Axiomatique quantique

Autor(en): **Piron, C.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **37 (1964)**

Heft IV-V

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-113494

Axiomatique Quantique

par **C. Piron*)**
Universités de Genève et Lausanne

(26 II 64)

Abstract. We develop here an axiomatic scheme for studying the structure of the set of observables corresponding to yes-no experiments. The usual formalism of Quantum theory as Hilbert-space theory as well as the phase-space formulation of classical mechanics appear now as particular cases of our scheme. The mathematical structure proposed here is that of a weakly semi-modular orthocomplemented atomic lattice.

1. Introduction

En théorie quantique, une observable est représentée par un opérateur linéaire (en général auto-adjoint) agissant dans un espace d'HILBERT. Mais on sait d'autre part que l'existence de règles de supersélection implique l'existence d'opérateurs linéaires auto-adjoints qui ne correspondent à aucune observable. Dans ce travail nous caractériserons intrinsèquement la structure de l'ensemble des observables d'un système physique. Nous pourrons alors justifier l'emploi de l'espace d'HILBERT et des opérateurs linéaires avec les particularités rattachées aux règles de supersélection. Nous suivrons une méthode axiomatique dont le point de départ est dû à G. BIRKHOFF et J. VON NEUMANN[1]). Mais ce ne sont pas les différences «logiques» entre la théorie classique et la théorie quantique qui nous préoccupent, notre but étant de développer un formalisme général valable dans les deux cas. C'est pourquoi, après avoir introduit les grandeurs qui nous intéressent et discuté leur rapport avec la logique, nous examinerons en détail le cas classique et le cas quantique habituel (entre autres le cas de l'oscillateur). C'est ainsi que nous serons conduits à formuler nos axiomes. Pour terminer, nous définirons la notion d'état physique comme «probabilité généralisée» selon une idée due à MACKEY[2]), ce qui nous permettra d'interpréter certaines difficultés de la théorie habituelle (par exemple les divergences qui apparaissent lors de l'existence de règles de supersélection continues). Nous renverrons à un appendice les démonstrations mathématiques pour ne pas rompre l'enchaînement des raisonnements physiques.

2. La «logique» des propositions

Etant donné une famille de systèmes physiques, considérons parmi toutes les mesures possibles celles pour lesquelles la mesure du système se traduit par oui ou non. Nous appellerons propositions les observables correspondantes et nous les noterons

*) Ce travail fait l'objet d'une thèse présentée à l'Université de Lausanne.

par des lettres $a, b, c, \ldots, P, Q, R, \ldots$ Comme, en fait, toute mesure peut être remplacée par une suite de mesures du type oui-non, l'étude des observables se ramène à l'étude de la structure de l'ensemble des propositions. Nous dirons qu'une proposition est vraie pour un système donné (c'est-à-dire préparé d'une manière déterminée), si la réponse oui est certaine. Pour que cette définition aît un sens aussi bien «avant» que «après» la mesure (et même en l'absence de mesure), il doit être possible si a est vraie de mesurer a sans perturber le système. C'est ce que nous admettrons.

Si a et b sont deux propositions, il peut se présenter le cas suivant:

«b est vraie chaque fois que a est vraie».

Nous noterons cette relation: $a \leqslant b$ et $a = b$ signifiera $a \leqslant b$ et $b \leqslant a$.

Nous allons dès à présent postuler un certain nombre d'axiomes. La signification logique et physique que nous en donnerons rend très plausible leur validité.

Axiome O: La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre, c'est-à-dire:

$$O_1 \quad a \leqslant a \ \forall a\,, \qquad O_2 \quad a \leqslant b \quad \text{et} \quad b \leqslant c \quad \Rightarrow \quad a \leqslant c\,.$$

Il est clair que O_1 et O_2 découlent logiquement des définitions. En appliquant deux fois O_2, on déduit:

$$a = b \quad \text{et} \quad b = c\,, \quad \Rightarrow \quad a = c\,,$$

ce qui montre que l'égalité que nous avons définie est bien une relation d'équivalence et nous conduit à identifier les propositions «égales». Ainsi à une proposition correspond toute une classe d'instruments de mesures du type oui-non.

Axiome T: Il existe un plus grand minorant (une borne inférieure) pour toute famille non nulle de propositions. En d'autres termes, étant donné des $a_i \; i \in J$, il existe une proposition notée $\bigcap_J a_i$ telle que:

$$T_1 \quad x \leqslant a_i \ \forall i \in J \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant \bigcap_J a_i\,.$$

Cet axiome exprime le «et» de la logique. En effet, la mesure de tous les a_i considérée comme une seule mesure, avec la réponse oui si toutes les réponses sont oui et la réponse non dans tous les autres cas, définit un élément de la classe correspondant à la proposition $\bigcap_J a_i$. On vérifie immédiatement que T_1 est satisfait et que si $\bigcap_J a_i$ est vraie, cette mesure ne perturbe pas le système. L'axiome T implique l'existence d'une proposition ϕ telle que:

$$\phi \leqslant a \ \forall a\,.$$

C'est la proposition absurde qui ne peut être vraie sans que toutes les propositions soient vraies, ce qui de fait est impossible.

Axiome C: Il est donné une orthocomplémentation, c'est-à-dire qu'à chaque proposition a correspond une proposition notée a' de manière que:

$$C_1 \quad (a')' \leqslant a \ \forall a\,, \qquad C_2 \quad a' \cap a \leqslant \phi \ \forall a\,, \qquad C_3 \quad a' \leqslant b' \ \Rightarrow \ b \leqslant a\,.$$

C'est donc une involution; car C_1 appliqué à a' s'écrit:

$$((a')')' \leqslant a'\,,$$

d'où en vertu de C_3

$$a \leqslant (a')'\,.$$

Nous pouvons alors écrire les axiomes C_i d'une manière plus symétrique mais équivalente:

$$(a')' = a \,, \quad a' \cap a = \phi \,, \quad a' \leqslant b' \iff b \leqslant a \,.$$

Physiquement cette correspondance s'obtient en échangeant le rôle du oui et du non dans l'emploi de l'appareil de mesure. Ceci n'a de sens que pour un appareil qui lors d'une mesure, ne perturbe pas le système si l'une des réponses oui ou non est certaine. Obtenue ainsi, cette correspondance est bien une involution, ce qui justifie l'axiome C_1.

C_2 exprime en logique le tiers exclu; ici il signifie que «l'aiguille» de l'instrument de mesure ne peut occuper simultanément les deux positions possibles.

Enfin C_3 est connu en logique sous le nom de loi de MORGAN. Sa justification physique résulte de l'idée intuitive que $a \leqslant b$ signifie «probabilité de la réponse oui pour la mesure de a plus petite que probabilité de la réponse oui pour la mesure de b».

Les trois séries d'axiomes O, T et C définissent sur l'ensemble des propositions une structure de treillis complet orthocomplémenté, car pour toute famille de propositions, il existe non seulement une borne inférieure, mais aussi une borne supérieure. En effet, posons:

$$\bigcup_J a_i = \Big(\bigcap_J a_i'\Big)' \,.$$

C'est la borne supérieure de la famille des a_i car:

$$a_i \leqslant x \; \forall i \in J \iff x' \leqslant a_i' \; \forall i \in J$$

$$\iff x' \leqslant \bigcap_J a_i' \iff \bigcup_J a_i \leqslant x \,.$$

On appelle complément de x une proposition y telle que:

$$x \cap y = \phi \quad \text{et} \quad x \cup y = I \,,$$

où I est la proposition maximale: $a \leqslant I \; \forall a$. I est vraie dès qu'une seule proposition est vraie. Intuitivement, I vraie signifie: le système existe. On dit qu'un treillis est complémenté si pour tout élément il existe au moins un complément. Ainsi un treillis orthocomplémenté est toujours complémenté car a' est un complément de a.

Certains auteurs ont voulu voir dans les axiomes précédents les règles d'une nouvelle logique. En fait, ces axiomes ne sont que des règles de calcul et la logique habituelle s'applique sans avoir besoin d'être modifiée. Nous en donnerons comme preuve les deux remarques suivantes:

1. $a \leqslant b$ est bien le correspondant de la relation d'induction logique $A \Rightarrow B$, mais $a \leqslant b$ ne peut être considérée comme une proposition (ce n'est pas une mesure du type oui-non); on ne peut donc pas donner un sens à l'expression $a \leqslant (b \leqslant c)$ qui serait l'analogue de la relation $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ pourtant bien définie en logique.

2. Si dans un cas bien déterminé a n'est pas vraie, c'est-à-dire si la réponse oui n'est pas certaine, on ne peut rien en déduire sur a', la réponse non pouvant être certaine ou incertaine. Cette possibilité ne contredit pas le principe du tiers exclu (et n'impose donc pas une logique à trois valeurs)[13]). On trouve un cas analogue en mathématiques, et c'est là notre remarque. Si à un stade déterminé du développement d'une théorie, la relation A n'est pas un théorème (c'est-à-dire si la démonstration de A n'a pas été faite et si le mathématicien avoue ne pas la connaître), cela n'implique rien

sur la relation non-A qui peut bien être déjà démontrée, mais qui ne le sera peut-être jamais[3]).

Nous interrompons cet exposé des «règles» du calcul des propositions pour considérer le cas classique et le cas quantique habituel, comme nous l'avons annoncé dans l'introduction.

3. L'espace de phase et le treillis des propositions d'un système classique

En physique classique et plus particulièrement en mécanique, on représente l'état d'un système, à un instant donné, par un point d'un certain espace: l'espace de phase. Une mesure est alors définie comme une fonction sur cet espace; à chaque état, c'est-à-dire à chaque point de l'espace de phase correspond le résultat de la mesure, c'est-à-dire la valeur de la fonction. Il s'en suit que les propositions sont les fonctions à deux valeurs 1 ou 0 (oui ou non). Une telle fonction est entièrement caractérisée par son support, c'est-à-dire par l'ensemble des points qui prennent la valeur 1. Il y a donc correspondance biunivoque entre les propositions et les sous-espaces de l'espace de phase. La relation d'ordre que nous avons introduite au paragraphe précédent se traduit ici par la relation d'inclusion de la théorie des ensembles; en effet, dire que $a \leqslant b$ c'est dire que les fonctions correspondantes f_a et f_b sont telles que:

f_b est égale à 1 chaque fois que f_a égale 1, ce qui signifie que le support de f_a est contenu dans le support de f_b.

Les trois axiomes précédents sont des conséquences de la théorie des ensembles. Ainsi la borne inférieure correspond à l'intersection et l'orthocomplément au sous-ensemble complémentaire. Notons aussi les relations algébriques qui relient les fonctions correspondantes:

$$a \leqslant b \iff f_a \leqslant f_b\,, \quad f_{a \cap b} = f_a f_b\,, \quad f_{a'} = 1 - f_a\,.$$

Le treillis des propositions d'un système classique (c'est-à-dire le treillis des sous-ensembles d'un ensemble) possède d'autres propriétés caractéristiques.

C'est un treillis distributif:

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c) \qquad \forall a, b, c\,.$$

Cette relation entraîne sa duale:

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) \qquad \forall a, b, c\,,$$

ce qui pour nous est immédiat en appliquant l'axiome C, mais qu'on peut aussi démontrer directement.

Enfin, c'est un treillis atomique:

Pour tout a il existe un «atome» P tel que:

$$P \leqslant a\,,$$

et on appelle atome ou point un élément P d'un treillis qui est différent de ϕ et tel que:

$$\phi \leqslant x \leqslant P \Rightarrow x = \phi \quad \text{ou} \quad x = P\,.$$

Ce sont ici les points de l'espace de phase.

G. Birkhoff et J. von Neumann ont critiqué le point de vue (exposé ici) que tout sous-ensemble de l'espace de phase correspond à une proposition. Il leur paraît (nous traduisons) artificiel de considérer comme proposition une affirmation telle que: La vitesse angulaire de la terre autour du soleil est un nombre rationnel (en radian par seconde), et il leur semble mieux, au moins en statistique, de considérer que ce sont les classes de sous-ensembles mesurables modulo un sous-ensemble de mesure nulle, qui correspondent aux propositions. De telles considérations les conduisent à abandonner l'axiome d'atomicité. Ainsi dans l'idée de ces auteurs, une mesure comportant toujours une certaine incertitude, seules les propositions qui peuvent être définies dans le cadre d'une théorie statistique sont physiquement valables. Mais si, sans nous restreindre à une théorie particulière, nous considérons toutes les propositions d'un système classique, il nous faut admettre l'existence d'atomes, c'est-à-dire de mesures précises des grandeurs telles que la position ou la quantité de mouvement, bien que cette existence ne soit pas définie en acte mais en puissance (non in actu sed in potentia). C'est du moins ce que suggère le fait qu'il est toujours possible pratiquement d'améliorer le résultat d'une mesure.

Un treillis abstrait satisfaisant aux axiomes O.T.C., aux propriétés de distributivité et d'atomicité est appelé un treillis de Boole complet (continu selon J. von Neumann) et atomique. Or un tel treillis peut toujours être considéré comme le treillis des sous-ensembles de l'ensemble de ses atomes. On a ainsi une caractérisation du treillis des propositions d'un système classique.

4. Le cas quantique habituel: position du problème, exemple de l'oscillateur linéaire

En théorie quantique les observables sont représentées par des opérateurs linéaires. C'est pourquoi les propositions correspondent aux projecteurs, opérateurs auto-adjoints à deux valeurs propres 0 et 1, satisfaisant aux relations:

$$P_a = P_a^\dagger = P_a^2 .$$

Un projecteur peut encore être défini par l'ensemble de ses vecteurs propres de valeur propre 1. Un tel ensemble est toujours un sous-espace vectoriel fermé et chaque sous-espace vectoriel fermé définit un et un seul projecteur. Si a est une proposition, nous noterons P_a le projecteur et V_a le sous-espace correspondant.

La relation $a \leqslant b$ signifiant «a vraie entraîne b vraie» est équivalente à l'inclusion:

$$V_a \subset V_b .$$

Elle se traduit donc en termes de projecteurs par l'une des deux relations équivalentes:

$$P_a P_b = P_a , \quad P_b P_a = P_a ,$$

formellement identiques au cas classique.

La borne inférieure d'une famille de P_{a_i} existe toujours, c'est le projecteur correspondant au sous-espace vectoriel fermé intersection des V_{a_i}.

Enfin si $P_{a'} = I - P_a$ l'axiome C est immédiat. Vérifions par exemple C_3:

$$a' \leqslant b' \Rightarrow (I - P_a)(I - P_b) = I - P_a ,$$

d'où en développant:

$$I - P_a - P_b + P_a P_b = I - P_a ,$$

c'est-à-dire:

$$P_a P_b = P_b .$$

Contrairement au cas classique, un tel treillis n'est pas distributif. Mais si nous nous bornons au cas particulier d'un espace d'HILBERT de dimension finie, le treillis de ses sous-espaces vectoriels (fermés) est modulaire, c'est-à-dire que:

$$x \leqslant z \Rightarrow x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z .$$

Démonstration: Dans un treillis quelconque, on a toujours:

$$x \cup (y \cap z) \leqslant (x \cup y) \cap z \quad \text{pour} \quad x \leqslant z .$$

Il nous suffit donc de montrer que tout vecteur de $V_{(x \cup y) \cap z}$ est contenu dans $V_{x \cup (y \cap z)}$. Si $\boldsymbol{a} \in V_{(x \cup y) \cap z}$ alors $\boldsymbol{a} \in V_z$ et $\boldsymbol{a} \in V_{x \cup y}$. Mais tout vecteur de $V_{x \cup y}$ est somme d'un vecteur de V_x et d'un vecteur de V_y car $V_{x \cup y}$ est de dimension finie. On peut donc écrire $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ où $\boldsymbol{b} \in V_x$ et $\boldsymbol{c} \in V_y$. Or par hypothèse $V_x \subset V_z$ donc $\boldsymbol{b} \in V_z$ et il en résulte que $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$ appartient aussi à V_z. Ainsi $\boldsymbol{c} \in V_{y \cap z}$ et $\boldsymbol{a}$ est bien somme d'un vecteur de V_x et d'un vecteur de $V_{y \cap z}$. (C. q. f. d.)

Cette démonstration permet d'imaginer un contre-exemple dans le cas de dimension infinie. En effet le sous-espace engendré par les vecteurs de V_x et V_y n'étant pas nécessairement fermé si V_x et V_y sont tous deux de dimension infinie, il faudra le compléter par des vecteurs limites pour obtenir $V_{x \cup y}$. Soit $\boldsymbol{d}$ un tel vecteur limite et supposons V_x et V_y disjoints. Posons V_z égal au sous-espace (automatiquement fermé) engendré par les vecteurs de V_x et ce vecteur $\boldsymbol{d}$. Dans ces conditions $V_{y \cap z}$ est nul, $x \cup (y \cap z) = x$, mais $(x \cup y) \cap z = z$, d'où le contre-exemple.

En résumé, le treillis des propositions d'un système quantique de type fini, c'est-à-dire d'un système quantique dont l'espace d'HILBERT correspondant est de dimension finie, est un treillis complet orthocomplémenté et modulaire. De plus, il est certainement atomique bien que chaque projecteur ne corresponde pas nécessairement à une proposition.

Ces propriétés caractérisent de tels systèmes, mais pour énoncer ce résultat, nous avons besoin de quelques définitions. Soit $\{\tau_i\}$ une famille de treillis, on appelle produit direct des τ_i le treillis τ dont les éléments sont les familles $\{x_i\}$ (où $x_i \in \tau_i$) et la relation d'ordre, la relation définie par:

$$\{x_i\} \leqslant \{y_i\} \iff x_i \leqslant y_i \quad \forall i .$$

Si chaque τ_i possède un plus petit élément ϕ_i il existe pour chaque τ_i un plongement dans τ:

$$x_i \rightarrow \{y_j\} \quad \text{avec} \quad y_j = \begin{cases} \phi_j & \text{si} \quad j \neq i \\ x_i & \text{si} \quad j = i , \end{cases}$$

ce qui permet de définir τ comme l'union directe des sous-treillis τ_i. Ainsi, par exemple, le treillis des propositions d'un système classique est un treillis de BOOLE complet et atomique qui n'est autre que l'union directe de treillis contenant chacun deux éléments. Enfin on dit que τ est irréductible s'il n'est d'aucune manière l'union directe de deux sous-treillis contenant chacun plus d'un élément.

Notre résultat s'énonce alors ainsi: Tout treillis complet orthocomplémenté, modulaire et atomique est l'union directe de sous-treillis irréductibles qui sont des géométries projectives de dimension finie (Théorème V de l'appendice). Or toute géométrie projective irréductible, à l'exception de la droite et du plan non-arguésien, peut être représentée par les sous-espaces d'un espace vectoriel. Dans ce cas, le sous-espace correspondant à l'orthocomplément est défini à l'aide d'une relation d'orthogonalité donnée par une forme hermitienne définie (voir théorème XXI de l'appendice). On remarquera que les géométries projectives sous-treillis de l'union directe s'identifient aux sous-espaces cohérents définis par les règles de supersélection et qu'ainsi le cas classique apparaît comme cas particulier où les sous-espaces cohérents sont tous de dimension un. Nous avons ainsi complètement caractérisé le treillis des propositions d'un système quantique du type fini.

Pour retrouver les cas de type infini, on pourrait à priori envisager trois sortes de généralisations:

1. Les treillis complets, modulaires atomiques mais non orthocomplémentables dont un exemple est le treillis des sous-espaces vectoriels (fermés ou non fermés) d'un espace vectoriel de dimension infinie.

2. Les treillis complets, modulaires orthocomplémentés mais non atomiques dont un exemple est le treillis des projecteurs d'un facteur II.

3. Les treillis complets, orthocomplémentés, atomiques mais non modulaires, dont un exemple est le treillis des sous-espaces vectoriels fermés d'un espace d'HILBERT infini.

Le premier cas n'a jamais été considéré sérieusement car l'interprétation physique de l'orthocomplémentation paraît bien fondée. En proposant l'exemple des géométries continues, J. VON NEUMANN envisage le deuxieme cas. (Il n'y a d'ailleurs pas d'autre exemple de ce cas comme le montre KAPLANSKY[4]).) On ne peut exclure à priori cette possibilité, car étant admis que tout projecteur n'est pas nécessairement une proposition, il se pourrait que le treillis des propositions soit modulaire. Mais alors tout sous-treillis serait lui aussi modulaire. Or, nous pouvons construire un exemple qui contredit cette conclusion. En effet, les projecteurs spectraux correspondant à des intervalles bornés du spectre des observables telles que la quantité de mouvement $\underline{p}$ ou la position $\underline{q}$ sont certainement des propositions admissibles, et il en est de même des projecteurs obtenus à partir de ceux-ci par intersection et orthocomplémentation. Mais nous démontrons dans l'appendice (1er paragraphe) qu'un treillis complet engendré par intersection et orthocomplémentation à partir de projecteurs correspondant à des intervalles bornés disjoints et recouvrant entièrement les spectres de $\underline{p}$ et $\underline{q}$ n'est jamais modulaire.

Ceci nous amène à envisager le troisième cas, car l'hypothèse d'atomicité ne se prête pas à un raisonnement analogue au précédent, les sous-treillis d'un treillis atomique n'étant pas nécessairement atomiques. On peut donc espérer satisfaire à cette condition en définissant de nouvelles propositions. Considérons par exemple le cas de l'oscillateur linéaire. En plus des propositions définies dans l'exemple précédent à partir des observables $\underline{p}$ et $\underline{q}$, nous disposons des projecteurs spectraux de l'énergie, l'atomicité ne fait plus de difficultés car le spectre de l'énergie est discret.

5. Notion de compatibilité et système de propositions généralisé

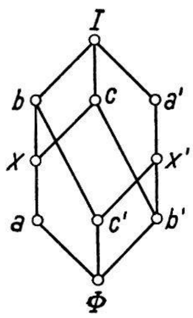
Reprenons l'exposé des règles du calcul des propositions, en introduisant une nouvelle notion, la compatibilité. Dans le formalisme quantique habituel, on dit que deux propositions sont compatibles si leurs projecteurs commutent, et on montre que cette relation exprime essentiellement la possibilité de mesurer avec précision chaque couple de leurs valeurs propres. Mais pour être plus précis, on devrait dire, deux propositions sont compatibles si tout état du système peut être considéré vis-à-vis de ces deux propositions comme un mélange d'états du type sans dispersion, c'est-à-dire pour lesquels la mesure de ces mêmes propositions donnerait un résultat certain. En d'autres termes, le système se comporte pour des mesures compatibles comme un système classique[8]). Nous sommes ainsi conduits à une troisième définition qui a l'avantage de ne pas faire appel à la notion d'état mais seulement à la notion de propositions. Nous dirons que deux propositions a et b sont compatibles si le sous-treillis engendré par intersection et orthocomplémentation est isomorphe à un treillis de Boole (contenant donc 2, 4, 8 ou 10 éléments). Dans un treillis orthocomplémenté, cette condition impose en général un grand nombre de relations. En particulier, si $a \leqslant b$, les relations:

$$a \cup (a' \cap b) = b \quad \text{et} \quad b \cap (b' \cup a) = a ,$$

sont les relations nécessaires et suffisantes pour que l'ensemble des huit propositions

$$\phi, \quad a, \quad a' \cap b, \quad b, \quad b', \quad a \cup b', \quad a', \quad I,$$

soit un sous-treillis, non seulement orthocomplémenté, mais aussi distributif. Une seule de ces relations n'est pas suffisante comme le montre l'exemple suivant:



$$a \cup (a' \cap b) = a \cup c' = b ,$$

mais

$$b \cap (b' \cup a) = b \cap c = x .$$

Nous pouvons maintenant énoncer un nouvel axiome:

Axiome P: Deux propositions a et b telles que $a \leqslant b$ sont toujours compatibles.

Nous appellerons, système de propositions généralisé, un ensemble de propositions satisfaisant aux axiomes O, T, C et P. Dans l'appendice (paragraphe 2) nous démontrons pour de tels systèmes, les propriétés suivantes:

1. a et b sont compatibles s'ils satisfont à la relation:

$$a \cup (a' \cap b) = b \cup (b' \cap a) ,$$

relation que nous noterons $a \leftrightarrow b$ et que nous lirons (par abus de langage) «a est compatible avec b».

2. Si a est compatible avec chacune des b_i, alors a est compatible avec $\bigcup_i b_i$ et $\cap b_i$ et on a (Théorèmes VIII et IX):

$$a \cap (\bigcup_i b_i) = \bigcup_i (a \cap b_i) , \quad a \cup (\bigcap_i b_i) = \bigcap_i (a \cup b_i) .$$

3. Un ensemble de propositions deux à deux compatibles engendre par intersection et orthocomplémentation un treillis de BOOLE (c'est une conséquence directe des propriétés précédentes).

4. $a \leftrightarrow b$ n'est pas la seule relation qui entraîne la compatibilité, il en existe beaucoup d'autres (Théorème VII). Parmi celles-ci, la relation:

$$(a \cap b) \cup (a' \cap b) \cup (a \cap b') \cup (a' \cap b') = I ,$$

est susceptible d'une interprétation physique simple. Etant donné deux propositions quelconques a et b, considérons la proposition:

$$x = (a \cap b) \cup (a' \cap b) \cup (a \cap b') \cup (a' \cap b') .$$

On voit facilement que x est compatible avec a et b et que $a \cap x$ et $b \cap x$ sont compatibles entre elles. Si donc, pour un système donné, x est vraie, mesurer a et b revient à mesurer $a \cap x$ et $b \cap x$ et l'une de ces mesures ne «perturbe» pas l'autre. Nous avons ainsi interprété x et du même coup la relation $x = I$. Ces quatre propriétés justifient, à priori, l'axiome P. Mais il existe une autre raison qui nous semble plus fondamentale. L'axiome P est en effet la condition nécessaire et suffisante pour que l'application:

$$x \rightarrow x_r = (a \cup x') \cap b ,$$

soit une orthocomplémentation relativement au sous-treillis des x telles que:

$$a \leqslant x \leqslant b .$$

Ainsi, dans un système de propositions généralisé, les notions d'orthocomplémentation et de compatibilité peuvent être définies en quelque sorte indépendamment du couple a, b jouant le rôle de ϕ et I (Théorèmes VI, XI et XII[9])).

6. Les systèmes de propositions et leurs représentations par les sous-espaces fermés d'espaces Hilbertiens

Les systèmes quantiques du type fini que nous avons définis au paragraphe 4 sont des systèmes de propositions généralisés, car dans un treillis orthocomplémenté la modularité entraîne l'axiome P. Mais la réciproque n'est pas vraie, même pour les systèmes ne contenant qu'un nombre fini de propositions (appendice figure 1). D'autre part un système généralisé de propositions toutes compatibles n'est pas toujours atomique et ne correspond donc pas nécessairement à un système classique du type de ceux décrits au paragraphe 3. C'est pourquoi nous imposerons encore un axiome; ce sera le dernier!

Axiome A

A_1 Pour toute proposition $a \neq \phi$ il existe un point P tel que:

$$P \leqslant a .$$

En d'autres termes, le système est atomique.

A_2 Si Q est un point alors

$$a \leqslant x \leqslant a \cup Q \Rightarrow x = a \quad \text{ou} \quad x = a \cup Q .$$

En d'autres termes si $a \cap Q = \phi$ alors $a \cup Q$ est un point pour a jouant le rôle de ϕ.

Nous appellerons simplement système de propositions, un système de propositions généralisé satisfaisant à l'axiome A en plus des axiomes O, T, C, P. Nous avons ainsi atteint le but que nous nous proposions. Car, non seulement, tout système quantique du type fini est un système de propositions (toute géométrie projective satisfait à A_2), mais encore, tout système de propositions dont la proposition maximale I est union finie de points, est un système quantique du type fini (Appendice Théorème XVI). Enfin un système de propositions toutes compatibles deux à deux est toujours un treillis de Boole atomique et complet, c'est-à-dire un système classique.

Ajoutons une remarque. Considérons un système de propositions et donnons nous deux propositions a et b telles que $a \leqslant b$. A toute proposition x compatible avec a et b faisons correspondre la proposition:

$$y = (a \cup x) \cap b = a \cup (x \cap b) .$$

L'ensemble de ces y qui n'est autre que l'ensemble des z telles que

$$a \leqslant z \leqslant b$$

est lui-même un système de propositions (Appendice Théorème XIII) a et b jouant le rôle de ϕ et I. L'interprétation physique est simple. Si, pour un système physique donné, a' et b sont toutes deux vraies, la mesure de y s'identifie à la mesure de x. L'orthocomplément relatif de y est alors le correspondant de l'orthocomplément de x (que le lecteur vérifie!) et le correspondant d'un point (contenu dans b mais pas dans a) est bien un point relativement à a. (C'est ce qui justifie l'axiome A_2.)

Donnons maintenant les résultats obtenus au paragraphe III de l'appendice.

1. Tout système de propositions peut être plongé dans une géométrie projective. Ce plongement respecte l'ordre et l'intersection et sa restriction aux points est biunivoque. La géométrie projective est complètement déterminée par la donnée du système (Théorème XVIII).

2. Tout système de propositions est union directe de systèmes de propositions irréductibles (Théorème XIX). Deux propositions appartenant à deux sous-systèmes irréductibles différents sont toujours compatibles. Un système de propositions est irréductible si, et si seulement, seules ϕ et I sont compatibles avec toutes les propositions du système (Théorème XX). Enfin la géométrie projective définie par le système de propositions est elle-même union directe des géométries projectives irréductibles définies par les sous-systèmes irréductibles correspondants.

3. La géométrie projective définie pour un système de propositions irréductible et de dimension plus grande que 3 étant réalisée par les sous-espaces vectoriels d'un

espace vectoriel, les sous-espaces images de propositions sont caractérisés par une forme hermitienne définie (voir Théorème XXI). En particulier, si cet espace vectoriel est construit sur le corps des réels, des complexes ou des quaternions, cette forme hermitienne définit un espace d'HILBERT dont les sous-espaces fermés correspondent aux propositions (Théorème XXII).

En résumé, nous pouvons en général réaliser un système de propositions donné en considérant une famille d'espaces Hilbertiens H_i. Chaque proposition est alors définie par une famille $\{x_i\}$ de sous-espaces fermés $x_i < H_i$. Le système ainsi obtenu est l'union directe des systèmes correspondant à chacun des H_i.

7. Conclusions

Nous avons développé pour le calcul des propositions un formalisme très général valable aussi bien en physique classique qu'en physique quantique. C'est ainsi qu'il englobe non seulement la mécanique de NEWTON de n particules mais aussi la théorie phénoménologique du fluide, l'électromagnétisme et la gravitation (au sens classique). Le théorème de plongement d'un système de propositions dans une géométrie projective (Théorème XVIII) est un résultat important car il justifie l'emploi de l'espace d'HILBERT en théorie quantique. Les possibilités d'extension du formalisme habituel se trouvent de ce fait limitées essentiellement au choix d'un corps autre que les complexes. Mais, le point de vue que nous avons adopté dans ce travail, et qui consiste à interpréter le formalisme quantique comme la généralisation naturelle du formalisme classique, devrait être appliqué systématiquement aux notions d'états, d'observables et d'équations du mouvement. C'est là un domaine de recherche qui pourrait à notre avis, conduire à des résultats intéressants. En guise d'illustration et d'exemple, nous allons pour terminer examiner brièvement la notion d'état.

Considérons un système physique, nous dirons que son état est déterminé si nous connaissons pour chaque proposition du système, la probabilité d'obtenir la réponse oui lors d'une mesure. C'est pourquoi nous définirons un état comme une injection du système de propositions τ dans la droite réelle telle que:

$$
\begin{aligned}
&1.\quad w(a) \geqslant 0 \qquad \forall a \in \tau\,,\\
&2.\quad w(\phi) = 0\,,\\
&3.\quad w(I) = 1\,,\\
&4.\quad w(a) = w(b) = 1 \;\Rightarrow\; w(a \cap b) = 1\,,\\
&5.\quad a \leftrightarrow b \;\Rightarrow\; w(a) + w(b) = w(a \cup b) + w(a \cap b)\,.
\end{aligned}
$$

Le lecteur reconnaîtra dans la condition 5 la généralisation de la loi d'additivité des probabilités et remarquera que c'est l'interprétation de $a \cap b$ que nous avons donnée au paragraphe 2 qui impose la condition 4. Il est facile de démontrer les propriétés suivantes:

Pour tout état w,

$$a \leqslant b \;\Rightarrow\; w(a) \leqslant w(b)\,,$$

(de $b = a \cup (a' \cap b)$ on déduit en appliquant 5: $w(b) = w(a) + w(a \cap b)$.)

Si w_1 et w_2 sont deux états et λ_1, λ_2 deux nombres positifs tels que:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1 ,$$

alors $w(x) = \lambda_1 w_1(x) + \lambda_2 w_2(x)$ définit un nouvel état.

Enfin les conditions 4 et 5 sont équivalentes aux suivantes:

$$4'. \quad w(a) = w(b) = w(a \cup b) \Rightarrow w(a \cap b) = w(a \cup b) ,$$

$$5'. \quad a \leftrightarrow b \quad \text{et} \quad a \cap b = \phi \Rightarrow w(a \cup b) = w(a) + w(b) ,$$

et suggèrent plusieurs définitions:

Nous dirons que w est un état non-borné s'il satisfait aux conditions 1, 2, 4', 5' avec $w(I) = \infty$. (Une onde plane est-elle un exemple d'état non-borné ?).

Nous dirons que w est un état continu si la condition 5' est encore valable pour une famille dénombrable de propositions, c'est-à-dire si:

$$5''. \quad a_i \leftrightarrow a_j \quad \text{et} \quad a_i \cap a_j = \phi \Rightarrow w\,(\underset{i}{\cup}\, a_i) = \sum_i w(a_i) , \quad \text{où} \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots .$$

C'est à A. M. GLEASON[10]) que nous devons une justification de ces définitions. En effet, considérant un système de propositions irréductible réalisé par les projecteurs P_a d'un espace d'HILBERT séparable (réel ou complexe mais de dimension $\geqslant 3$), il démontre le résultat suivant:

Pour tout état continu w il existe une «matrice densité» ϱ telle que:

$$w(a) = \mathrm{tr}\,(\varrho\, P_a) \quad \forall a .$$

On ne connaît pas la généralisation de ce théorème au cas d'un espace d'HILBERT non-séparable. Mais on peut facilement démontrer le résultat suivant:

Pour tout système de propositions réalisé par les projecteurs d'un espace d'HILBERT de dimension $\geqslant 3$ et construit sur le corps des réels, des complexes ou des quaternions, il existe un et un seul état tel que:

$$w(P) = 1 ,$$

où P est un point donné.

Pour un système de propositions défini par une famille continue d'espaces d'HILBERT H_i (i variant de 0 à 2π et les H_i étant séparables), un état continu quelconque sera donné par une famille de matrices densités ϱ_i et une densité de probabilité $m(i)$ définie sur le segment $[0, 2\pi]$. La valeur moyenne d'une observable donnée par une famille d'opérateurs auto-adjoints A_i sera:

$$\overline{A} = \int_0^{2\pi} \mathrm{tr}\,(\varrho_i\, A_i)\, m(i)\, di .$$

Cette formule ne résulte pas du formalisme habituel. Il est en effet impossible de plonger les H_i dans un seul et même espace d'HILBERT de manière à pouvoir représenter par une matrice densité aussi bien les états de la forme $m(i) = \delta\,(i - i_0)$ que ceux de la forme $m(i) = 1/2\pi$ car ces deux densités ne sont pas équivalentes.

Remerciements

L'expression de ma très sincère gratitude s'adresse en tout premier lieu à Monsieur le Professeur J. M. JAUCH, mon directeur de thèse, pour l'intérêt avec lequel il m'a prodigué ses nombreuses et combien précieuses remarques tout au long de ce travail.

C'est avec une égale reconnaissance que je tiens à remercier Monsieur le Professeur E. C. G. STUECKELBERG, mon maître, car c'est à lui, à son enseignement, à ses conseils constants que je dois d'avoir pu entreprendre ces recherches.

Je remercie Messieurs les Professeurs G. VINCENT et D. RIVIER pour la bienveillante attention qu'ils ont bien voulu m'accorder.

Enfin mes collègues de l'E. P. U. L., de l'Institut de Physique Théorique de Genève et tout spécialement Monsieur le Dr G. EMCH doivent être mentionnés pour la part active qu'ils ont prise à de nombreuses et fructueuses discussions.

Je ne saurais oublier Monsieur le Professeur HAENNY qui m'a accueilli dans son laboratoire.

Ce travail a bénéficié de l'aide financière du Fonds National Suisse.

APPENDICE

I. Le cas modulaire

Définition: On dit qu'un treillis est $\cap$-continu si, pour toute suite

$$\ldots \leqslant a_{i-1} \leqslant a_i \leqslant a_{i+1} \leqslant \ldots ,$$

on a la relation

$$b \cap (\bigcup_i a_i) = \bigcup_i (b \cap a_i) \qquad \forall b ,$$

(d'où la définition duale pour $\cup$-continu en considérant des suites décroissantes).

Nous avons les théorèmes suivants [5]:

Théorème I: Une géométrie projective est un treillis complet, complémenté, modulaire, atomique et $\cap$-continu. (Ce théorème peut servir de définition.)

Théorème II: Toute géométrie projective est union directe de géométries projectives irréductibles.

Théorème III: Une géométrie projective irréductible de dimension infinie n'est jamais $\cup$-continue. (La dimension d'une géométrie projective est infinie si l'élément maximal n'est d'aucune manière union finie de points.)

C'est là une conséquence du rôle dissymétrique que jouent $\cup$ et $\cap$ dans la définition d'une géométrie projective (Théorème I).

Théorème IV: Tout treillis complet orthocomplémenté et modulaire est une géométrie continue de J. VON NEUMANN, c'est-à-dire un treillis complet, complémenté, modulaire, $\cap$-continu et $\cup$-continu. C'est là un résultat de KAPLANSKI.

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème énoncé dans la première partie au § 4.

Théorème V: Tout treillis complet orthocomplémenté, modulaire et atomique est union directe de géométries projectives de dimension finie.

Démonstration: D'après IV, un treillis satisfaisant aux hypothèses est une géométrie continue. Or, il est atomique, c'est donc une géométrie projective (I) qui est union directe de géométries projectives irréductibles (II). Or, tout sous-treillis complet d'un treillis complet $\cup$-continu est lui-même $\cup$-continu, et l'on conclut en appliquant III.

C. q. f. d.

Mais ce théorème IV permet encore de démontrer une autre proposition du § 4 de la première partie:

Proposition: Le treillis complet engendré par intersection et orthocomplémentation à partir d'une famille de projecteurs $P_{\Delta pi}$ et $P_{\Delta qj}$ correspondant à des intervalles bornés disjoints et recouvrant entièrement les spectres de $\underline{p}$ et $\underline{q}$ n'est jamais modulaire.

Démonstration: Raisonnons par l'absurde, supposons-le modulaire et appliquons le théorème IV. Le treillis devra donc être $\cap$-continu. Or, si

$$P_n = \sum_{-n}^{+n} P_{\Delta pi} ,$$

on a une suite croissante de projecteurs:

$$\ldots \leqslant P_{n-1} \leqslant P_n \leqslant P_{n+1} \leqslant \ldots .$$

Mais

$$P_{\Delta pj} \cap (\bigcup_n P_n) = P_{\Delta qj} ,$$

car

$$\bigcup_n P_n = I \qquad \text{(identité)}$$

et

$$\bigcup_n (P_{\Delta qj} \cap P_n) = 0 ,$$

car l'ensemble des vecteurs propres communs à $P_{\Delta qj}$ et P_n est vide. En d'autres termes, une fonction propre de $P_{\Delta qj}$ étant à support compact, n'est jamais la transformée de Fourier d'une fonction elle-même à support compact et différente de zéro. C. q. f. d.

II. Le cas faiblement modulaire

Si $a \leqslant b$, on appelle segment $[a, b]$ le sous-treillis des x tels que

$$a \leqslant x \leqslant b .$$

Un treillis orthocomplémenté est dit canoniquement relativement orthocomplémenté (en abrégé CROC) si, pour tout segment $[a, b]$ l'application

$$[a, b] \ni x \rightarrow x_r = (a \cup x') \cap b \in [a, b]$$

est une orthocomplémentation relativement au sous-treillis $[a, b]$. On sait que tout treillis modulaire et orthocomplémenté est CROC. Mais il existe des treillis CROC non modulaires (comme celui de la figure 1) et aussi des treillis orthocomplémentés non CROC (comme celui de la figure 2).

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un treillis orthocomplémenté soit CROC est donnée par le théorème suivant:

Théorème VI: Un treillis orthocomplémenté est CROC si et seulement si

$$a \leqslant b \Rightarrow (a \cup b') \cap b = a .$$

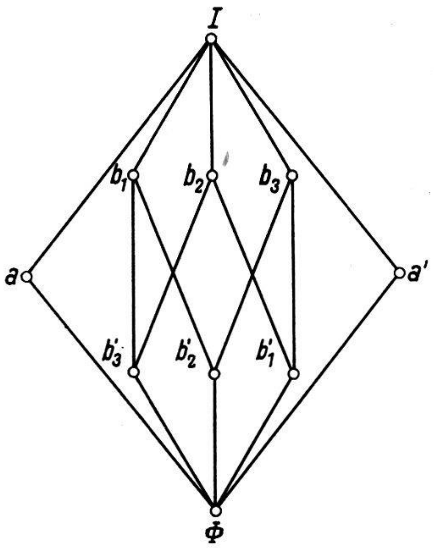


Fig. 1

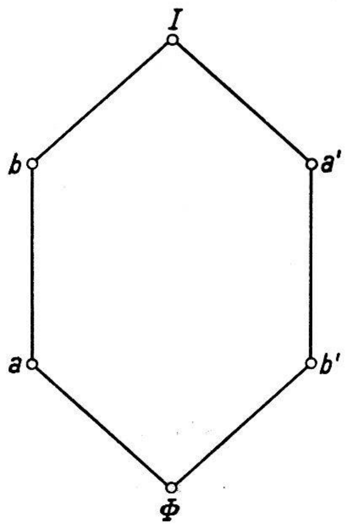


Fig. 2

On dit alors que le treillis est faiblement modulaire.

Démonstration: Nécessité: Si $a \leqslant b$, a est l'orthocomplément relatif de b pour $[a, b]$ c'est-à-dire:

$$b_r = (a \cup b') \cap b = a\ .$$

Suffisance: Si $a \leqslant x \leqslant b$, on a, dans tout treillis:

$$a \cup (x' \cap b) \leqslant (a \cup x') \cap b\ ,$$

et la condition s'écrit

$$[a \cup (x' \cap b) \cup \big((a \cup x') \cap b)'] \cap (a \cup x') \cap b = a \cup (x' \cap b)\ .$$

Mais

$$a \cup (x' \cap b) \cup \big((a \cup x') \cap b\big)' = a \cup (x' \cap b) \cup (a' \cap x) \cup b'$$

$$= (a' \cap (a \cup x'))' \cup \big((x \cup b') \cap b\big)' = x \cup x' = I\ ,$$

d'où

$$(a \cup x') \cap b = a \cup (x' \cap b)\ .$$

Ainsi:

1. $(x_r)_r = [a \cup (x_r)'] \cap b = [a \cup \big((a' \cap x) \cup b'\big)] \cap b$

$$= a \cup [\big((a' \cap x) \cup b'\big) \cap b] = a \cup (a' \cap x) = (a \cup a') \cap x = x\ ,$$

2. $x_r \cap x = (a \cup x') \cap b \cap x = (a \cup x') \cap x = a\ ,$

3. $x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow (a \cup x_2') \cap b \leqslant (a \cup x_1') \cap b\ ,$

c. q. f. d.

Rappelons que, dans la première partie, au § 5, nous avions introduit la notation $a \leftrightarrow b$ pour la relation

$$a \cup (a' \cap b) = b \cup (b' \cap a)\ .$$

La condition du théorème précédent est alors équivalente à

$$a \leqslant b \Rightarrow a' \leftrightarrow b' .$$

En effet, pour $a \leqslant b$, $a' \leftrightarrow b'$ s'écrit

$$a' \cup (a \cap b') = b' \cup (b \cap a') ,$$

mais

$$a \cap b' \leqslant a \cap a' = \phi ,$$

d'où

$$a' = b' \cup (b \cap a') ,$$

ou encore $a = b \cap (b' \cup a)$; enfin cette condition est encore équivalente à

$$a \leqslant b \;\Rightarrow\; a \leftrightarrow b \quad \text{et} \quad a' \leftrightarrow b' \;\; (a \leqslant b \iff b' \leqslant a'!) ,$$

qui est la condition nécessaire et suffisante pour que le sous-treillis orthocomplémenté engendré par a et b si $a \leqslant b$ soit aussi distributif, c'est-à-dire que a et b soient compatibles. Dans un treillis orthocomplémenté on a toujours

$$a \leqslant b \;\Rightarrow\; a \leftrightarrow b' ,$$

car

$$a \cup (a' \cap b') = a \cup b' \quad \text{et} \quad b' \cup (a \cap b) = b' \cup a .$$

Nous avons ainsi démontré que

$$a \leftrightarrow b' \;\Rightarrow\; a \leftrightarrow b$$

est une condition suffisante pour qu'un treillis orthocomplémenté soit CROC. Mais c'est aussi une condition nécessaire comme il résulte du théorème suivant:

Théorème VII: Dans un treillis CROC, les conditions suivantes sont équivalentes entre elles:

1. $a \leftrightarrow b$.
2. $a \leftrightarrow b'$.
3. $(a \cap b') \cup b \geqslant a$ (ou son dual).
4. Une quelconque des 24 relations de distributivité non triviales qu'on peut écrire entre a, b, a', b' (c'est-à-dire une relation de la forme

$$x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z) ,$$

ou de la forme duale).

5. $(a \cap b) \cup (a \cap b') \cup (a' \cap b) \cup (a' \cap b') = I$ (ou son dual).

Démonstration: Si 1. $\Rightarrow$ 2., alors $a \leftrightarrow b'$ entraîne $a \leftrightarrow (b')' = b$, c'est-à-dire 2. $\Rightarrow$ 1. Mais de l'équivalence de 1. et 2., il s'ensuit que, sur les 24 relations de distributivité, il suffit de considérer les deux cas particuliers:

$$b \cup (a \cap b') = (b \cup a) \cap (b \cup b') = b \cup a , \quad b' = b' \cap (a \cup a') = (b' \cap a) \cup (b' \cap a') .$$

Il vient aussi 1. $\Rightarrow a' \leftrightarrow b'$, c'est-à-dire l'équivalence d'une quelconque des relations avec sa duale. C'est pourquoi nous allons tout d'abord démontrer:

$$1. \Rightarrow 3. \Rightarrow (a \cap b') \cup b = a \cup b \Rightarrow (a \cap b') \cup (a' \cap b') = b' \Rightarrow 2. ,$$

la démonstration de 1. $\iff$ 5. étant alors presque immédiate.

La relation $(a \cap b') \cup b = (b \cap a') \cup a$ entraîne $(a \cap b') \cup b \geqslant a$, mais $(a \cap b') \cup b \leqslant a \cup b$, donc $(a \cap b') \cup b \geqslant a$ entraîne $(a \cap b') \cup b = a \cup b$. Le treillis étant CROC, de $a \cap b' \leqslant b'$ nous tirons (théorème VI)

$$(a \cap b') \cup [(a' \cup b) \cap b'] = b' ,$$

et il en résulte

$$(a \cap b') \cup b = a \cup b \;\Rightarrow\; (a \cap b') \cup (a' \cap b') = b' .$$

Enfin, $(a \cap b') \cup (a' \cap b') = b'$ entraîne tout d'abord

$$a' \cap b') \cup a \geqslant b' \quad \text{d'où} \quad (a' \cap b') \cup a = b' \cup a ,$$

et de même

$$(a \cap b') \cup a' \geqslant b' \quad \text{d'où} \quad (a \cap b') \cup a' = b' \cup a' .$$

Or, selon un raisonnement analogue, le treillis étant CROC:

$$a \cap b' \leqslant a \;\Rightarrow\; (a \cap b') \cup [(a' \cup b) \cap a] = a ,$$

d'où il résulte que

$$(a \cap b') \cup a' = b' \cup a' \;\Rightarrow\; (a \cap b') \cup (b \cap a) = a$$
$$\Rightarrow\; (a \cap b) \cup b' \geqslant a \;\Rightarrow\; (a \cap b) \cup b' = a \cup b' ,$$

c'est-à-dire, en résumé:

$$(a \cap b') \cup (a' \cap b') = b' \;\Rightarrow\; (a \cap b) \cup b' = (a' \cap b') \cup a ,$$

ou encore $a \leftrightarrow b'$.

Ensuite, 1. $\Rightarrow$ 5. car, d'après ce qui précède, la condition 1. entraîne

$$(a \cap b') \cup (a' \cap b') = b' \quad \text{et} \quad (a \cap b) \cup (a' \cap b) = b$$

c'est-à-dire 5.

Pour terminer, il reste à démontrer 5. $\Rightarrow$ 1. ou, ce qui revient au même, 5. $\Rightarrow$ 4.

Or, dans un treillis quelconque:

$$(a \cap b') \cup (a' \cap b') \leqslant b' \leqslant (a \cup b') \cap (a' \cup b') ,$$

d'où, en appliquant le théorème VI:

$$[((a \cap b') \cup (a' \cap b')) \cup ((a' \cap b) \cup (a \cap b))] \cap [(a \cup b') \cap (a' \cup b')] = (a \cap b') \cup (a' \cap b')$$

et ainsi 5. $\Rightarrow$

$$(a \cup b') \cap (a' \cup b') = (a \cap b') \cup (a' \cap b') \;\Rightarrow\; (a \cap b') \cup (a' \cap b') = b' ,$$

c. q. f. d.

Théorème VIII: Dans un treillis CROC (et complet), si $a_i \leftrightarrow b$ pour tout $i \in J$ où J est un ensemble fini (ou infini) d'indices, on a les relations de distributivité:

$$b \cap \Bigl(\bigcup_J a_i\Bigr) = \bigcup_J (b \cap a_i)$$

et

$$b \cup \Bigl(\bigcap_J a_i\Bigr) = \bigcap_J (b \cup a_i) .$$

Démonstration: En vertu du théorème VII, nous avons

$$(a_i \cap b) \cup b' \geqslant a_i \quad \forall i \in J\,,$$

d'où il résulte

$$b \cap \Big[\bigcup_J (b \cap a_i) \cup b'\Big] \geqslant b \cap \Big(\bigcup_J a_i\Big)\,.$$

Mais

$$\bigcup_J (b \cap a_i) \leqslant b$$

et le treillis étant supposé CROC:

$$\Big[\bigcup_J (b \cap a_i) \cup b'\Big] \cap b = \bigcup_J (b \cap a_i)\,,$$

ce qui démontre

$$\bigcup_J (b \cap a_i) \geqslant b \cap \Big(\bigcup_J a_i\Big)\,.$$

Or, on a évidemment:

$$\bigcup_J (b \cap a_i) \leqslant b \cap \Big(\bigcup_J a_i\Big)\,,$$

d'où la première des relations. La deuxième se démontre par dualité, en remarquant que

$$a_i \leftrightarrow b \Leftrightarrow a'_i \leftrightarrow b'\,,$$

c. q. f. d.

Théorème IX: Dans un treillis CROC (et complet) si $a_i \leftrightarrow b$ pour tout $i \in J$ où J est un ensemble fini (ou infini) d'indices, alors:

$$\bigcup_J a_i \leftrightarrow b \quad \text{et} \quad \bigcap_J a_i \leftrightarrow b\,.$$

Démonstration: Nous avons, en appliquant les théorèmes VII et VIII:

$$\Big[\Big(\bigcup_J a_i\Big) \cap b\Big] \cup b' = \Big[\bigcup_J (a_i \cap b)\Big] \cup b' = \bigcup_J [(a_i \cap b) \cup b'] \geqslant \bigcup_J a_i\,,$$

d'où la conclusion, la relation

$$\bigcap_J a_i \leftrightarrow b$$

s'obtenant par dualité. C. q. f. d.

Nous dirons qu'une famille d'éléments compatibles entre eux est maximale compatible s'il n'existe aucun autre élément du treillis compatible avec eux.

Il existe toujours une famille maximale compatible contenant une famille donnée d'éléments compatibles entre eux, car l'ensemble des familles d'éléments compatibles entre eux est de caractère fini[11]).

Il résulte immédiatement des trois théorèmes précédents la propriété suivante:

Théorème X: Toute famille maximale compatible d'un treillis complet et CROC est un treillis de Boole complet.

Théorème XI: Dans un treillis CROC, tout segment est lui-même CROC. De plus, deux éléments d'un même segment sont compatibles pour l'orthocomplémentation canonique relative à ce segment si et seulement s'ils sont compatibles pour l'orthocomplémentation du treillis total.

Démonstration: En vertu du théorème VI, tout est démontré si nous pouvons prouver la relation suivante:

$$(x \cap y_r) \cup y = (x \cap y') \cup y\,,$$

où x et y sont deux éléments quelconques du segment $[a, b]$ et

$$y_r = (a \cup y') \cap b\,.$$

Or, nous avons

$$(x \cap y_r) \cup y = [x \cap (a \cup y') \cap b] \cup y = [x \cap (a \cup y')] \cup y\,.$$

Mais, le treillis étant CROC, $a \leqslant x \Rightarrow a \leftrightarrow x$, de même $a \leqslant y \Rightarrow a \leftrightarrow y$ donc aussi (théorème VII) $a \leftrightarrow y'$. Il en résulte, en appliquant le théorème VIII:

$$a \cup (x \cap y') = (a \cup x) \cap (a \cup y') = x \cap (a \cup y')\,,$$

d'où

$$(x \cap y_r) \cup y = [a \cup (x \cap y')] \cup y = (x \cap y') \cup y\,,$$

c. q. f. d.

Etant donné un treillis CROC τ, considérons l'un de ses segments $[a, b]$. C'est un sous-treillis τ_{ab} canoniquement orthocomplémenté selon l'application:

$$c \to c_{ab} = (a \cup c') \cap b\,,$$

mais, d'après le théorème précédent, τ_{ab} est lui-même CROC, c'est-à-dire qu'un segment $[x, y]$ de τ_{ab} est canoniquement orthocomplémenté selon l'application

$$z \to z_{xy} = (x \cup z_{ab}) \cap y\,.$$

Mais $[x, y]$ peut aussi être considéré comme un segment de τ et ainsi orthocomplémenté selon l'application

$$z \to z_r = (x \cup z') \cap y\,.$$

Le théorème suivant exprime l'identité de ces deux dernières applications et justifie le terme «canonique» pour la définition de l'orthocomplémentation relative:

Théorème XII: Si, dans un treillis CROC,

$$a \leqslant x \leqslant z \leqslant y \leqslant b\,,$$

et

$$z_{ab} = (a \cup z') \cap b\,,$$

alors

$$(x \cup z_{ab}) \cap y = (x \cup z') \cap y\,.$$

Démonstration: En effet, on peut écrire:

$$(x \cup z_{ab}) \cap y = (x \cup ((a \cup z') \cap b)) \cap y = [(x \cup z') \cap b] \cap y = (x \cup z') \cap y$$

car $x \leftrightarrow b$ et $x \leftrightarrow (a \cup z')$, c. q. f. d.

III. Les systèmes de propositions

Un système de propositions est, par définition, un treillis complet, orthocomplémenté, atomique et faiblement modulaire satisfaisant à la loi de couverture, c'est-à-dire que, pour tout point P

$$a \leqslant x \leqslant a \cup P \Rightarrow x = a \quad \text{ou} \quad x = a \cup P .$$

Théorème XIII: Tout segment $[a, b]$ d'un système de propositions est lui-même un système de propositions.

Démonstration: $[a, b]$ est un treillis complet, orthocomplémenté (théorème VI) et atomique car, si

$$x \in [a, b] , \quad (x \cap a') \cup a = x \quad \text{d'ou, si} \quad x \neq a,\ x \cap a' \neq \phi ,$$

et il existe un point $P \leqslant x \cap a'$, ce qui entraîne $P \cup a \leqslant x$ et la loi de couverture montre que $P \cup a$ est un point de $[a, b]$. De plus, $[a, b]$ est faiblement modulaire, car $[a, b]$ est CROC en vertu du théorème XI.

Enfin, $[a, b]$ satisfait aussi à la loi de couverture. En effet, tout élément $y \in [a, b]$ est de la forme $a \cup x$ où $x = y \cap a'$ et, en conséquence: $a \cap x = \phi$, ce qui montre que tout point de $[a, b]$ est de la forme $a \cup P$ où P est un point. On doit donc vérifier:

$$y \leqslant z \leqslant y \cup (a \cup P) \Rightarrow z = y \quad \text{ou} \quad z = y \cup (a \cup P) ,$$

ce qui est immédiat en remarquant que $y \cup (a \cup P) = y \cup P$, c. q. f. d.

Théorème XIV: Toute proposition est union de points compatibles entre eux.

Démonstration: Soit J l'ensemble des indices des points $P_i \leqslant a$. Soit $X \subset J$ un sous-ensemble des indices de points compatibles entre eux. L'ensemble des X est de caractère fini *) ; il existe donc un X maximal que nous noterons Y. Il faut montrer que

$$\bigcup_Y P_i = a .$$

Or,

$$\bigcup_Y P_i \leqslant a ,$$

ce qui permet d'appliquer la condition de faible modularité:

$$\Big[a \cap \Big(\bigcup_Y P_i\Big)'\Big] \cup \Big(\bigcup_Y P_i\Big) = a .$$

Mais:

$$a \cap \Big(\bigcup_Y P_i\Big)' = \phi ,$$

car, si ce n'était pas le cas, il existerait un point:

$$P \leqslant a \cap \Big(\bigcup_Y P_i\Big)' ,$$

ce qui impliquerait:

$$P \leqslant a \quad \text{et} \quad P \leqslant \Big(\bigcup_Y P_i\Big)' ,$$

*) Voir la remarque qui précède le théorème X.

c'est-à-dire

$$P \leqslant \bigcup_Y P_i', \quad P \leqslant P_i' \quad \forall i \in Y, \quad P \leftrightarrow P_i \quad \forall i \in Y,$$

or,

$$P \nleftrightarrow P_i \quad \forall i \in Y,$$

car

$$\Big(\bigcup_Y P_i\Big) \cap \Big(\bigcup_Y P_i\Big)' = \phi ,$$

d'où contradiction. C. q. f. d.

Théorème XV: Pour un système de propositions, si

$$a = b \cup \Big(\bigcup_1^n P_i\Big),$$

où les P_i sont n points, il existe au plus n points Q_i compatibles entre eux et compatibles avec b tels que:

$$Q_i \leqslant a \quad \text{et} \quad Q_i \cap b = \phi .$$

Démonstration: Nous allons procéder par récurrence. Le théorème est vrai pour $n = 1$; en effet, supposons les Q_i compatibles entre eux et compatibles avec b tels que

$$Q_i \leqslant b \cup P \quad \text{et} \quad Q_i \cap b = \phi .$$

On a alors

$$b \leqslant b \cup Q_i \leqslant b \cup P ,$$

et, de la loi de couverture, on déduit:

$$b \cup Q_i = b \cup P \quad \forall i ,$$

ou encore:

$$b' \cap (b \cup Q_i) = b' \cap (b \cup P) ,$$

mais $b' \leftrightarrow b$ et $b' \leftrightarrow Q_i$ (théorème VII) et, en vertu du théorème VIII:

$$b' \cap (b \cup Q_i) = b' \cap Q_i = \begin{cases} \phi \\ Q_i \end{cases} .$$

Supposons maintenant le théorème vrai pour $n - 1$. On peut poser

$$\Big[b \cup \Big(\bigcup_1^{n-1} P_i\Big)\Big] \cap Q_1 = \phi .$$

On en déduit, en appliquant la loi de couverture:

$$\Big[b \cup \Big(\bigcup_1^{n-1} P_i\Big)\Big] \cup Q_1 = (b \cup Q_1) \cup \Big(\bigcup_1^{n-1} P_i\Big) = b \cup \Big(\bigcup_{i=1}^{n} P_i\Big).$$

Mais, pour $Q_i \nleftrightarrow Q_1$ on a:

$$(b \cup Q_1) \cap Q_i = (b \cap Q_i) \cup (Q_1 \cap Q_i) = \phi ,$$

d'où il résulte que les $Q_i \nleftrightarrow Q_1$ sont au plus en nombre $n - 1$. C. q. f. d.

Théorème XVI: Tout système de propositions dont l'élément maximal I est union finie de points est modulaire.

Démonstration: D'après le théorème XIV, toute proposition est union d'un certain nombre de points compatibles entre eux. Mais si I est union finie de points, le théorème XV montre que pour chaque proposition x c'est un nombre fini $\nu(x)$ qui ne dépend que de x. (On applique XV deux fois.)

Montrons tout d'abord que $\nu(x)$ est une valuation, en d'autres termes que:

$$\nu(a) + \nu(b) = \nu(a \cup b) + \nu(a \cap b) \qquad \forall a \text{ et } b .$$

Nous procéderons par étapes:

1. D'après le théorème XV, on a immédiatement:

$$\nu\,(a \cup b) \leqslant \nu(a) + \nu(b) .$$

2. Pour $a \cap b = \phi$ et $a \leftrightarrow b$, si $P \leqslant a$ et $Q \leqslant b$, en remarquant que

$$a \leftrightarrow b \Rightarrow (a \cap b) \cup (a \cap b') = a \Rightarrow a \leqslant b' ,$$

on trouve: $P \leqslant a \leqslant b' \leqslant Q'$ ou encore $P \leftrightarrow Q$ et $P \cap Q = \phi$ ce qui prouve pour ce cas:

$$\nu(a) + \nu(b) = \nu\,(a \cup b) .$$

3. Si on a seulement $x \cap y = \phi$, nous pouvons écrire:

$$x \cup y = x \cup [(x \cup y) \cap x'] = y \cup [(x \cup y) \cap y'] ,$$

ce qui permet d'appliquer 2.:

$$\nu(x) + \nu\left((x \cup y) \cap x'\right) = \nu\,(x \cup y) , \qquad \nu(y) + \nu\left((x \cup y) \cap y'\right) = \nu\,(x \cup y) .$$

Posons

$$\nu\,(x \cup y) = \nu(x) + \nu(y) - \varepsilon ,$$

où $\varepsilon \geqslant 0$ en vertu de 1. il vient:

$$\nu\left((x \cup y) \cap x'\right) = \nu\,(x \cup y) - \nu(x) = \nu(y) - \varepsilon ,$$

$$\nu\left((x \cup y) \cap y'\right) = \nu\,(x \cup y) - \nu(y) = \nu(x) - \varepsilon .$$

Mais, d'après le théorème VIII:

$$[(x \cup y) \cup x'] \cup [(x \cup y) \cap y'] = (x \cup y) \cap (x' \cup y') = (x \cup y) \cap (x \cap y)' = (x \cup y)$$

d'où, toujours d'après 1.,

$$\nu\,(x \cup y) \leqslant \nu\left((x \cup y) \cap x'\right) + \nu\left((x \cup y) \cap y'\right)$$

ce qui, joint aux résultats précédents, nous permet d'écrire:

$$\nu(x) + \nu(y) - \varepsilon \leqslant \nu(x) + \nu(y) - 2\,\varepsilon$$

d'où la solution unique $\varepsilon = 0$, ce qui prouve

$$\nu\,(x \cup y) = \nu(x) + \nu(y)$$

pour $x \cap y = \phi$.

4. Enfin, dans le cas général, si nous posons $x \cap y = q$, nous avons, en appliquant 3.:

$$\nu(x) = \nu\,(x \cap q') + \nu(q)\,,$$

$$\nu(y) = \nu\,(y \cap q') + \nu(q)\,,$$

$$\nu\,(x \cup y) = \nu\,\big((x \cup y) \cap q'\big) + \nu(q)\,,$$

mais

$$(x \cup y) \cap q' = (x \cap q') \cup (y \cap q')$$

et

$$(x \cap q') \cap (y \cap q') = (x \cap y) \cap q' = \phi$$

d'où, toujours d'après 3.:

$$\nu\,\big((x \cup y) \cap q'\big) = \nu\,(x \cap q') + \nu\,(y \cap q')\,.$$

Cette relation, jointe aux trois précédentes, achève cette partie de la démonstration:

$$\nu(x) + \nu(y) = \nu\,(x \cup y) + \nu(q)\,.$$

Enfin, si $x \leqslant y$ mais $x \neq y$, on a:

$$y = (y \cap x') \cup x \text{ et } y \cap x' \neq \phi\,,$$

d'où

$$\nu(y) = \nu(x) + \nu(y \cap x') > \nu(x)$$

Nous pouvons maintenant démontrer la relation de modularité: si $a \leqslant c$, on a:

$$\nu\,\big(a \cup (b \cap c)\big) = \nu(a) + \nu\,(b \cap c) - \nu\,(a \cap b) =$$

$$\nu\,(b \cap c) + \nu\,(a \cup b) - \nu(b) = \nu\,(a \cup b) - \nu\,(b \cup c) + \nu\,(c) = \nu\,\big((a \cup b) \cap c\big)\,,$$

or, dans tout treillis:

$$a \cup (b \cap c) \leqslant (a \cup b) \cap c\,,$$

d'où

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c\,.$$

c. q. f. d.

Compte tenu des résultats précédents, ce dernier théorème peut s'énoncer ainsi: Dans un système de propositions, tout segment de la forme

$$\left[a,\, a \cup \left(\bigcup_{1} P_i\right)\right],$$

où les P_i sont des points en nombre fini, est une géométrie projective.

C'est pourquoi toute une série de théorèmes sur les géométries projectives de dimension finie reste valable pour les systèmes de propositions. Ainsi se trouve justifiée la notion de droite comme union de deux points distincts, la notion de plan comme union de trois points distincts non sur une même droite, etc... Ces considérations conduisent au théorème suivant:

Théorème XVII: Dans un système de propositions, on peut définir, comme en géométrie projective, la notion de droite et de plan. On a alors les deux propriétés suivantes:

1. Deux points définissent une droite et une seule.
2. Si P, Q, R sont trois points distincts et non sur une droite, ils définissent un triangle. Deux autres points S et T situés respectivement sur $P \cup Q$ et $Q \cup R$ définissent une droite $S \cup T$ qui coupe $P \cup R$ en un point

$$U = (S \cup T) \cap (P \cup R)$$

différent de P et R.

Démonstration: C'est un résultat de la géométrie projective[5]) que nous pouvons démontrer directement:
Si

$$\nu(a) = \nu(b) = 2 \text{ et } \nu(a \cup b) = 3 ,$$

nous avons:

$$v(a \cap b) = \nu(a) + \nu(b) - \nu(a \cup b) = 1 ,$$

d'où $a \cap b$ est un point. Ainsi deux droites d'un même plan se coupent toujours. C. q. f. d.

Théorème XVIII: Etant donné un système de propositions τ, il existe toujours une géométrie projective G_p et une application α telles que:

1. α est une injection canonique de τ dans G_p.
2. La restriction de α aux points de τ est une bijection sur les points de G_p.
3. $a \leqslant b \Longleftrightarrow \alpha(a) \leqslant \alpha(b)$,
4. $\alpha\left(\bigcap_J a_i\right) = \bigcap_J \alpha(a_i)$,
5. $\alpha(a \cup P) = \alpha(a) \cup \alpha(P)$.

Démonstration: Soit E l'ensemble des points du système de propositions τ et soit $\alpha(a)$ la partie de E formée des points contenus dans la proposition a. Par abus de langage, $\alpha(d)$ sera une droite de E si d est une droite de τ.

Les conclusions du théorème XVII s'étendent aux points et aux droites de E, et la théorie de la géométrie projective nous permet de définir G_P comme l'ensemble des parties de E satisfaisant à la propriété suivante[5]):

«$x \in G_p$ contient, en même temps que deux points distincts, la droite qu'ils définissent».

Ainsi, $\alpha(a) \in G_p$ et 1. et 2. sont satisfaits, 3. et 4. se démontrent en observant que l'ensemble des points contenus dans l'intersection est identique à l'ensemble des points contenus dans chacun des éléments de l'intersection.

Finalement, 5. résulte du fait que tout point $Q \leqslant a \cup P$ mais différent de P est sur une droite contenant P et un point de a, c'est-à-dire que $a \cap (P \cup Q)$ est différent de ϕ, ce que nous allons démontrer. Etant donnée la loi de couverture, il nous suffit de prouver l'existence d'un point R tel que:

$$a' \cup (P \cup Q)' = (P \cup Q)' \cup R .$$

Or

$$a \cup (P \cup Q) = a \cup P ,$$

d'où l'existence d'un R tel que: $[a' \cap (P \cup Q)'] \cup R = a'$ ce qui montre que $[a' \cap (P \cup Q)'] \cup (P \cup Q)' \cup R = a' \cup (P \cup Q)'$. C. q. f. d.

Nous avons rappelé au premier paragraphe que toute géométrie projective est union directe de géométries projectives irréductibles; le théorème précédent suggère un résultat analogue pour les systèmes de propositions:

Théorème XIX: Tout système de propositions est union directe de systèmes de propositions irréductibles.

Pour démontrer ce théorème, nous aurons besoin des lemmes suivants:

Lemme I: On dit que les points P et Q sont perspectifs s'ils sont confondus ou si $P \cup Q$ contient un troisième point. Pour un système de propositions, «P et Q sont perspectifs» est une relation d'équivalence que nous noterons $P \sim Q$.

Démonstration: En effet, c'est bien une relation transitive: si P, Q, R sont trois points distincts non sur une même droite et si $P \sim Q$ et $Q \sim R$ alors en vertu du théorème XVII il existe un troisième point sur le côté du triangle $P\ Q\ R$.

C. q. f. d.

Lemme II: Soit $\{P_a\}$ la classe d'équivalence contenant P_a et définie par le lemme **I.** Soit I_a l'union des points de la classe $\{P_a\}$. Tout point $P \leqslant I_a$ est un point de la classe $\{P_a\}$ et si $P_a \leqslant I_a$ et $P_b \leqslant I_b$, alors $P_a \leftrightarrow P_b$.

Démonstration: Soient P_a et P_b deux points quelconques distincts; $(P_a \cup P_b) \cap P_b'$ est un point compatible avec P_b, égal à P_a si et seulement si $P_a \leftrightarrow P_b$. En particulier, si P_a et P_b appartiennent à deux classes différentes, $P_a \leftrightarrow P_b$ car, sinon, $P_a \cup P_b$ contiendrait un troisième point $(P_a \cup P_b) \cap P_b'$, il en résulte $P_a \leqslant P_b'$ d'où nous tirons

$$I_a \leqslant I_b' \text{ et } I_a \cap I_b \leqslant I_b' \cap I_b = \phi.$$

Un point P ne peut donc être contenu dans I_a que s'il appartient à $\{P_a\}$. C.q.f.d.

Lemme III: Si $y \cap z = \phi$, $y \leftrightarrow z$, $x \leftrightarrow y$ et $x \leftrightarrow y \cup z$, alors $x \leftrightarrow z$.

Démonstration: De $y \cap z = \phi$, on déduit $y' = (y \cap z) \cup y'$ mais $z \leftrightarrow y$ d'où:

$$y' = (y \cap z) \cup y' = z \cup y' .$$

Ainsi

$$(y \cup z) \cap y' = (y \cup z) \cap (z \cup y') = z ,$$

mais $x \leftrightarrow y \cup z$ et $x \leftrightarrow y'$ donc:

$$x \leftrightarrow (y \cup z) \cap y' = z .$$

C. q. f. d.

Lemme IV: Si P est un point tel que $P \leqslant \bigcup_a x_a$ où $x_a \leqslant I_a$ alors P est contenu dans un x_a et un seul.

Démonstration: D'après le lemme II, P est contenu dans un I_b et un seul et $P \leftrightarrow x_a$ pour $a \neq b$. Mais $P \leftrightarrow \bigcup_a x_a$ et

$$x_b \cap \Bigl(\bigcup_{a \neq b} x_a\Bigr) \leqslant I_b \cap \Bigl(\bigcup_{a \neq b} I_a\Bigr) = \phi ,$$

enfin, $x_b \leftrightarrow \bigcup_{a \neq b} x_a$. Nous pouvons donc appliquer le lemme III, d'où $P \leftrightarrow x_b$. Ainsi $P \leftrightarrow x_a \ \forall\ a$ et

$$P = P \cap \left(\bigcup_a x_a\right) = \bigcup_a (P \cap x_a) = P \cap x_b ,$$

d'où $P \leqslant x_b$. C. q. f. d.

Démonstration du théorème XIX: Il faut établir la relation $x = \bigcup_a x_a$ où $x_a \leqslant I_a \ \forall\ a$ et montrer que cette représentation est unique. Cette représentation est définie par

$$x = \bigcup_a (x \cap I_a) .$$

En effet, $\bigcup_a (x \cap I_a) \leqslant x$ est évident, mais nous avons aussi $x \leqslant \bigcup_a (x \cap I_a)$ car x est union de points et si $P \leqslant x$ alors, d'après le lemme IV, $P \leqslant I_a$ pour un certain a, donc $P \leqslant x \cap I_a$.

D'autre part, cette représentation est unique, c'est-à-dire que si $x = \bigcup_a x_a$ où $x_a \leqslant I_a$, alors $x_a = x \cap I_a$. En effet, $x_a \leqslant x \cap I_a$ car:

$$x \cap I_a = \left(\bigcup_b x_b\right) \cap I_a \geqslant \bigcup_b (x_b \cap I_a) = x_a ,$$

mais nous avons aussi:

$$x \cap I_a \leqslant x_a ,$$

car si $P \leqslant x \cap I_a$, alors $P \leqslant x$ et $P \leqslant I_a$, ce qui entraîne, en vertu du lemme IV, P contenu dans un x_b qui ne peut être que x_a.

Ainsi, le système de propositions est union directe des segments $[\phi, I_a]$ qui sont aussi des systèmes de propositions (Théorème XIII). Enfin, $[\phi, I_a]$ est irréductible, car s'il était union directe de deux sous-treillis contenant plus d'un élément, ces sous-treillis seraient atomiques; soient alors P_1 et P_2 un point de chacun d'eux, alors $P_1 \cup P_2$ ne contiendrait pas de troisième point, ce qui est impossible, car P_1 et P_2 sont perspectifs. C. q. f. d.

Ainsi, un système de propositions est irréductible si et seulement si toute droite contient au moins trois points. C'est la condition de FANO[12]). Mais il existe d'autres conditions équivalentes, comme le montre le théorème suivant:

Théorème XX: Un système de propositions est irréductible si et seulement si seuls ϕ et I sont compatibles avec toutes les propositions du système.

Démonstration: Soit a une proposition différente de ϕ ou de I. Le treillis étant atomique, il existe deux points P et Q tels que $P \leqslant a$ et $Q \leqslant a'$.

Si le treillis est irréductible, il existe un troisième point R contenu dans $P \cup Q$. Montrons que R n'est pas compatible avec a:

$$a \cap R \leqslant a \cap (P \cup Q) = P ,$$

mais $a \cap R = P$ est impossible car $R \neq P$ donc $a \cap R = \phi$, de même $a' \cap R = \phi$ d'où

$$(a \cap R) \cup (a' \cap R) = \phi .$$

Par contre, si le treillis est réductible, toute union d'une partie des I_a est compatible avec toutes les propositions du système. C. q. f. d.

Etant donné un système de propositions irréductible, il lui correspond univoquement d'après le théorème XVIII une géométrie projective irréductible. Si la dimension est strictement plus grande que 3, cette géométrie projective peut toujours être réalisée par les sous-espaces d'un espace vectoriel (à gauche) V sur un corps K (M. L. DUBREIL-JACOTIN, L. LESIEUR, R. CROISOT[5])). Avant de généraliser un résultat de BIRKHOFF et VON NEUMANN[1]), donnons quelques définitions:

Nous dirons que l'application * est un antiautomorphisme involutif sur le corps K si:

$$(\alpha + \beta)^* = \alpha^* + \beta^* \,,$$

$$(\alpha \beta)^* = \beta^* \alpha^* \,,$$

$$(\alpha^*)^* = \alpha \,, \qquad \forall\, \alpha, \beta \in K \,.$$

Nous appellerons forme sesquilinéaire une application f de $V \times V$ dans K telle que:

$$f\,(x + \lambda\, y, z) = f(x, z) + \lambda\, f(y, z) \,,$$

$$f\,(x, y + \lambda\, z) = f(x, y) + f(x, z)\, \lambda^* \,,$$

pour tout $x, y, z \in V$ et $\lambda \in K$. Une telle forme sera dite hermitienne définie si, de plus:

$$f^*(y, x) = f(x, y) \,,$$

et

$$f(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0 \,.$$

Théorème XXI: Tout système de propositions irréductible et de dimension strictement plus grande que 3 peut être réalisé par la donnée d'un espace vectoriel (à gauche) V sur un corps K, d'un antiautomorphisme involutif * et d'une forme f hermitienne définie; un sous-espace vectoriel correspond à une proposition si et seulement si ce sous-espace peut être défini comme l'ensemble de tous les vecteurs x satisfaisant à

$$f(x, y_i) = 0 \,,$$

pour une certaine famille de $y_i \in V$.

Démonstration: BIRKHOFF et VON NEUMANN[1]) ont montré que toute orthocomplémentation sur le treillis des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie au moins égale à 3 peut être engendrée par une forme hermitienne définie*). De plus si f et g sont deux formes qui conduisent à la même orthocomplémentation, R. BAER[6]) démontre l'existence dans le corps K d'un élément $\gamma \neq 0$ tel que:

$$f(x, y) = g(x, y)\, \gamma \,, \quad \forall\, x \text{ et } y \,.$$

*) Il n'existe donc pas d'orthocomplémentation si le corps n'admet pas d'anti-automorphisme involutif.

Il en résulte:

$$g(x, y)\,\gamma\,\lambda^* = f(x, y)\,\lambda^* = f(x, \lambda\, y) = g(x, \lambda\, y)\,\gamma = g(x, y)\,\lambda^+\,\gamma\,,$$

où $^+$ désigne l'antiautomorphisme correspondant à la forme g. Mais, la forme étant définie, pour $x \neq 0$

$$g(x, x) = \alpha \neq 0 \text{ et } g(\alpha^{-1}\,x, x) = 1\,,$$

d'où la relation $\gamma\,\lambda^* = \lambda^+\,\gamma$.

Soit V_0 un sous-espace vectoriel de V et de dimension égale à 3. L'orthocomplémentation du système de propositions induit sur V_0 une orthocomplémentation.

Donnons-nous, une fois pour toutes, une forme f_0 engendrant cette orthocomplémentation. Si nous considérons alors un autre sous-espace vectoriel V_1, et si V_1 contient V_0 l'orthocomplémentation définie sur V_0 n'est autre que la restriction à V_0 de celle définie sur V_1 (théorème XII) et pour toute forme $g_1\,(x, y)$ engendrant l'orthocomplémentation de V_1, il existe γ tel que:

$$f_0(x, y) = g_0(x, y)\,\gamma\,,$$

où $g_0(x, y)$ est la restriction de g_1 sur V_0. Mais, de plus, $\lambda^+\,\gamma = \gamma\,\lambda^*$, ce qui permet de définir sur V_1 la forme $g_1(x, y)\,\gamma$ qui est l'unique forme hermitienne définie dont la restriction à V_0 est identique à $f_0(x, y)$.

Nous pouvons alors construire une forme hermitienne définie f sur l'espace V tout entier: il suffit de poser:

$$f(x, y) = f_{V_0, x, y}\,(x, y)\,,$$

où $f_{V_0, x\ y}$ est la forme définie comme précédemment mais pour V_1 égale au sous-espace vectoriel engendré par V_0, x et y. Si P est un point, on vérifie facilement que l'image de P' est le sous-espace vectoriel des vecteurs tels que:

$$f(x, y) = 0\,,$$

où y est un vecteur du rayon image de P. La démonstration s'achève en remarquant que toute proposition peut être écrite sous la forme

$$a = \bigcap_{P \leq a'} P'\,.$$

C. q. f. d.

Dans la suite, τ_c désignera un système de propositions réalisé (selon le théorème précédent) par un espace vectoriel sur l'un des trois corps suivants: les réels, les complexes ou les quaternions, l'antiautomorphisme involutif étant la conjugaison habituelle (qui se réduit à l'identité pour les réels). La forme hermitienne correspondante est une norme et détermine sur l'espace vectoriel une structure topologique préhilbertienne. En fait, on peut, dans ce cas, démontrer un résultat plus précis:

Théorème XXII: Tout système de propositions τ_c est isomorphe aux sous-espaces vectoriels fermés d'un certain espace de Hilbert.

Démonstration: L'image d'une proposition est un sous-espace vectoriel fermé. En effet, l'image de l'orthocomplément d'un point est fermé et l'image d'une proposition est l'intersection d'images d'orthocompléments de points. Montrons tout d'abord que tout sous-espace vectoriel fermé V est l'image d'une proposition. Considérons, parmi les points dont l'image est dans V un ensemble maximal M de points compatibles entre eux. Soit W l'image de l'union w des points de M.

1. $W \subset V$: si $x \in W$, x est sur l'image d'un point Q qui ne peut pas être compatible avec tous les points de M; il existe donc $P_1 \in M$ tel que $P_1 \leftrightarrow Q$ mais Q est sur une droite contenant P_1 et un point $Q_1 \leqslant \bigcup\limits_{\substack{P \neq P_1 \\ P \in M}} P$ (théorème XVIII, 5.). On a donc

$$| x |^2 = | y_1 |^2 + | x_1 |^2 ,$$

où y_1 est la composante orthogonale de x selon le rayon image de P_1. Ainsi, W est engendré topologiquement par l'ensemble M des rayons de V.

2. $V \subset W$: nous raisonnerons par l'absurde; soit $y \in V$ et supposons $y \notin W$. Si R est un point dont l'image contient y, il existe alors $S \leftrightarrow w$ tel que $S \cup w = R \cup w$ (théorème XV), mais S est sur une droite contenant R et un point de w dont l'image est dans $W \subset V$, donc l'image de S est dans V, mais $S \leftrightarrow P \ \forall\ P \in M$ d'où la contradiction.

Pour achever la démonstration du théorème, il faut encore montrer qu'un tel espace préhilbertien est complet. Il suffit pour cela de montrer qu'il est identique à son dual, ce qui est évident[7]), car nous avons le théorème de décomposition.

En effet, si P est un point et a une proposition telle que $P \nleqslant a$ et $P \nleqslant a'$, alors P est sur la droite union des points

$$Q = (a \cup P) \cap a' ,$$

et

$$R = (a' \cup P) \cap a ,$$

car

$$((a' \cup P) \cap a) \cup ((a \cup P) \cap a') = (a' \cup P) \cap (a \cup P) \geqslant P .$$

C. q. f. d.

Bibliographie

1) G. Birkhoff and J. von Neumann, Ann. of Math. *37*, 823 (1936).

2) G. W. Mackey, *Quantum mechanics and Hilbert space*, Amer. Math. Monthly *64*, N⁰ 8 part II, 45–57 (1957).

3) N. Bourbaki, *Théorie des ensembles* ch. I remarque, p. 22 A. S. I. Hermann (1954).

4) Kaplansky, Ann. of Math. *61*, 524–541 (1955).

5) M. L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur et R. Croisot, *Leçons sur la Théorie des treillis* ... (Gauthier-Villars 1953). Nous nous servirons d'un grand nombre de résultats de la troisième partie de cet ouvrage. En particulier nos théorèmes I, II, III correspondent respectivement au corollaire 1 du théorème 5, p. 288, au corollaire du théorème 9, p. 295, et au théorème 11, p. 293. La définition d'une géométrie projective à partir de ses points et de ses droites fait l'objet du paragraphe 3, p. 290. Enfin la réalisation d'une géométrie projective par les sous-espaces d'un espace vectoriel est traitée au dernier chapitre (Théorème 9, p. 370).

6) R. Baer, *Linear Algebra and projective Geometry* (Academic Press 1952), chapitre IV.

7) G. de Rham, Communication privée.

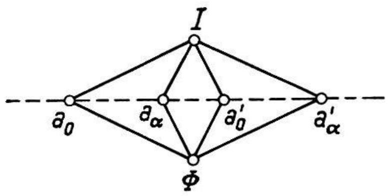
8) J. M. Jauch et C. Piron, Helvetica Physica Acta *36*, 827 (1963).

9) L'existence de systèmes de propositions non toutes compatibles entre elles, c'est-à-dire de systèmes de propositions non distributifs est un fait d'expérience. Donnons comme exemple

le système non modulaire que nous avons construit à l'aide de certains projecteurs spectraux de $\underline{p}$ et $\underline{q}$ au paragraphe 4. Le lecteur qui désirerait une discussion plus complète (ayant lu notre réf. 8) peut se rapporter pour un autre exemple au chapitre I (§ 2) du livre de P. A. M. DIRAC: *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford). Dans cet exemple on considère un faisceau de lumière traversant un cristal de tourmaline. Si le faisceau incident ne contient qu'un seul photon, à la sortie du cristal on observera, soit un photon entier d'énergie égale au photon incident, soit pas de photon du tout. Ainsi ce cristal constitue un appareil de mesure du type oui-non; notons a_0 la proposition correspondante. De même notons a_α la proposition correspondant à ce même cristal, mais dont l'axe optique a tourné d'un angle α. La proposition orthocomplément de a_0, définie par l'échange du oui et du non, correspond au cristal tourné de $\pi/2$. Nous voulons montrer que pour $\alpha \neq n\,\pi/2$ (où n est entier), a_0 et a_α constituent une paire de propositions incompatibles. Il suffit de vérifier:

$$x = (a_0 \cap a_\alpha) \cup (a_{\pi/2} \cap a_\alpha) \cup (a_0 \cap a_{\alpha+\pi/2} \cup (a_{\pi/2} \cap a_{\alpha+\pi/2}) \neq I\,.$$

Or $a_\alpha \cap a_\beta = \phi$ pour $(\alpha - \beta) \neq n\,\pi$ car par définition $a_\alpha \cap a_\beta$ est vraie si et si seulement a_α et a_β sont toutes deux vraies. Or il n'existe pas de photon pouvant avec certitude traverser chacun des deux cristaux si leurs axes optiques forment un angle différent de zéro. Ainsi $x = \phi$. En résumé le système de propositions correspondant aux polarisations possibles d'un photon est du type suivant:



[10]) A. M. GLEASON, *Mesures on closed subspaces of v Hilbert space*, J. of Rat. Mech. and Analysis *6*, 885–894 (1957).

[11]) N. BOURBAKI, *Théorie des ensembles*, fasc. de résultats, p. 37, A. S. I. HERMANN (1950).

[12]) G. FANO, Giorn. di Mathematica *30*, par. 4 (1892).

[13]) C. F. v. WEIZSÄCKER, *Komplementarität und Logik* I, II, et III; Naturwiss. *42*, 521 (1955), Z. Naturforschg. *13*a, 245 (1958) et *13*a, 705 (1958).