Covariance relativiste à la base de la mécanique quantique

par O. COSTA DE BEAUREGARD (Paris)

1. Particule libre de spin non spécifié

Avec MARCEL RIESZ [1] on considère les solutions de l'équation de GORDON ($\lambda, \mu, \nu, \varrho = 1, 2, 3, 4$; $x_4 = i\,c\,t$)

$$(\partial_\lambda^\lambda - k_0^2)\,\psi(x) = 0, \tag{1}$$

et l'on montre que, $\eta(k) = 0$ désignant l'hyperboloïde

$$k_\lambda k^\lambda + k_0^2 = 0, \tag{2}$$

$d\eta_\lambda$ son quadrivecteur élément de volume (colinéaire à k_λ) et $d\eta$ le module de celui-ci, tel que

$$k_\lambda\, d\eta = -k_0\, d\eta_\lambda\,, \tag{3}$$

$\varepsilon(k)$ une fonction valant respectivement ± 1 sur les nappes des fréquences positives et négatives (pour abréger, l'on se limite aux transformations de LORENTZ orthochrones), la décomposition de FOURIER du $\psi(x)$ peut s'écrire

$$\psi(x) = (2\,\pi)^{-3/2} \iiint\limits_\eta e^{i k_\lambda x^\lambda}\, \zeta(k)\, \varepsilon(k)\, d\eta\,. \tag{4}$$

Soit alors $\sigma(x) = 0$ une hypersurface quelconque du genre espace, $d\sigma_\lambda$ son quadrivecteur élément de volume, et

$$[\partial^\lambda] \equiv \underset{\rightarrow}{\partial^\lambda} - \underset{\leftarrow}{\partial^\lambda} \tag{5}$$

l'opérateur du courant de GORDON: on montre que l'intégrale

$$\zeta(k) = -\frac{i}{2\,k_0}\,(2\,\pi)^{-3/2} \iiint\limits_\sigma e^{-i k_\lambda x^\lambda}\, [\partial^\mu]\, \psi(x)\, d\sigma_\mu \tag{6}$$

est indépendante de σ, et qu'elle est la réciproque au sens de FOURIER de (4).

ψ^* et ζ^* désignant les conjugués de ψ et ζ, et p et q numérotant deux solutions différentes de l'équation de GORDON, l'égalité de PARSEVAL covariante (au premier membre indépendant de σ) s'écrit

$$-\frac{i}{2\,k_0}\iiint\limits_{\sigma}\psi_p^*\,[\partial^\lambda]\,\psi_q\,d\sigma_\lambda = \iiint\limits_{\eta}\zeta_p^*\,\zeta_q\,\varepsilon(k)\,d\eta\,. \tag{7}$$

Définitions covariantes du produit scalaire hermitien de deux ψ ou ζ (fonctions de 4 variables liées par (1)):

$$\langle\psi_p\,|\,\psi_q\rangle_\sigma = \langle\psi_q\,|\,\psi_p\rangle_\sigma^* = -\frac{i}{2\,k_0}\iiint\limits_{\sigma}\psi_p^*\,[\partial^\lambda]\,\psi_q\,d\sigma_\lambda\,, \tag{8}$$

$$\langle\zeta_p\,|\,\zeta_q\rangle_\eta = \langle\zeta_q\,|\,\zeta_p\rangle_\eta^* = \iiint\limits_{\eta}\zeta_p^*\,\xi_q\,\varepsilon(k)\,d\eta\,. \tag{9}$$

Posons encore

$$e(kx) = e^*(-\,kx) = \begin{cases}(2\pi)^{-3/2}\,e^{ik_\lambda x^\lambda} & si\ k_\lambda\,k^\lambda + k_0^2 = 0\,,\\ \quad 0 & si\quad ,, \quad \neq 0\,.\end{cases} \tag{10}$$

(4), (6), (7) se récrivent

$$\psi(x) = \langle e(-\,kx)\,|\,\zeta(k)\rangle_\eta\,, \tag{11}$$

$$\zeta(k) = \langle e(kx)\,|\,\psi(x)\rangle_\sigma\,, \tag{12}$$

$$\langle\psi_p\,|\,\psi_q\rangle_\sigma = \langle\zeta_p\,|\,\zeta_q\rangle_\eta\,. \tag{13}$$

La norme (nombre d'occupation) d'un ψ ou ζ, l'orthogonalité de deux ψ ou ζ, se définissent comme d'habitude à partir de (13).

Introduisons le propagateur de JORDAN-PAULI

$$D\,(x - x') = (2\pi)^{-3}\iiint\limits_{\eta} e^{ik_\lambda (x-x')^\lambda}\,\varepsilon(k)\,d\eta\,; \tag{14}$$

on a

$$D\,(x'' - x') = \langle e(-\,kx')\,|\,e(-\,kx'')\rangle_\eta = \langle D\,(x - x')\,|\,D\,(x - x'')\rangle_\sigma\,, \tag{15}$$

ce qui montre en particulier que deux fonctions de x, $D(x-x')$ et $D(x-x'')$, sont orthogonales si $x'' - x'$ est du genre espace. Substituant (6) dans (4) il vient la formule de SCHWINGER résolvant le problème de CAUCHY

$$\psi(x) = \langle D\,(x' - x)\,|\,\psi(x')\rangle_{\sigma'}\,. \tag{16}$$

Formules analogues dans le 4-espace k:

$$D(k', k'') = \langle e(k' x) \mid e(k'' x)\rangle_\sigma = \langle D(k, k') \mid D(k, k'')\rangle_\eta , \tag{17}$$

$$\zeta(k) = \langle D(k, k') \mid \zeta(k')\rangle_\eta . \tag{18}$$

(4) et (18) donnent le développement d'une solution de (1) sur les ondes planes; les coefficients sont donnés par (6) et la réciproque de (18); la fonction de distribution correspondante est le second membre de (13) avec $p = q$. (6) et (16) donnent le développement d'une solution de (1) sur les ondes $D(x - x')$ attachées à une σ'; les coefficients sont donnés par (4) et la réciproque de (16); la fonction de distribution correspondante est le premier membre de (13) avec $p = q$ et $\sigma = \sigma'$. Les ondes $D(x - x')$ sont complémentaires au sens de BOHR des ondes planes; elles expriment une localisation exacte du corpuscule traversant l'hypersurface σ', toutes ses localisations passées et futures étant contenues dans le cône isotrope de sommet x'.

L'ensemble de ces formules se situe dans le prolongement direct de la célèbre chèse de 1924 de M. L. DE BROGLIE. Elles représentent l'essentiel de la «mécanique ondulatoire».

2. Particule libre à spin

Les équations d'onde sont de la forme ($\bar{\psi} = \psi^+ \beta$)

$$(a_\lambda \underset{\rightarrow}{\partial^\lambda} + k_0)\, \psi(x) = 0 , \qquad \bar{\psi}(x)\, (a_\lambda \underset{\leftarrow}{\partial^\lambda} - k_0) = 0 , \tag{19}$$

ou

$$(a_\lambda k^\lambda - i\, k_0)\, \zeta(k) = 0 , \qquad \bar{\zeta}(k)\, (a_\lambda k^\lambda - i\, k_0) = 0 ; \tag{20}$$

quelle que soit l'algèbre des a_λ, elles entrainent (1) et (2). On montre que (8), (9), (7) se récrivent

$$\langle \psi_p \mid \psi_q \rangle_\sigma = \langle \psi_q \mid \psi_p \rangle^*_\sigma = i \iiint_\sigma \bar{\psi}_p\, a^\lambda\, \psi_q\, d\sigma_\lambda , \tag{21}$$

$$\langle \zeta_p \mid \zeta_q \rangle_\eta = \langle \zeta_q \mid \zeta_p \rangle^*_\eta = i \iiint_\eta \bar{\zeta}_p\, a^\lambda\, \zeta_q\, \varepsilon(k)\, d\eta_\lambda , \tag{22}$$

$$i \iiint_\sigma \bar{\psi}_p\, a^\lambda\, \psi_q\, d\sigma_\lambda = i \iiint_\eta \bar{\zeta}_p\, a^\lambda\, \zeta_q\, \varepsilon(k)\, d\eta_\lambda . \tag{23}$$

Symboliquement (car $e(kx)$ n'est pas solution de (20)) l'on a

$$\psi(x) = \langle\langle\, e(-k\,x) \mid \zeta(k)\,\rangle\rangle_\eta, \tag{24}$$

la formule réciproque étant

$$\zeta(k) = -\frac{(2\,\pi)^{-3/2}}{2\,k_0} \iiint\limits_\sigma e^{-i k_\lambda x^\lambda} \left(k^\mu - [a^\mu a^\nu - a^\nu a^\mu]\, k_\nu + i\, k_0\, a^\mu\right) \psi(x)\, \mathrm{d}\sigma_\mu; \tag{25}$$

dans le cas de l'électron de DIRAC, ceci se simplifie sous la forme (implicitement) donnée par SCHWINGER

$$\zeta_{(1/2)}(k) = \left\langle \frac{i}{2\,k_0} (\gamma_\mu\, \partial^\mu - k_0)\, e(kx) \,\middle|\, \psi_{(1/2)}(x) \right\rangle_\sigma. \tag{26}$$

De (24), et (25) ou (26), on déduit une formule résolvant le problème de CAUCHY.

3. Particule plongée dans un champ

Ici, les intégrales de FOURIER réciproques, l'égalité de PARSEVAL etc...., sont nécessairement des intégrales quadruples (bien que la norme physique reste une intégrale triple: l'hyperflux du courant de présence). Par exemple, le ψ d'une particule liée à un champ indépendant du temps prend la forme

$$\psi(x) = (2\pi)^{-2} \iiiint e^{i k_\lambda x^\lambda}\, \zeta(k)\, d^4 k \tag{27}$$

dès qu'on exprime les fonctions propres de l'hamiltonien dans l'espace des $\vec{k}$ [3].

Bibliographie

[1] RIESZ, M., *Actes du 10ème Congrès des mathématiciens scandinaves*, Copenhague (1946), p. 123–148.

[2] SCHWINGER, J., *Physical Review 74* (1948), p. 1439–1461 et *75* (1949), p. 677–679.

[3] LEVY, M., *Proc. Roy. Soc. 204* [A] (1950), p. 149.

[4] COSTA DE BEAUREGARD, O., *Journal de Physique 15* (1954), p. 810–816, *16* (1955) p. 770–780 et 17 (sous presse, 1956). – *Comptes Rendus 239* (1954) p. 1357.