der Renormalisationsterme zusammen addieren (gemeinsame Zähler). Die übrigbleibenden Matrixelemente können folgendermassen gruppiert werden: 1a, 2a mit 3b; 1b, 2c mit 3c; 4b, 5c, 6a, 7b, 8a mit 9c; 4c, 5b, 6c, 7a, 8b mit 9a; 4a, 5a, 6b, 7c, 8c mit 9b. In der Bestimmung der gemeinsamen Nenner benutzt man die Regel³⁾:

$$\frac{P}{A} \cdot \frac{P}{A+B} + \frac{P}{B} \frac{P}{A+B} = \frac{P}{A} \frac{P}{B} + \pi^2 \delta(A) \delta(B)$$

Wenn A oder B immer von Null verschieden sind, verschwindet $\delta(A) \delta(B)$. Es zeigt sich, dass dies immer der Fall ist, wenn nur ein einzelner Übergang, etwa vom ersten angeregten Niveau zum Grundzustand existiert (was durchweg angenommen sei). Aus dem gleichen Grund verschwindet auch das Glied $\sim \pi^2$ in (1). Energie-

³⁾ Man verifiziert diese Formel, indem man die Integraldarstellung des Hauptwertes und der δ -Funktion einsetzt.

erhaltung (δ -Funktionen) und die nd -Vorschrift lassen sich nicht erfüllen.

Ähnliche Betrachtungen können auf die Coulombterme H_c angewandt werden.

Die übrigbleibenden Beiträge zu $Re \Gamma_{40/0}(E_0)$, soweit sie nur von transversalen Photonen herrühren, sind vom Typus:

$$\begin{aligned} & \frac{e^4}{(2\pi)^6} \sum_{s,z} \int d\mathbf{r} d\mathbf{k} \bar{\psi}_{z_1}(\mathbf{r}_1) e^{i(\mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1)} \gamma \mathbf{e}^{s_1}(\mathbf{k}_1) \psi_{z_1'}(\mathbf{r}_1) \dots \bar{\psi}_{z_4}(\mathbf{r}_4) e^{i(\mathbf{k}_4 \mathbf{r}_4)} \times \\ & \quad \times \gamma \mathbf{e}^{s_4}(\mathbf{k}_4) \psi_{z_4'}(\mathbf{r}_4) \times \\ & \quad \times \frac{\delta(E_{z_3} - E_{z_3'} + E_{z_4} - E_{z_4'} + k_3 + k_4) \text{ oder } \delta(E_{z_2} - E_{z_2'} + \dots - E_{z_4'} \pm k_3 + k_4)}{\text{Nenner}} \\ & \quad + \text{konj. Kompl.} \end{aligned} \quad (4)$$

$\mathbf{e}^s(\mathbf{k})$ ist der Polarisationsvektor des Photons $\mathbf{k}$. Die Integration ist natürlich über $\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_4$ und $\mathbf{k}_1 \dots \mathbf{k}_4$. Wir charakterisieren (4) kurz durch:

$$z_1(k_1 s_1) z_1' z_2(k_2 s_2) z_2' z_3(k_3 s_3) z_3' z_4(k_4 s_4) z_4' \frac{\delta(\dots)}{\text{Nenner}}.$$

In der folgenden Tafel I sind die Matrixelemente, die von transversalen Photonen herrühren zusammengestellt. Der Anschaulichkeit halber, sind auch die zugehörigen Feynman-Diagramme angegeben ($\dots$ Photonlinie, — Elektronlinie), doch ist zu beachten, dass die Elektronenlinien hier gebundene Elektronen beschreiben, n und n' sind Niveaus positiver Energie, ν negativer Energie, z und z' positiver oder negativer Energie; ε_z und $\varepsilon_{z'}$ sind die Vorzeichen von E_z und $E_{z'}$. G bezeichnet den Grundzustand, 0 das angeregte Anfangsniveau. Die Massenkorektionen

$$H^{tr} \delta H^{tr} P (H_s)_{n a} \quad \text{und} \quad H^{tr} \delta (H_s)_{n a} P H^{tr}$$

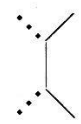
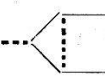
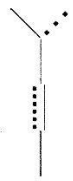
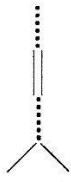
sind noch nicht subtrahiert.

In dem Renormalisationsterm $-1/2 H^{tr} (\tilde{H}^{tr} P^2 \tilde{H}^{tr})_a$ kommt die Grösse der Energieschale des angeregten Zustands explizit vor. Dies ist auch notwendig, da sonst für manche Übergänge P^2 unendlich würde. Es ist nützlich, diesen Term formal aufzuspalten

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} H^{tr} (\tilde{H}^{tr} P^2 \tilde{H}^{tr})_a &= -\frac{1}{2} H^{tr} (H^{tr} P^2 H^{tr})_a + \\ &+ \frac{1}{2} H^{tr} (\underline{H}^{tr} P^2 \underline{H}^{tr})_a. \end{aligned} \quad (5)$$

Natürlich würde jedes Glied von (5) einzeln unendlich, doch werden wir den zweiten Teil von (5), der nichtrelativistischer Natur ist, erst bei der expliziten Berechnung in § 4 brauchen. Für die Zwecke der

Tafel I.

	$z_1(k_1 s_1) z_1' z_2(k_2 s_2) z_2' z_3(k_3 s_3) z_3' z_4(k_4 s_4) z_4'$	$\delta(\dots)/\text{Nenner}$
Emission zweier Quanten 	$0(k' s') z z(k s) G$ $0(k s) z z(k' s') G$	$\frac{\delta(E_G - E_0 + k + k')}{4 k k' (E_z - E_G - k) (E_z' - E_0 + k')}$ $\frac{\delta(E_G - E_0 + k + k')}{4 k k' (E_z - E_G - k') (E_z' - E_0 + k')}$
Korrekturen zur Emission: <i>A</i> gewöhnliche Korrektur  <i>B</i> ₁ Selbstenergie Korrektur  <i>B</i> ₂ *)  <i>C</i> Polarisationskorrektur 	$0(k s) G$ " " " " " "	$\frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{4 k k' (E_z - E_z' + k)} \left[\frac{1}{E_G - E_z - k' \varepsilon_z} + \frac{1}{E_z' - E_0 + k' \varepsilon_z'} \right]$ $\frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{4 k k' (E_G - E_z - k' \varepsilon_z) (E_0 - E_z' - k)}$ $\frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{4 k k' (E_z - E_G - k) (E_z' - E_0 + k' \varepsilon_z')}$ $-\frac{1}{2} \frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{4 k k' (E_z - E_G + k' \varepsilon_z)^2}$ $-\frac{1}{2} \frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{4 k k' (E_z - E_0 + k' \varepsilon_z)^2}$ $\frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{4 k k' (E_n - E_v + k)} \left[\frac{1}{k' + k} + \frac{1}{k' - k} \right]$ $\frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{4 k k' (E_n - E_v - k)} \left[\frac{1}{k' + k} + \frac{1}{k' - k} \right]$

*) B_2 besteht aus $-\frac{1}{2} H^{tr} \delta H^{tr} (H^{tr} P^2 H^{tr})_d - \frac{1}{2} H^{tr} \delta (H^{tr} P^2 H^{tr})_d H^{tr}$ plus den Matrix-Elementen 2b, 4b ($n=0$) und 8b ($n=G$) des Anhanges II.

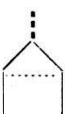
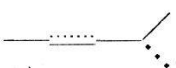
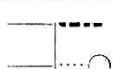
§ 1–3 lassen wir die Beschränkung $\sim$ einfach weg und die Beiträge des zweiten Glieds von (5) sind in Tafel I nicht enthalten.

Die Coulombterme, die H_c enthalten, sind vom Typus

$$\frac{e^4}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k} d\mathbf{r}_1 \dots d\mathbf{r}_4}{8\pi |\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4|} \bar{\psi}_{z_1}(\mathbf{r}_1) \gamma \mathbf{e}^s(\mathbf{k}_1) e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r}_1} \psi_{z_1'}(\mathbf{r}_1) \bar{\psi}_{z_2}(\mathbf{r}_2) \times \\ \times \gamma \mathbf{e}^s(\mathbf{k}_2) e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r}_2)} \psi_{z_2'}(\mathbf{r}_2) \psi_{z_3}^*(\mathbf{r}_3) \psi_{z_3'}(\mathbf{r}_3) \psi_{z_4}^*(\mathbf{r}_4) \psi_{z_4'}(\mathbf{r}_4) \times \\ \times \frac{\delta(+E_{z_2} - E_{z_2'} + E_{z_3} - E_{z_3'} + E_{z_4} - E_{z_4'} + k_2)}{\text{Nenner}} + k \cdot k. \quad (6)$$

Sie sind in Tafel II zusammengestellt. In den Diagrammen bezeichnet ... ein virtuelles skalares Photon.

Tafel II.

	$z_1(k_1 s_1) z_1'$	$z_2(k_2 s_2) z_2' z_3 z_3' z_4 z_4'$	$\delta(\dots)/\text{Nenner}$
A_{coul} Gewöhnliche Korrektur zur Emission 	$0(k s) G$	$z(-k s) z' G z z' 0$	$\frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{2k(E_z - E_{z'} + k)} (\varepsilon_{z'} - \varepsilon_z)$
B_{coul} Selbstenergie Korrektur 	$0(k s) G$ $0(k s) G$	$z' \neq G(-k s) 0 G z z z'$ $G(-k s) z \neq 0 z z' z' 0$	$\frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{2k(E_{z'} - E_0 + k)} \varepsilon_z$ $\frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{2k(E_z - E_G - k)} \varepsilon_{z'}$
C_{coul} Polarisationskorrektur 	$0(k s) G$ $0(k s) G$	$n(-k s) \nu \nu n G 0$ $\nu(-k s) n n \nu G 0$	$\frac{2\delta(E_G - E_0 + k)}{2k(E_n - E_\nu + k)}$ $\frac{2\delta(E_G - E_0 + k)}{2k(E_n - E_\nu - k)}$
D_{coul} Polarisationskorrektur 	$0(k s) G$ $0(k s) G$	$G(-k s) z' \neq 0 z' 0 z z$ $z' \neq G(-k s) 0 z z G z'$	$\frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{2k(E_G - E_{z'} + k)} \varepsilon_z$ $\frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{2k(E_0 - E_{z'} - k)} \varepsilon_z$

D_{Coul} enthält den Vakuumenerwartungswert der Ladungsdichte $\langle \rho \rangle_0$, der für gebundene Zustände (im Gegensatz zu freien Partikeln) nicht verschwindet. Hierin stecken die Ladungsrenormalisation des Kerns sowie endliche Beiträge.

§ 2. Vierdimensionale Zusammenfassung der Matrixelemente.

Nun werden wir die folgende Eigenschaft von $Re \Gamma_{40/0}(E_0)$ verifizieren: Wenn in B_2 keine Beschränkung, die Energieschale betreffend, existieren würde, dann würden sich die Coulombterme mit denen von Tafel I vierdimensional kombinieren lassen, und dasselbe Resultat ergeben, das man bei Lorentzzeichnung ohne Betrachtung der Lorentzbedingung erhalten hätte⁴⁾, das heisst es treten statt der Coulombterme 4 Typen von virtuellen Photonen in Tafel I auf. Für die Terme D_{Coul} von Tafel II, die $\langle \rho \rangle_0$ enthalten, ist das allerdings erst der Fall, wenn auch die Beiträge $\langle j \rangle_0$, die in Abwesenheit eines äusseren Magnetfelds verschwinden, in Betracht gezogen werden.

Diese Eigenschaft, die von French und Weisskopf für die gebundene Selbstenergie des Elektrons verifiziert wurde, erstreckt sich also praktisch auch auf $Re \Gamma_4(E_0)$. (Der Zusatz, der durch die Energiebeschränkung entsteht, gibt zu keinerlei Konvergenzschwierigkeiten Anlass). Es ist aber zu betonen, dass all dies nur für $Re \Gamma(E_0)$, aber an keiner anderen Stelle $E \neq E_0$ gilt. In dem letzten Fall dürfte also die Lorentz-Bedingung *nicht* ignoriert werden, wenn man mit 4 Photonentypen rechnen will.

Wir beschränken uns darauf, an dem typischen Beispiel der Polarisationssterme zu zeigen, wie die 4-dimensionale Zusammenfassung durchgeführt werden kann.

Wir schreiben die zwei Polarisationssterme der Tafel I mit der dortigen Bezeichnungsweise:

$$C \equiv 0(\mathbf{k}s) G G(\mathbf{k}'s') 0 \left[\frac{\nu(-\mathbf{k}'s') n n(-\mathbf{k}s) \nu}{E_n - E_\nu + k} + \frac{n(-\mathbf{k}'s') \nu \nu(-\mathbf{k}s) n}{E_n - E_\nu - k} \right] \times \\ \times \frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{2 k(k'^2 - k^2)}. \quad (7)$$

Um die Polarisationssterme C_{Coul} der Tafel II in ähnliche Form bringen zu können, ergänzen wir zuerst die 2 Polarisationsvektoren $e^{s'}$, zu 4 Vierervektoren $e_\lambda^{s'}$, durch Hinzufügen einer longitudinalen und skalaren Polarisation, $s' = 3$ und 4:

$$e_\lambda^4 = (0, 0, 0, 1); \quad e_4^{s'} = 0, \quad \text{wenn } s' = 1, 2, 3$$

$$\sum_{s'=1}^4 e_\lambda^{s'}(\mathbf{k}') e_\lambda^{s'}(\mathbf{k}) = \delta_{\lambda\lambda'},$$

⁴⁾ Mit Lorentzzeichnung bezeichnen wir diejenige Eichung der Potentiale für die klassisch $\delta A_\mu / \delta x_\mu = 0$; bei Coulombeichung ist $\text{div } A = 0$.

so dass bei Summation über λ

$$\gamma \mathbf{e}^{s'} \equiv \gamma^\lambda e_\lambda^{s'} \quad (s' = 1, 2, 3), \quad \psi^* = \bar{\psi} \gamma^\lambda e_\lambda^4$$

Dann ersetzen wir $1/4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ durch

$$\frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}'}{k'^2} e^{i(\mathbf{k}', \mathbf{r} - \mathbf{r}')}.$$

Wir erhalten

$$C_{\text{Coul}} = 0(\mathbf{k}s) G G(\mathbf{k}'4) 0 \times \\ \times \left[\frac{\nu(-\mathbf{k}'4) n n(-\mathbf{k}s) \nu}{E_n - E_\nu + k} + \frac{n(-\mathbf{k}'4) \nu \nu(-\mathbf{k}s) n}{E_n - E_\nu - k} \right] \frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{2 k k'^2}. \quad (8)$$

Unsere Behauptung ist jetzt die folgende: Anstatt C und C_{Coul} zu addieren, können wir in (7) s' von 1 bis 4 statt von 1 bis 2 summieren.

Es genügt offenbar, zu zeigen, dass

$$C(s' = 3, 4 \text{ statt } 1, 2) - C_{\text{Coul}} = 0. \quad (9)$$

Wir reduzieren die dritte Komponente auf die vierte mittels der Formel

$$\int \bar{\psi}_z(\mathbf{r}) \gamma^\lambda e_\lambda^3(\mathbf{k}') e^{\pm i \mathbf{k}' \mathbf{r}} \psi_{z'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \pm i \frac{E_{z'} - E_z}{k'} \times \\ \times \int \bar{\psi}_z(\mathbf{r}) \gamma^\lambda e_\lambda^4 e^{\pm i \mathbf{k}' \mathbf{r}} \psi_{z'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (10)$$

(9) wird jetzt:

$$C(s' = 3, 4) - C_{\text{Coul}} = \\ = 0(\mathbf{k}s) G G(\mathbf{k}'4) 0 \left[(n(-\mathbf{k}s) \nu \nu(-\mathbf{k}'4) n) \frac{(E_0 - E_G)(E_n - E_\nu) + k^2}{k(E_n - E_\nu + k)} - \right. \\ \left. - (\nu(-\mathbf{k}s) n n(-\mathbf{k}'4) \nu) \frac{(E_0 - E_G)(E_n - E_\nu) - k^2}{k(E_n - E_\nu - k)} \right] \frac{\delta(E_G - E_0 + k)}{2 k'^2 (k'^2 - k^2)}. \quad (11)$$

Wegen des Faktors $\delta(E_G - E_0 + k)$ ist aber $E_0 - E_G = k$ und die zwei Brüche in der Klammer werden gleich 1. Wir addieren und subtrahieren dann zu der Klammer von (11) den Ausdruck

$$n(-\mathbf{k}s) n' n'(-\mathbf{k}'4) n.$$

Das erste Glied der Klammer ist dann $n(-\mathbf{k}s) z z(-\mathbf{k}'4) n$ und kann über z mit Hilfe der Vollständigkeitsrelation summiert werden. Für das zweite Glied der Klammer von (11) vertauschen wir $n \rightleftharpoons n'$ und erhalten ebenso $z(-\mathbf{k}s) n n(-\mathbf{k}'4) z$. Auch hier kann man über z summieren.

Man erhält, explicit geschrieben,

$$[(11)] = \int \{ \bar{\psi}_n(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \gamma \mathbf{e}^s e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \psi_n(\mathbf{r}) - \\ - \bar{\psi}_n(\mathbf{r}) \gamma^4 e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \gamma^4 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \gamma \mathbf{e}^s \psi_n(\mathbf{r}) \} d\mathbf{r} = 0.$$

Damit ist (9) bestätigt.

Für die anderen Terme lässt sich dasselbe in ähnlicher Weise durchführen. Bildet man $A(s' = 3, 4) - A_{\text{Coul}}$, $B_1(s' = 3, 4) - B_{\text{Coul}}$, $B_2(s' = 3, 4)$, so verschwinden diese Terme allerdings einzeln nicht. Dagegen heben sich einige Glieder von B_2 gegen Glieder von $A - A_{\text{Coul}}$; die restlichen Glieder von B_2 , zusammen mit $B_1 - B_{\text{Coul}}$ heben sich gegen den Rest von $A - A_{\text{Coul}}$. Einige Terme von $B_1 - B_{\text{Coul}}$ verschwinden bei der Integration über die Winkel von k' . Zusammen⁵⁾:

$$A(s' = 3, 4) - A_{\text{Coul}} + B_1(s' = 3, 4) - B_{\text{Coul}} + B_2(s' = 3, 4) = 0. \quad (12)$$

Somit bleiben übrig: (1) die Beiträge von der Doppelemmission, (2) A, B, B_2, C von Tafel I, wobei aber s' von 1 bis 4 zu summieren ist, (3) die Terme D_{Coul} von Tafel II. Letztere, wie schon erwähnt, nehmen 4-dimensionale Gestalt nur an, wenn die schon weggelassenen Glieder $\langle j \rangle_0$ (die verschwinden) berücksichtigt werden. Übrig bleibt ferner noch das zweite Glied von (5), das explizit von der Grösse der Energieschale abhängt. Für dieses kann man natürlich keine 4-dimensionale Gestalt erwarten.

§ 3. Beweis der Konvergenz.

Wir zeigen nun, dass die übliche Methode der Ladungs- und Massenrenormalisation genügt, um alle Divergenzen, die in den einzelnen Matrixelementen stecken, zu beseitigen. Hierbei handelt es sich natürlich um die Divergenzen, die bei hohen virtuellen k auftreten. Die Beiträge von der Doppelemmission sind endlich. Eine Ultrarotkatastrophe tritt auch nicht auf. Ferner dürfen wir zu diesem Zweck das zweite Glied von (5) ausser acht lassen, da dieses keine quantenelektrodynamische Divergenz enthält, sondern lediglich das Verschwinden des Nenners von P^2 verhindert.

Ein typisch divergenter Ausdruck, der überall in verschiedenen Variationen vorkommt, ist zum Beispiel

$$X = \sum_z \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{r}' d\mathbf{k}'}{k'} \dots \frac{\gamma^\lambda e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \psi_z(\mathbf{r}) \bar{\psi}_z(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \gamma^\lambda \psi_0(\mathbf{r}')}{E_0 - E_z - k' \varepsilon_z}. \quad (13)$$

⁵⁾ Die Gültigkeit der obigen Behauptungen und von (12) ist keineswegs sehr leicht zu sehen, doch können wir die zum Teil umfangreichen rechentechnischen Einzelheiten nicht alle darstellen.

Wir zerlegen die Zwischenzustände in zwei Klassen, je nachdem k' kleiner oder grösser als eine gegebene Energie μ ist. Diese Energie wollen wir viel grösser als die Ionisierungsenergie I wählen, damit die Integration über $k' < \mu$ den Hauptbeitrag zum Integral gibt, aber viel kleiner als mc^2 , damit das Gebiet $k' > \mu$ alle relativistischen Effekte einschliesst: zum Beispiel $\mu = \alpha m$ ($\alpha = 1/137$). Wenn $k' > \mu$, muss die Energie $|E_z| > \mu \gg I$ sein, damit der Gesamtimpuls, während des Überganges $0 \rightarrow z$ des Elektrons und während der Emission des Photons $\mathbf{k}'$, innerhalb der Impulsverteilung von ψ_0 , also von der Ordnung der Ionisationsenergie, bleibt. Man darf jetzt das Elektron z des Zwischenzustandes als frei betrachten und infolgedessen die Bornsche Näherung in den Zwischenzuständen benutzen.

Wir ersetzen (13) durch

$$X = \sum_z \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{r}' d\mathbf{k}' dE}{k'} \dots$$

$$\dots \frac{\gamma^\lambda e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \delta(E - \alpha \mathbf{p} - \beta m - V) \psi_z(\mathbf{r}) \bar{\psi}_z(\mathbf{r}') e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \gamma^\lambda \psi_0(\mathbf{r}')}{E_0 - E - k' \varepsilon_E}$$

was die Summation über z durchzuführen gestattet. Wir entwickeln dann $\delta(E - \alpha \mathbf{p} - \beta m - V)$ nach Potenzen von V (siehe Anhang III) und erhalten für $k' > \mu$:

$$X \rightarrow \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{k}' dE}{k'} \dots \frac{\gamma^\lambda e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \left\{ \delta(E - \alpha \mathbf{p} - \beta m) + \right.$$

$$\times \left. \frac{P}{E - \alpha \mathbf{p} - \beta m} V \delta(E - \alpha \mathbf{p} - \beta m) + \delta() V \frac{P}{E - \alpha \mathbf{p} - \beta m} + \dots \right\} e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \gamma^\lambda \psi_0(\mathbf{r})}{E_0 - E - k' \varepsilon_E}.$$

Die Benützung der Formel

$$e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \mathcal{f}(\mathbf{p}) e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} = \mathcal{f}(\mathbf{p} - \mathbf{k}'), \quad p = -i \text{ grad}$$

und die Trennung der Zwischenzustände positiver und negativer Energien mittels der Operatoren

$$H^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{\alpha \mathbf{p} + \beta m}{E(\mathbf{p})} \right], \quad E(\mathbf{p}) = (|\mathbf{p}|^2 + m^2)^{1/2}$$

$$\delta(E - \alpha \mathbf{p} - \beta m) H^\pm = \delta(E \mp E(\mathbf{p})) H^\pm, \quad H^+ + H^- = 1$$

gibt endlich ($H^\pm$ kommutiert mit $E(\mathbf{p})$):

$$X = \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{k}'}{k'} \dots \gamma^\lambda \left\{ \frac{H^+(\mathbf{p} - \mathbf{k}')}{E_0 - E(\mathbf{p} - \mathbf{k}') - k'} + \frac{H^-(\mathbf{p} - \mathbf{k}')}{E_0 - E(\mathbf{p} - \mathbf{k}') + k'} + \right.$$

$$\left. + \frac{H^+(\mathbf{p} - \mathbf{k}')}{E_0 - E(\mathbf{p} - \mathbf{k}') - k'} V \frac{H^+(\mathbf{p} - \mathbf{k}')}{E_0 - E(\mathbf{p} - \mathbf{k}') - k'} + \dots \right\} \gamma^\lambda \psi_0. \quad (14)$$

Man sieht: Je höher die Potenz von V , desto höher die Potenz von k' im Nenner. Von einer bestimmten Stelle ab muss also $\int dk'$ endlich sein. Nachdem sämtliche Terme in diese Form gebracht sind, kann man leicht entscheiden, ob noch Divergenzen übrig bleiben oder nicht.

Als Beispiel betrachten wir das Matrixelement A

$$A = \dots \frac{1}{2k'} \frac{\bar{\psi}_G e^{i\mathbf{k}'\mathbf{r}} \gamma^\lambda \psi_z \bar{\psi}_z e^{-i\mathbf{k}'\mathbf{r}'} \gamma^\lambda \psi_0}{(E_z - E_{z'} + k)} \times \\ \times \frac{k'(\varepsilon_{z'} - \varepsilon_z) - (E_z - E_{z'} + k)}{(E_G - E_z - k'\varepsilon_z)(E_{z'} - E_0 + k'\varepsilon_z)} \quad (15)$$

wobei

$$\dots = \frac{e^4}{(2\pi)^6} \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{k}}{2k} \bar{\psi}_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \gamma^\lambda \psi_G \delta(E_G - E_0 + k) \int d\mathbf{k}' d\mathbf{r}'$$

(15) divergiert höchstens logarithmisch.

Die Entwicklung (14) zeigt sofort, dass nur die von V unabhängigen Terme divergieren können. Betrachten wir zuerst den Term, der $k'(\varepsilon_{z'} - \varepsilon_z)$ im Zähler enthält. Da die Vorzeichen von E_z und $E_{z'}$ verschieden sein müssen, bekommen wir die folgenden zwei Möglichkeiten ($\alpha_\lambda = i\gamma^\lambda$):

$$A_1 = \dots - i\psi_G^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \alpha_\lambda \frac{1}{E(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') + E(\mathbf{p} - \mathbf{k}') + k} \times \\ \times \frac{1}{E_G - E(\mathbf{p} - \mathbf{k}' - \mathbf{k}) - k'} H^+(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{\alpha \mathbf{e}(\mathbf{k})}{-E(\mathbf{p} - \mathbf{k}') - E_0 - k'} H^-(\mathbf{p} - \mathbf{k}') \alpha_\lambda \psi_0 \\ A_2 = \dots i\psi_G^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \alpha_\lambda \frac{1}{-E(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') - E(\mathbf{p} - \mathbf{k}') + k} \times \\ \times \frac{1}{E_G + E(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') + k'} H^-(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') \frac{\alpha \mathbf{e}(\mathbf{k})}{E(\mathbf{p} - \mathbf{k}') - E_0 + k'} H^+(\mathbf{p} - \mathbf{k}') \alpha_\lambda \psi_0.$$

Divergenzen kommen offenbar nur von dem Produkt der 2 Glieder $1/2$ in $H^+(\mathbf{p} - \mathbf{k} - \mathbf{k}')$ und $H^+(\mathbf{p} - \mathbf{k}')$ und dem Produkt zweier $\alpha \mathbf{k}'$, da ein einzelner Faktor $\alpha \mathbf{k}'$ nach Integration über die Winkel von $\mathbf{k}'$ verschwindet. Die Summation über λ ergibt

$$\alpha_\lambda (\alpha \mathbf{e}(\mathbf{k})) \alpha_\lambda = -2(\alpha \mathbf{e}(\mathbf{k})) \\ \alpha_\lambda (\alpha \mathbf{k}') (\alpha \mathbf{e}(\mathbf{k})) (\alpha \mathbf{k}') \alpha_\lambda = 2k'^2 (\alpha \mathbf{e}(\mathbf{k})) - 4(\mathbf{e} \mathbf{k}') (\alpha \mathbf{k}').$$

Ferner ist

$$\int d\mathbf{k}' \frac{(\mathbf{e}(\mathbf{k}) \mathbf{k}') (\alpha \mathbf{k}')}{k'^2} = \frac{1}{3} \int d\mathbf{k}' (\alpha \mathbf{e}(\mathbf{k})).$$

Der divergierende Teil von $A_1 + A_2$ ist also

$$\dots \frac{2\pi i}{3} \int \frac{dk'}{k'} \int d\mathbf{r} \psi_G^*(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} (\alpha \mathbf{e}(\mathbf{k})) \psi_0(\mathbf{r}). \quad (15')$$

Der Term $E_z - E_{z'} + k$ von (15) lässt sich ebenso behandeln (Beitrag A_3). Nur die Produkte von 2 Faktoren ($\alpha \mathbf{k}'$) geben Divergenzen. A_3 ergibt sich als die Hälfte von (15'). Der divergierende Anteil von (15) ist also

$$A = A_1 + A_2 + A_3 \rightarrow \cdots \pi i \int \frac{dk'}{k'} \int d\mathbf{r} \psi_G^*(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} (\alpha \mathbf{e}(\mathbf{k})) \psi_0(\mathbf{r}). \quad (16)$$

Diese Divergenz wird durch B_2 exakt kompensiert. Der V -unabhängige Teil des ersten Terms von B_2 ist

$$\begin{aligned} & \cdots \frac{1}{4ik'} \psi_G^* \alpha_\lambda \left\{ \frac{H^+(\mathbf{p}-\mathbf{k}')}{(E_G - E(\mathbf{p}-\mathbf{k}') - k')^2} + \frac{H^-(\mathbf{p}-\mathbf{k}')}{(E_G + E(\mathbf{p}-\mathbf{k}') + k')^2} \right\} \times \\ & \quad \times \alpha_\lambda \psi_G \psi_G^* e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} (\alpha \mathbf{e}) \psi_0 \\ & \rightarrow \cdots \frac{\pi}{2i} \int \frac{dk'}{k'} \int d\mathbf{r} \psi_G^*(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} (\alpha \mathbf{e}(\mathbf{k})) \psi_0(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Der zweite Term von B_2 gibt dasselbe. Es folgt also, dass $A + B_2$ endlich ist.

Die Selbstenergiebeiträge B_1 sind analog zu behandeln. Die Entwicklung muss aber hier bis zu den in V linearen Gliedern fortgesetzt werden. B_1 konvergiert, wenn die Beiträge der Massenkorrektion $H^{tr} \delta H^{tr} P (H_s)_{nd}$ und $H^{tr} \delta (H_s)_{nd} P H^{tr}$ abgezogen werden. Der Operator H_s [siehe II Formel (12)] ist symmetrisch in Anfang- und Endzustand. Um die Subtraktion durchführen zu können, müssen wir in unseren Matrixelementen die Nenner symmetrisieren, zum Beispiel

$$\begin{aligned} \frac{2}{E_G - E_z - k' \varepsilon_z} & \equiv \left(\frac{1}{E_G - E_z - k' \varepsilon_z} + \frac{1}{E_0 - E_z - k' \varepsilon_z} \right) + \\ & + \left(\frac{1}{E_G - E_z - k' \varepsilon_z} - \frac{1}{E_0 - E_z - k' \varepsilon_z} \right). \end{aligned}$$

Für grosse Werte von k' ist die zweite Klammer mit $(E_0 - E_G)/k'^2$ äquivalent. Wenn man sie in die Selbstenergieterme einführt, verschwinden die divergierenden Integrale, entweder weil

$$\int \psi_G^*(\mathbf{r}) \psi_{z' \neq G}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = 0 \quad \text{oder weil} \quad \int \frac{d\mathbf{k}'}{k'} = 0.$$

Wenn man die erste Klammer in die Selbstenergieterme einführt und die H_s -Beiträge subtrahiert, so reduziert sich das Problem genau auf das von French und Weisskopf (Niveaushiftung⁶) behandelte. Dies braucht hier nicht mehr im einzelnen wiederholt werden. Es folgt, dass B_1 minus Beiträge von H_s endlich ist.

⁶) J. FRENCH und V. WEISSKOPF, Phys. Rev. **75**, 1240 (1949).

Wir brauchen auch nicht die Polarisationssterme C und D_{Coul} im einzelnen zu betrachten. Sie sind proportional zu den bekannten Ausdrücken für die Vakuum-Polarisation. Es ist bekannt, dass C eine Divergenz enthält, die die Ladung in H^{tr} renormalisiert. Dieser Beitrag ist also wegzulassen. Nach Elimination der nicht-eichinvarianten Glieder durch bekannte Verfahren⁷⁾ ist der Rest endlich.

D_{Coul} enthält das divergente $\langle \rho \rangle_0$, das die Renormalisation der Ladung des Kernfeldes beschreibt⁸⁾, und ausserdem den wohlbe-kannten endlichen Term $-(\alpha/15\pi) \nabla^2 \delta(r)$, der auch in der Lamb-verschiebung eine Rolle spielt.⁹⁾ Damit ist die *Endlichkeit von $\text{Re } \Gamma_{40/0}(E_0)$ bewiesen.*

Es wäre weiter zu fragen, ob auch $\text{Re } \Gamma_4(E)$, $E \neq E_0$, endlich ist. Obwohl die Rechnung für diesen Fall unverhältnismässig viel komplizierter ist, besteht wohl kein Zweifel, dass dies der Fall ist. Man kann sich $\text{Re } \Gamma_4(E)$ nach $E - E_0$ entwickelt denken, und da E nur im Nenner zusammen mit k' vorkommt, so kann wohl kaum eine Divergenz übrig bleiben. (Vergleiche auch den analogen Fall von $\text{Im } \Gamma_2(E)$ in II.)

§ 4. Abschätzung in nicht-relativistischer Näherung.

In nicht-relativistischer Näherung sind die einzigen Terme, die von Null verschieden sind, die Matrixelemente für die Emission zweier Quanten und A , B_1 und B_2 , während die Coulombsterme Null sind: A_{Coul} hat den Faktor $\varepsilon_{z'} - \varepsilon_z$ und verschwindet, weil $E_z > 0$ und $E_{z'} > 0$. B_{Coul} ist genau durch $H^{tr} \delta H^{tr} P (H_{s\text{Coul}})_{na}$ und $H^{tr} \delta (H_{s\text{Coul}})_{na} P H^{tr}$ kompensiert, wenn für H_s die nicht-relativistische Form der Selbstenergie benutzt wird. Diese besteht dann aus dem Coulombbeitrag

$$H_{s\text{Coul}} = \frac{e^2}{8\pi} \int \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \psi^*(\mathbf{r}) \frac{\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \psi(\mathbf{r}') \quad (17)$$

und dem transversalen Beitrag

$$H_s^{tr} = -\frac{2}{3\pi} \frac{1}{137} \int d\mathbf{k} \int d\mathbf{r} \psi^*(\mathbf{r}) \frac{p^2}{m^2} \psi(\mathbf{r}) \quad (18)$$

$$H_s = H_{s\text{Coul}} + H_s^{tr}.$$

⁷⁾ Zum Beispiel W. PAULI and F. VILLARS, Rev. Mod. Phys. **21**, 434 (1949); G. KÄLLEN, Ark. f. Fysik, **2**, 187 (1950).

⁸⁾ Da e in der Wechselwirkung wie in dem ungestörten Problem (Kernfeld) vorkommt, so muss eine Ladungsrenormalisation auch an 2 Stellen ausgeführt werden.

⁹⁾ E. A. UEHILING, Phys. Rev. **48**, 55–63 (1935).

Wir ersetzen α durch $\mathbf{p}/m$ und die ψ und E durch die Schrödinger Eigenfunktionen und Eigenwerte. Ferner beschränken wir uns für die reellen Photonen k auf die Dipolstrahlung (erlaubte Übergänge). Die Frage, ob dies auch für die virtuellen Photonen k' erlaubt ist, muss aber näher diskutiert werden. Wenn das nicht-relativistische Gebiet durch $k' < \mu = \alpha m$, $\alpha \sim 1/137$, definiert ist, ist die Dipolnäherung gerechtfertigt. Die obere Grenze unserer Integrale ist dann $\sim \alpha m$, und das Resultat hängt von $\log \alpha m = \log \alpha + \log m$ ab. Die Rechnungen von French und Weisskopf über die Linienverschiebung haben gezeigt, dass $\log \alpha$ wegfällt, wenn man den relativistischen Teil der Integrale hinzufügt. Das angenähert richtige Resultat erhält man, wenn man die nicht-relativistische Rechnung für die Dipolstrahlung bis zur oberen Grenze m fortsetzt.

Da wir sowieso nur eine grobe Abschätzung geben können, werden wir auch hier dasselbe Verfahren anwenden und nur die Dipolstrahlung betrachten aber trotzdem $\mu = m$ als obere Grenze wählen¹⁰⁾. Damit werden die Integrale über $\mathbf{k}, \mathbf{k}'$ elementar.

Wir betrachten zuerst die Teile von $Re \Gamma_4$, die nicht von der Energieschale ε abhängen. Wir beschränken uns darauf, an dem ersten Glied von B_1 zu zeigen, wie die Rechnung durchgeführt wird. Das Resultat der Integration ist

$$B_1 \text{ (erstes Glied)} = \frac{e^4}{(2\pi m)^4} \left(\frac{2}{3}\right)^2 (E_0 - E_G) \sum_{i,j,z,z'} \int d\mathbf{r}_1 \cdots d\mathbf{r}_4 \times \\ \times \psi_0^*(\mathbf{r}_1) p_i \psi_G(\mathbf{r}_1) \psi_G^*(\mathbf{r}_2) p_j \psi_z(\mathbf{r}_2) \psi_z^*(\mathbf{r}_3) p_j \psi_{z'}(\mathbf{r}_3) \psi_{z' \neq G}^*(\mathbf{r}_4) p_i \psi_0(\mathbf{r}_4) \times \\ \frac{1}{E_G - E_{z'}} \left\{ -\mu + (E_z - E_G) \log \left| \frac{E_G - E_z - \mu}{E_G - E_z} \right| \right\}. \quad (19)$$

Es tritt ein Glied auf das in μ linear ist. Dieses wird aber durch $H^{tr} \delta(H_s^{tr})_{na} P H^{tr}$, Formel (18), subtrahiert. Der Term $\sim \mu$ fällt also weg.

Weiter werden wir die Tatsache benutzen, dass der Logarithmus eine langsam variierende Funktion ist und sie als eine Konstante betrachten:

$$\log \frac{E_G - E_z - \mu}{E_G - E_z} = \text{const} \quad (20)$$

(20) ist sicher von der Grössenordnung 1–10. Dann können wir $E_z - E_G$ in das Matrixelement absorbieren:

$$\sum_z (E_z - E_G) \psi_G^*(\mathbf{r}_2) p_j \psi_z(\mathbf{r}_2) \psi_z^*(\mathbf{r}_3) p_j = \\ = \psi_G^*(\mathbf{r}_2) [p_j H] \psi_z(\mathbf{r}_2) \psi_z^*(\mathbf{r}_3) p_j = \psi_G^*(\mathbf{r}_2) [p_j H] p_j \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) = \\ = \frac{1}{2} \psi_G^* \{ [p_j^2 H] + \nabla^2 V \} \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3). \quad (21)$$

¹⁰⁾ Unser Verfahren ist ähnlich dem von Bethe in der Rechnung der Linienverschiebung, Phys. Rev. **72**, 339–341 (1947).

(19) zerlegt sich also in zwei Teile, B_1' (Beitrag von $[p_j^2 H]$) und B_1'' (Beitrag von $\nabla^2 V$). Wir betrachten nur B_1'' , da B_1' sich mit andern Gliedern von A und B_2 kombinieren lässt. Wir erhalten

$$B_1'' = -\frac{2}{9} \frac{e^4}{(2\pi m)^4} \frac{E_0 - E_G}{E_{z'} - E_G} \int d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3 \psi_0^*(\mathbf{r}_1) p_i \psi_G(\mathbf{r}_1) \psi_G^*(\mathbf{r}_2) \times \\ \times \nabla^2 V \psi_{z'}(\mathbf{r}_2) \psi_{z' \mp G}^*(\mathbf{r}_3) p_i \psi_0(\mathbf{r}_3) \log \frac{E_G - E_z - \mu}{E_G - E_z}. \quad (22)$$

Wir bemerken weiter, dass

$$\int \psi_{z'}^* p_i \psi_0 = i m (E_{z'} - E_0) \int \psi_{z'}^* r_i \psi_0.$$

Das Verhältnis $(E_{z'} - E_0)/(E_{z'} - E_G)$ kann auch grob als Konstante betrachtet werden, es variiert für Wasserstoff zwischen $5/32$ und 1 . In (22) kann man $\sum_{z' \neq G} = \sum_{z'} - (z' = G)$ schreiben. $\sum_{z'}$ gibt keinen Beitrag, da $\nabla^2 V = e^2 \delta(\mathbf{r})$ (für Wasserstoff), und $\delta(\mathbf{r}) r_i = 0$. Es bleibt der Beitrag $z' = G$, oder

$$B_1'' = \frac{2}{9} \frac{e^4}{(2\pi)^4} \frac{(E_0 - E_G)^2}{m^2} \left| \int \psi_0^* r_i \psi_G \right|^2 \int \psi_G^* \nabla^2 V \psi_G \frac{E_{z'} - E_0}{E_{z'} - E_G} \log. \quad (23)$$

Hier ist (für den Grundzustand von Wasserstoff)

$$\int \psi_G^* \nabla^2 V \psi_G = e^2 |\psi_G(0)|^2 = \frac{4 m^3}{137^4}$$

(23) ist proportional zur Linienbreite zweiter Ordnung

$$\gamma = \text{Re } \Gamma_2(E_0) = \frac{4}{3 \cdot 137} (E_0 - E_G)^3 \left| \int \psi_0^* r_i \psi_G \right|^2.$$

Wenn wir

$$\frac{E_{z'} - E_0}{E_{z'} - E_G} \log \frac{E_G - E_z - \mu}{E_G - E_z} \sim 1$$

setzen, erhalten wir die Größenordnung

$$B_1'' \sim \frac{\gamma}{2\pi 137^3}.$$

Ähnliche Betrachtungen für die anderen Matrixelemente zeigen, dass unsere Korrekturen alle von der gleichen Größenordnung sind (es tritt auch $p^2/m^2 \sim 1/137^2$ auf), mit Ausnahme des von der Energieschale abhängigen Teils.

Endlich müssen wir noch den Teil von B_2 berechnen, der explizit von dem ε des angeregten Zustands abhängt. Aus (5) sieht man, dass in $(H^{tr} P^2 H^{tr})_a$ nur der Übergang $0 \rightarrow G + k' \rightarrow 0$ eine Rolle spielt, da für alle andern Übergänge die $\sim$ -Bedingung automatisch

erfüllt ist. Bei der Integration über k' ist dann das Gebiet $E_0 - E_G - \varepsilon$ bis $E_0 - E_G + \varepsilon$ auszuschliessen. Man findet für den Beitrag B_2' von diesem Übergang

$$B_2' = -\frac{2}{9} \frac{e^4}{(2\pi m)^4} (E_0 - E_G) \left(\int_0^{E_0 - E_G - \varepsilon} + \int_{E_0 - E_G + \varepsilon}^{\mu} \right) \frac{k' dk'}{(E_0 - E_G - k')^2} |\psi_0^* p_i \psi_G|^4 =$$

$$- \frac{\gamma^2}{4\pi^2 \varepsilon} + \text{Glieder unabhängig von } \varepsilon.$$

Es ergibt sich als Schlussresultat, dass

$$\text{Re } \Gamma_{40/0}(E_0) \sim \frac{\gamma}{137^3} - \frac{\gamma^2}{\pi \varepsilon}. \quad (24)$$

Der ε -abhängige Teil verschwindet für $\varepsilon \rightarrow \infty$, wie das auch in II für die ε -abhängigen Korrekturen $Jm \Gamma_2(E)$, der Fall war. $\varepsilon \rightarrow \infty$ entspricht dem idealisierten Grenzfall kontinuierlicher Anregung.

§ 5. Linienverschiebung vierter Ordnung.

Zum Schluss seien noch einige Bemerkungen über $Jm \Gamma_4$ gemacht. Wenn wir dieselbe Darstellung wie bisher wählen, in der also die zweite Ordnung der Niveauverschiebung H_L in die Definition der Energien einbezogen ist, erhalten wir¹¹⁾

$$\frac{1}{2} Jm \Gamma_4(E_0) = (H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s) P (H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s)_{nd}$$

$$+ H^{tr} P (H_c - H_s - H_L) P H^{tr} - \pi^2 H^{tr} \delta H^{tr} \delta (H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s)_{nd}$$

$$+ k.k. - \pi^2 H^{tr} \delta H^{tr} P (H^{tr} \delta H^{tr})_{nd} - \pi^2 H^{tr} \delta (H_c - H_s - H_L) \times$$

$$\times \delta H^{tr} - H_{4s}. \quad (25)$$

wobei $H_L = (H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s)_d$. H_{4s} ist die vierte Ordnung des Massenoperators. Wie man sieht, ist $Jm \Gamma(E_0)$ von der Energieschale ε unabhängig. Man wird nun (25) als die Niveauverschiebung vierter Ordnung betrachten und die Darstellung weiterhin so abändern, dass diese in die Definition der Energieniveaus einbezogen ist. Dann verschwindet $Jm \Gamma_4(E_0)$ in der neuen Darstellung. Genau

¹¹⁾ Hätten wir die unverschobenen Niveaus zur Darstellung und als Anfangszustand gewählt ($H_L = 0$), so wäre in (25) ein Zusatzglied $-(H^{tr} P^2 H^{tr}) (H^{tr} P H^{tr} + H_c - H_s)_d$ aufgetreten, das von ε abhängt. In unserer Darstellung tritt aber $H_c - H_s - H_L$ statt $H_c - H_s$ auf, und dieses Glied verschwindet.

wie in II, ist das Maximum der Linie dann durch die Differenzen der verschobenen Niveaus gegeben. Auch in vierter Ordnung erweist sich also die Verschiebung des Linienmaximums als unabhängig von den Anregungsbedingungen (abgesehen von der sehr kleinen Verschiebung, die von der E -Abhängigkeit von $Re\, I(E)$ herrührt.)

Schlussfolgerung. Als Resultat der vorliegenden Untersuchungen I–III kann man folgendes feststellen: Die Quantenelektrodynamik führt, mit Hilfe der Ladungs- und Massenrenormalisation, auch bei gebundenen Zuständen zu eindeutigen und endlichen Resultaten. Dies betrifft insbesondere auch den Fall, wo die Anregung zu einer endlichen Zeit t_0 geschehen ist (wir haben sogar t_0 als scharf bestimmt angenommen), wo also Anregung und Emission nicht in stationärem Betrieb sind. Auch die Zeitabhängigkeit des Emissionsvorganges kann völlig erfasst werden.

Die Korrekturen zur klassischen, oder Weisskopf-Wignerschen Linienform und -breite sind alle ausserordentlich klein. Soweit sie von den Anregungsbedingungen unabhängig sind, ist die Korrektur zur Linienbreite $1/137^3$ mal kleiner als die übliche zweite Ordnung, ebenso ist die zusätzliche Linienverschiebung (die nicht in der Selbstenergie H_L enthalten ist) völlig vernachlässigbar (siehe II). Auch die von der Ausdehnung des anregenden Spektrums ε abhängigen Korrekturen $Jm\, I_2(E)$ und (24) sind von der Grössenordnung $\gamma^2/\varepsilon \ll \gamma$, verschwinden für $\varepsilon \rightarrow \infty$, und sind nur wesentlich, wenn man mit einer verhältnismässig scharfen Linie anregt, deren Schärfe mit γ vergleichbar ist. Man kann also schliessen, dass die Weisskopf-Wignersche Näherung ausserordentlich gut ist, und viel besser als zum Beispiel die erste Näherung für Stossprozesse, und das magnetische Moment, wo die strahlungstheoretischen Korrekturen oft von der Grössenordnung $1/137$ des Haupteffekts sind. Dies liegt an der wesentlich nicht-relativistischen Natur des Problems.

Eine genauere Behandlung der Emission zusammen mit der Anregung, die zu einer präziseren Fassung von ε führen sollte, ist dagegen noch wünschenswert, doch hat dieses Problem nichts mit der typisch quantenelektrodynamischen Seite des Problems zu tun.

Ich möchte Herrn Prof. W. HEITLER für das Interesse, das er dieser Arbeit entgegengebracht hat, herzlichst danken. Diese Arbeit wurde durch ein Stipendium des Centre national de la Recherche scientifique, Paris, ermöglicht, wofür ich dieser Institution bestens danke.

Anhang.

I. Abseparierung der reellen und virtuellen Prozesse¹²⁾.

Wir zerlegen jeden Photonoperator $A(x)$ ($x \equiv r, t$) bzw. Elektronoperator $\psi(x)$ oder $\bar{\psi}(x)$ in zwei Teile: den Teil A^+ (bzw. ψ^+ oder $\bar{\psi}^+$), der die Absorption beschreibt, und den Teil A^- (bzw. ψ^- oder $\bar{\psi}^-$), der die Emissionen beschreibt. Statt Produkte von A (bzw. ψ und $\bar{\psi}$) haben wir dann Produkte von $A^\mp$ bzw. $\psi^\pm$ und $\bar{\psi}^\pm$. A ist das transversale Feld allein.

Wir bringen diese Operatoren dann, mittels der Vertauschungsrelationen, in eine solche Reihenfolge, dass jeder *Absorptionoperator rechts von allen Emissionsoperatoren steht*. Durch die Vertauschungsrelationen treten Kommutatoren (bzw. Antikommutatoren) auf. Für das Elektronenfeld, in Anwesenheit des Kerns, sind diese zwar nicht explizit bekannt. Sie sind aber c -Zahlen und können infolgedessen auch als Vakuumserwartungswerte von Produkten zweier Operatoren betrachtet werden. Die letzteren können durch die Diracschen Ein-Elektronenfunktionen ausgedrückt werden. Ausser Produkten von *geordneten* Operatoren erhalten wir also noch Vakuumserwartungswerte.

Die geordneten Operatoren, die zuerst Teilchen im Anfangszustand absorbieren und dann neue Teilchen im Endzustand emittieren, beschreiben die reellen Prozesse. Die Vakuumserwartungswerte, wo Teilchen zuerst emittiert sind und sofort wieder absorbiert, beschreiben die virtuellen Prozesse.

Photon-Operatoren. Wir setzen:

$$A_i(x) = A_i^+(x) + A_i^-(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{s=1,2} \int \frac{d\mathbf{k}}{\sqrt{2k}} e_i^s(\mathbf{k}) (A^s(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}r - kt)} + A^{s*}(\mathbf{k}) e^{-i(\mathbf{k}r - kt)}). \quad (1)$$

Das Photon Vakuum ist definiert durch

$$A_i^+(x) | \text{Phot. Vak.} \rangle = 0. \quad (2)$$

Aus $[A_i^+ A_j^+] = [A_i^- A_j^-] = 0$ und $\langle A_i A_j \rangle_0 = [A_i^+ A_j^-]$ folgt:

$$A_i A_j = A_i^+ A_j^+ + A_i^- A_j^- + (A_i^- A_j^+ + A_j^- A_i^+) + \langle A_i A_j \rangle_0 \quad (3)$$

Dopp. Abs. Dopp. Em. Streuung

$$A_i A_j A_k = A_i^+ A_j^+ A_k^+ + A_i^- A_j^- A_k^- + (A_i^- A_j^+ A_k^+ + A_j^- A_i^+ A_k^+ + A_k^- A_i^+ A_j^+) \quad (4)$$

Dreif. Abs. Dreif. Em. Abs. + Streuung

$$+ (A_i^- A_j^- A_k^+ + A_i^- A_k^- A_j^+ + A_j^- A_k^- A_i^+) + \text{Streuung + Em.}$$

$$+ (A_i \langle A_j A_k \rangle_0 + A_j \langle A_i A_k \rangle_0 + A_k \langle A_i A_j \rangle_0)$$

Abs. oder Em.

$\langle \rangle_0$ bezeichnet den Erwartungswert im Photon-Vakuum.

Elektron-Operatoren. Wir setzen:

$$\psi(x) = \psi^+(x) + \psi^-(x) = \sum_{E_n > 0} a_n \psi_n(\mathbf{r}) e^{-itE_n} + \sum_{E_\nu < 0} b_\nu^* \psi_\nu(\mathbf{r}) e^{-itE_\nu} \quad (5)$$

Elektr. Vernicht. Posit. Erzeug.

$$\bar{\psi}(x) = \bar{\psi}^+(x) + \bar{\psi}^-(x) = \sum_{E_\nu < 0} b_\nu \bar{\psi}_\nu(\mathbf{r}) e^{itE_\nu} + \sum_{E_n > 0} a_n^+ \bar{\psi}_n(\mathbf{r}) e^{itE_n} \quad (6)$$

Posit. Vernicht. Elektr. Erzeug.

¹²⁾ Siehe z. B. HEISENBERG W., Z. f. Phys. **120**, 673 (1943) und STUECKELBERG, Nature, **153**, 143 (1944).

wobei ψ_n (bzw. ψ_ν) die Diracschen Ein-elektronen-Eigenfunktionen im äusseren Feld sind und $E_n > 0$, $E_\nu < 0$ ($\bar{\psi} = \psi^* \gamma^4$).

Das materielle Vakuum ist definiert durch

$$\psi^+(x) | \text{mat. Vak} \rangle = \bar{\psi}^+(x) | \text{mat. Vak} \rangle = 0. \quad (7)$$

Aus den Anti-Vertauschungsrelationen¹³⁾

$$\{\bar{\psi}_1^-, \psi_2^-\} = \{\psi_1^+, \bar{\psi}_2^+\} = 0 \quad \{\bar{\psi}_1^+, \psi_2^-\} = \langle \bar{\psi}_1 \psi_2 \rangle_0, \quad \{\psi_1^+, \bar{\psi}_2^-\} = \langle \psi_1 \bar{\psi}_2 \rangle_0$$

folgt:

1. Produkt zweier Operatoren.

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{\psi}_1 \psi_2 = & \bar{\psi}_1^+ \psi_2^+ & + & \bar{\psi}_1^- \psi_2^- & + & \bar{\psi}_1^- \psi_2^+ & - \psi_1^- \bar{\psi}_2^+ + \langle \bar{\psi}_1 \psi_2 \rangle_0 \\ & \text{Paar} & & \text{Paar} & & \text{Elek.} & \text{Posit.} \\ & \text{Vern.} & & \text{Erz.} & & \text{Sprung} & \text{Sprung} \end{array} \quad (8)$$

$$\psi_2 \bar{\psi}_1 = -\bar{\psi}_1^+ \psi_2^+ - \bar{\psi}_1^- \psi_2^- - \bar{\psi}_1^- \psi_2^+ + \psi_1^- \bar{\psi}_1^+ + \langle \psi_2 \bar{\psi}_1 \rangle_0 \quad (9)$$

$$\frac{1}{2} [\bar{\psi}_1, \psi_2] = \bar{\psi}_1^+ \psi_2^+ + \bar{\psi}_1^- \psi_2^- + \bar{\psi}_1^- \psi_2^+ - \psi_2^- \bar{\psi}_1^+ + \frac{1}{2} \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_0 \quad (10)$$

wobei ($\varepsilon_z = \pm 1$ wenn $E_z \gtrless 0$)

$$\langle \bar{\psi}(x) \psi(x') \rangle_0 = \sum_{E_\nu < 0} \bar{\psi}_\nu(\mathbf{r}) \psi_\nu(\mathbf{r}') e^{i(t-t')E_\nu} \quad (11)$$

$$\langle \psi(x') \bar{\psi}(x) \rangle_0 = \sum_{E_n > 0} \bar{\psi}_n(\mathbf{r}) \psi_n(\mathbf{r}') e^{i(t-t')E_n} \quad (12)$$

$$\langle [\bar{\psi}(x), \psi(x')] \rangle_0 = - \sum_{E_z \lesseqgtr 0} \varepsilon_z \bar{\psi}_z(\mathbf{r}) \psi_z(\mathbf{r}') e^{i(t-t')E_z} \quad (13)$$

[] bezeichnet auch beim Elektronenfeld den Kommutator.

$\bar{\psi}_1 \psi_2, \psi_2 \bar{\psi}_1$ und $[\bar{\psi}_1, \psi_2]$ zerlegen sich also in einen Teil, der die reellen Prozesse beschreibt, und den wir „Einteilchenteil“ nennen und mit $\langle \rangle_1$ bezeichnen, und einen Vakuumserwartungswert, der einem virtuellen Prozess entspricht und „Nullteilchenteil“ genannt werden soll. Der Einteilchenteil ist:

$$\langle \bar{\psi}_1 \psi_2 \rangle_1 = - \langle \psi_2 \bar{\psi}_1 \rangle_1 = \frac{1}{2} \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_1 = \bar{\psi}_1^+ \psi_2^+ + \bar{\psi}_1^- \psi_2^- + \bar{\psi}_1^- \psi_2^+ - \psi_2^- \bar{\psi}_1^+. \quad (14)$$

2. Produkt zweier Kommutatoren.

Das Produkt zweier Kommutatoren zerlegt sich in drei Teile: Einen „Zweiteilchenteil“, den wir mit $\langle \rangle_2$ bezeichnen; einen Einteilchenteil $\langle \rangle_1$, der reelle und auch virtuelle Prozesse beschreibt; und einen Teil, der nur virtuelle Prozesse beschreibt. Explizit:

$$\frac{1}{4} \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_2 = \quad (15)$$

Paar Vern. + Paar Vern.	$\bar{\psi}_1^+ \psi_2^+ \bar{\psi}_3^+ \psi_4^+$
+ Paar Vern. + Posit. Sprung.	$-\psi_4^- \bar{\psi}_1^+ \psi_2^+ \bar{\psi}_3^+ - \psi_2^- \bar{\psi}_1^+ \bar{\psi}_3^+ \psi_4^+$
+ Paar Vern. + Elek. Sprung	$\bar{\psi}_3^- \bar{\psi}_1^+ \psi_2^+ \psi_4^+ + \bar{\psi}_1^- \psi_2^+ \bar{\psi}_3^+ \psi_4^+$
+ Paar Vern. + Paar. Erz.	$\bar{\psi}_3^- \psi_4^- \bar{\psi}_1^+ \psi_2^+ + \psi_2^- \bar{\psi}_3^- \bar{\psi}_1^+ \psi_4^+ + \bar{\psi}_1^- \psi_4^- \psi_2^+ \bar{\psi}_3^+$
	$+ \bar{\psi}_1^- \psi_2^- \bar{\psi}_3^+ \psi_4^+$
+ Posit. Sprung + Paar Erz.	$-\psi_2^- \bar{\psi}_3^- \psi_4^- \bar{\psi}_1^+ - \bar{\psi}_1^- \psi_2^- \psi_4^- \bar{\psi}_3^+$
+ Elek. Sprung + Paar Erz.	$\bar{\psi}_1^- \bar{\psi}_3^- \psi_4^- \psi_2^+ + \bar{\psi}_1^- \psi_2^- \bar{\psi}_3^- \psi_4^+$
+ Paar Erz. + Paar Erz.	$\bar{\psi}_1^- \psi_2^- \bar{\psi}_3^- \psi_4^-$
+ Vern. zweier Pos. + Erz. zweier Pos.	$-\psi_2^- \psi_4^- \bar{\psi}_1^+ \bar{\psi}_3^+$
+ Vern. zweier El. + Erz. zweier El.	$-\bar{\psi}_1^- \bar{\psi}_3^- \psi_2^+ \psi_4^+$

¹³⁾ Wir schreiben der Kürze halber ψ_1 statt $\psi_{\varrho_1}(x_1)$ usw. Zwei Variable i, j können auch gleich sein.

Der letzte Term enthält zum Beispiel die Coulomb- oder Möllerwechselwirkung zweier Elektronen. Ferner

$$\begin{aligned} & \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_1 = \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_1 \langle [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_0 \\ & + \langle [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_1 \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_0 + 4 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_1 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_0 + 4 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_1 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_0 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_0 = \\ & \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_0 \langle [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_0 + 4 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_0 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_0. \end{aligned} \quad (17)$$

3. Produkt dreier Kommutatoren.

Hier treten Drei-, Zwei- und Einteilchenteile auf. Wir brauchen nur den Einteilchenteil:

$$\begin{aligned} & \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] [\bar{\psi}_3, \psi_4] [\bar{\psi}_5, \psi_6] \rangle_1 = \\ & = \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_1 \langle [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_0 \langle [\bar{\psi}_5, \psi_6] \rangle_0 + \langle [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_1 \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_0 \langle [\bar{\psi}_5, \psi_6] \rangle_0 \\ & + \langle [\bar{\psi}_5, \psi_6] \rangle_1 \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_0 \langle [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_0 + 4 \langle \bar{\psi}_1 \psi_6 \rangle_1 \langle \psi_2 \bar{\psi}_5 \rangle_0 \langle [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_0 \\ & + 4 \langle \psi_2 \bar{\psi}_5 \rangle_1 \langle \bar{\psi}_1 \psi_6 \rangle_0 \langle [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_0 + 4 \langle \bar{\psi}_3 \psi_6 \rangle_1 \langle \psi_4 \bar{\psi}_5 \rangle_0 \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_0 \\ & + 4 \langle \psi_4 \bar{\psi}_5 \rangle_1 \langle \bar{\psi}_3 \psi_6 \rangle_0 \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_0 + 4 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_1 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_0 \langle [\bar{\psi}_5, \psi_6] \rangle_0 \\ & + 4 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_1 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_0 \langle [\bar{\psi}_5, \psi_6] \rangle_0 + 4 \langle [\bar{\psi}_1, \psi_2] \rangle_1 \langle \bar{\psi}_3 \psi_6 \rangle_0 \langle \psi_4 \bar{\psi}_5 \rangle_0 \\ & + 4 \langle [\bar{\psi}_3, \psi_4] \rangle_1 \langle \bar{\psi}_1 \psi_6 \rangle_0 \langle \psi_2 \bar{\psi}_5 \rangle_0 + 4 \langle [\bar{\psi}_5, \psi_6] \rangle_1 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_0 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_0 \\ & + 8 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_1 \langle \psi_4 \bar{\psi}_5 \rangle_0 \langle \bar{\psi}_1 \psi_6 \rangle_0 - 8 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_1 \langle \bar{\psi}_3 \psi_6 \rangle_0 \langle \psi_2 \bar{\psi}_5 \rangle_0 \\ & - 8 \langle \psi_2 \bar{\psi}_5 \rangle_1 \langle \bar{\psi}_3 \psi_6 \rangle_0 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_0 - 8 \langle \bar{\psi}_3 \psi_6 \rangle_1 \langle \psi_2 \bar{\psi}_5 \rangle_0 \langle \bar{\psi}_1 \psi_4 \rangle_0 \\ & + 8 \langle \psi_4 \bar{\psi}_5 \rangle_1 \langle \bar{\psi}_1 \psi_6 \rangle_0 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_0 + 8 \langle \bar{\psi}_1 \psi_6 \rangle_1 \langle \psi_4 \bar{\psi}_5 \rangle_0 \langle \psi_2 \bar{\psi}_3 \rangle_0 \end{aligned} \quad (18)$$

II. Matrixelemente von $\langle H^{tr} P (H^{tr} P H^{tr})_{nd} \rangle_{1 \text{ El.}}^{1 \text{ Ph}}$

Die obigen Matrixelemente lassen sich mittels der Formel (4) und (18) und der Hilfsformeln (1), (5), (6), (11), (12) und (14) des Anhanges I ausdrücken. Die vier ersten Linien der Formel (18) geben keinen Beitrag, weil $\langle j \rangle_0$ in Abwesenheit eines Magnetfeldes Null ist. Die anderen Terme geben Matrixelemente der Form

$$\begin{aligned} & \frac{i e^3}{(2\pi)^{9/2}} \sum_{s,z} \int \frac{d\mathbf{r} d\mathbf{k}}{\sqrt{8 k_1 k_2 k_3}} \frac{\bar{\psi}_{z_1}(\mathbf{r}_1) (\gamma \mathbf{e}^{s_1}(\mathbf{k}_1)) e^{i \mathbf{k}_1 \mathbf{r}_1} \psi_{z'_1}(\mathbf{r}_1)}{\Delta E_1} \times \\ & \times \frac{\bar{\psi}_{z_2}(\mathbf{r}_2) (\gamma \mathbf{e}^{s_2}(\mathbf{k}_2)) e^{i \mathbf{k}_2 \mathbf{r}_2} \psi_{z'_2}(\mathbf{r}_2)}{\Delta E_2} \bar{\psi}_{z_3}(\mathbf{r}_3) (\gamma \mathbf{e}^{s_3}(\mathbf{k}_3)) e^{i \mathbf{k}_3 \mathbf{r}_3} \psi_{z'_3}(\mathbf{r}_3) \end{aligned} \quad (19)$$

(19) beschreibt einen Übergang von einem angeregten Zustand $|0\rangle$ (eines der drei $z'=0$), in einen Zustand, wo das Elektron im Grundzustand ist (eines der $z=G$) und ein Photon mit Impuls $\mathbf{k}$ existiert. (19) lässt sich durch die Indices $z_1 \dots z_3', s_1 s_2 s_3$ und die Impulse $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ charakterisieren. Die Matrixelemente vom Typ (19) sind unten in einer Tafel zusammengestellt. n, n' (bzw. ν, ν') sind Niveaus positiver (bzw. negativer) Energien. Die Indizes s sind weggelassen.

III. Entwicklung von $\delta(E-H-V)$ nach Potenzen von V .

Es sei $H = \alpha \mathbf{p} + \beta m$. Zuerst ist klar, dass

$$\begin{aligned} \xi(E-H-V) &= \xi(E-H) + \xi(E-H) V \xi(E-H) + \\ &+ \xi(E-H) V \xi(E-H) V \xi(E-H) + \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Dies erkennt man, indem man zum Beispiel die Darstellung $\xi(x) = 1/(x + i\sigma)$, $\sigma \rightarrow 0$, benutzt und nach V entwickelt.

	$z_1 \mathbf{k}_1 z_1'$	$z_2 \mathbf{k}_2 z_2'$	$z_3 \mathbf{k}_3 z_3'$	ΔE_1	ΔE_2
1 $\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \mathbf{k}' \\ G \mathbf{k}' 0 \\ -\mathbf{k} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\mathbf{k}' \\ v -\mathbf{k} n \\ \mathbf{k}' \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} -\mathbf{k} \\ n -\mathbf{k}' v \\ -\mathbf{k}' \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} E_n - E_v + k \\ E_n - E_v + k' \\ \text{,,} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} k + k' \\ \text{,,} \\ 0^*) \end{Bmatrix}$
2 $\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \uparrow \\ v \\ \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \uparrow \\ n \\ \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \uparrow \\ G \\ \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} E_n - E_v + k \\ E_n - E_v + k' \\ \text{,,} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} E_G - E_0 + k' + E_n - E_v + k \\ \text{,,} \\ E_G - E_0 + E_n - E_v \end{Bmatrix}$
3 $\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \uparrow \\ v \\ \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} n \\ n \\ \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} v \\ G \\ o \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} E_G - E_0 + k \\ E_G - E_0 + k' \\ \text{,,} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} E_G - E_0 + k' + E_n - E_v + k \\ \text{,,} \\ E_G - E_0 + E_n - E_v \end{Bmatrix}$
4 $\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \uparrow \\ v \\ \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ G \\ \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} n \\ n \\ v \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} E_v - E_n - k \\ E_v - E_n - k' \\ \text{,,} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} E_G - E_v + k + k' \\ \text{,,} \\ E_G - E_v \end{Bmatrix}$
5 $\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \uparrow \\ G \\ \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} n \\ v \\ \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ n \\ v \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} E_v - E_n - k \\ E_v - E_n - k' \\ \text{,,} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} E_n - E_0 + k + k' \\ \text{,,} \\ E_n - E_0^*) \end{Bmatrix}$
6 $\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \text{wie 1) } a, b, c \\ v' \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \text{wie 1) } a, b, c \\ v \\ v' \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \text{wie 1) } a, b, c \\ G \\ v \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} E_G - E_v + k \\ E_G - E_v + k' \\ \text{,,} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} E_G - E_v' + k + k' \\ \text{,,} \\ E_G - E_v' \end{Bmatrix}$
7 $\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \uparrow \\ v \\ \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} n \\ G \\ v \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} v \\ n \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} E_0 - E_n - k \\ E_0 - E_n - k' \\ \text{,,} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} E_G - E_v + k' + E_n - E_0 + k \\ \text{,,} \\ E_G - E_v + E_n - E_0 \end{Bmatrix}$
8 $\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \uparrow \\ v \\ \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} n \\ n \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} G \\ v \\ \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} E_v - E_G - k \\ E_v - E_G - k' \\ \text{,,} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} E_n - E_0 + k' + E_G - E_v + k \\ \text{,,} \\ E_n - E_0 + E_G - E_v \end{Bmatrix}$
9 $\begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} \downarrow \\ G \\ \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} n \\ n \\ n' \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} n' \\ n' \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} E_{n'} - E_0 + k \\ E_{n'} - E_0 + k' \\ \text{,,} \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} E_n - E_0 + k + k' \\ \text{,,} \\ E_n - E_0^*) \end{Bmatrix}$

*) 1 c muss ausgeschlossen werden, da $H^{tr} P H^{tr}$ nicht diagonal sein darf; ebenso die Fälle $n=0$ in 5 c und 9 c.

Die rechte Seite, mit $E - H - V$ multipliziert, gibt in der Tat 1. $\delta(E - H - V)$ ist der imaginäre Teil von $-\xi/\pi$, also

$$\begin{aligned} \delta(E - H - V) &= \frac{i}{2\pi} [\xi(E - H - V) - \xi^*(E - H - V)] = \\ &= \delta(E - H) + \frac{P}{E - H} V \delta(E - H) + \delta(E - H) V \frac{P}{E - H} + \dots \end{aligned}$$

Man kann auch die „Vorzeichen Funktion“ $\varepsilon(H + V)$ ($\varepsilon(E) = \pm 1$, wenn $E \gtrless 0$) nach Potenzen von V entwickeln:

$$\begin{aligned} \varepsilon(H + V) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dE \varepsilon(E) \delta(E - H - V) = \\ &= \varepsilon(H) + \int_{-\infty}^{+\infty} dE \varepsilon(E) \left[\frac{P}{E - H} V \delta(E - H) + \delta(E - H) V \frac{P}{E - H} \right] + \dots \end{aligned}$$