Zur Elektrodynamik

Zur Elektrodynamik

von **M. Fierz**

Seminar für theoretische Physik, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich

(Herrn Prof. O. KLEIN zu seinem 70. Geburtstag gewidmet)

(15. V. 64)

1. Warum gibt es keine magnetischen Ladungen?

In der klassischen Elektrodynamik kann man neben den elektrischen auch magnetische Ladungs- und Stromdichten betrachten. Dabei ist es natürlich, die Ladungsträger als im Raume kontinuierlich ausgebreitete Fluida darzustellen; denn Punktladungen sind in der klassischen Theorie ein fremdes Element, und sie geben ja auch zu Singularitäten Anlass.

Wir stellen uns also vor, es seien ein elektrisches und ein magnetisches Fluidum vorhanden. Der Zustand eines solchen wird durch ein Vierergeschwindigkeits-Feld gegeben. Diese beiden Felder seien u^k und v^k:

$$u^k u_k = v^k v_k = 1 , \tag{1.1}$$

v^k ist mit einer skalaren Massendichte μ und einer skalaren elektrischen Ladungsdichte ϱ verbunden. Ebenso gehören zu u^k eine Massendichte ν und eine magnetische Ladungsdichte τ.

Ist $F_{ik} = - F_{ki}$ das elektromagnetische Feld und $\tilde{F}^{ik} = \varepsilon^{ikem} F_{em}$ die duale Feldstärke, so lauten die Maxwell'schen Gleichungen:

$$F^{ik}_{\ |k} = \varrho\, v^i ; \quad \tilde{F}^{ik}_{\ |k} = \tau\, u^i . \tag{1.2}$$

$\left(\text{Dabei ist } a_{|k} \equiv \dfrac{\partial a}{\partial x^k} .\right)$

Ferner genügen v^k und u^k den Bewegungsgleichungen

$$\varrho\, v_l\, F^{lk} = (\mu\, v^l\, v^k)_{|k} ; \quad \tau\, u_l\, \tilde{F}^{lk} = (\nu\, u^l\, u^k)_{|l} . \tag{1.3}$$

Aus diesen Gleichungen folgen die Erhaltungssätze für Ladung und Ruhmasse:

$$(\varrho\, v^u)_{|u} = (\mu\, v^u)_{|u} = (\tau\, u^u)_{|u} = (\nu\, u^u)_{|u} = 0 . \tag{1.4}$$

Hieraus folgt weiter, dass ϱ/μ und τ/ν längs den zugehörigen Stromlinien konstant sind:

$$v^k \left(\frac{\varrho}{\mu}\right)_{|k} = u^k \left(\frac{\tau}{\nu}\right)_{|k} = 0 . \tag{1.5}$$

Wir verlangen, dass μ und $\nu \geqslant 0$ sein sollen.

Der Energie-Impulstensor, dessen Divergenz verschwindet, ist gegeben durch:

$$T^{kl} = F^{ks} F_s^{\ l} - \frac{1}{2} g^{kl} F_r^{\ s} F_s^{\ r} + \mu v^k v^l + \nu u^k u^l . \tag{1.6}$$

Ersetzt man v^k durch $-v^k$ und zugleich ϱ durch $-\varrho$, so sind alle Gleichungen invariant. Darum ist es keine Einschränkung v^0 und $u^0 > 0$ vorauszusetzen. (Man kann aber auch ϱ und τ als positiv annehmen. Dann strömen die negativen Ladungen «in die Vergangenheit».)

In dieser Theorie gibt es keine Potentiale, da keines der Gleichungssysteme (1.2) homogen ist. Man kann zwar jede der beiden Gleichungen (2) für sich durch je ein Potential Φ_u und Ψ_u integrieren, aber F_{iu} wird dann:

$$F_{kl} = \phi_{k/l} - \phi_{l/k} + g_{kr} g_{ls} \sum \varepsilon^{rsqr} (\psi_{q/r} - \psi_{r/q}) ,$$

und dieser Ausdruck ist in die Bewegungsgleichungen (1.3) einzusetzen. Ein Gewinn an Einfachheit oder Durchsichtigkeit der Gleichungen ist damit nicht verbunden. F_{ik} ist eben, in einem gegebenen Zeitmoment, ein beliebiges schiefsymmetrisches Tensorfeld. Da also Potentiale im üblichen Sinne fehlen, ist es auch nicht möglich, die Feldgleichungen dieser Theorie, so wie dies in der Maxwell'schen Theorie sonst möglich ist, aus einem Variationsprinzip herzuleiten. Damit ist eng verbunden, dass gegenüber dieser Theorie die bisher bekannten Methoden, einem klassischen Modell ein quantenmechanisches Modell zuzuordnen, versagen.

Es ist sehr auffallend, dass die Quantenelektrodynamik ihren Entwicklungen eine klassische Feldtheorie zugrunde legt, in der die Existenz von Potentialen wesentlich benützt wird. Hier setzt man den Strom nicht gleich ϱv^k, wobei v^k einer Lorentzschen Gleichung von der Art (3) genügt, sondern man führt zum Beispiel ein komplexes Skalarfeld ψ ein, das der Klein-Gordonschen Differentialgleichung genügt. In dieser beschreiben die Potentiale die Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld, und neben der Eichtransformation, welcher man die Potentiale unterwerfen kann, tritt nun die Umeichnung zweiter Art auf, die auf das Skalarfeld ψ wirkt. Damit hat man sich aber die Möglichkeit, neben den elektrischen noch magnetische Ladungen einzuführen, von vornherein abgeschnitten.

Nun hat allerdings DIRAC (P. R. S. *133*, pg. 60 (1931)) schon vor Jahren die Möglichkeit untersucht, singuläre Magnetpole in die Quantentheorie einzuführen. Diese erweisen sich jedoch bei genauerem Zusehen gar nicht als «Pole», sondern sie sind Endpunkte eines unendlich dünnen Solenoides, aus welchem ein endlicher Fluss herausquillt. In der Tat macht man zur Beschreibung eines solchen «Pols» den folgenden Ansatz:

$$A_x = \frac{\mu}{r} \frac{y}{r-z}, \qquad A_y = -\frac{\mu}{r} \frac{x}{r-z}, \qquad A_z = 0$$

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} ,$$

so hat der Feldfluss längs der positiven z-Achse eine δ-artige Singularität. Nach dem Stokeschen Satz ist ja

$$\int_f (\boldsymbol{B}, d\boldsymbol{\sigma}) = \oint_f (\boldsymbol{A}, d\boldsymbol{s}) .$$

Wenn für f ein kleiner Kreis mit dem Radius ϱ gewählt wird, dessen Zentrum von der positiven z-Achse senkrecht getroffen wird, so findet man

$$\lim_{\varrho=0} \oint_f (\boldsymbol{A}, d\boldsymbol{s}) = -4\pi\mu$$

für alle $z > 0$. Darum verschwindet

$$\int (\boldsymbol{B}, d\boldsymbol{\sigma})$$

für jede geschlossene Fläche.

Die Dynamik eines derartigen Gebildes ist ungemein verwickelt, da es, falls es bewegt wird, längs seiner ganzen Erstreckung Licht ausstrahlen wird. Dass das ruhende Gebilde in der Quantenmechanik der Elektronen wie eine Punktladung wirkt, wenn der Feldfluss μ die Bedingung $(e\,\mu)/(\hbar\,c) = 1$ erfüllt, ist darum physikalisch irreführend.

In der Quantenelektrodynamik scheint es mir somit unmöglich zu sein, magnetische Ladungen einzuführen. Denn in dieser Theorie spielen die Potentiale, und darum auch die Eichgruppe, eine wesentliche Rolle; man denke nur an die sogenannten Superselection Rules. In dieser Theorie besteht darum keine Symmetrie zwischen $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$*). Die Theorie hat zudem die Eigenschaft, dass in ihr die Lichtquanten als Grenzfall neutraler Vektorteilchen mit endlicher Ruhemasse aufgefasst werden können**). In einer Theorie, in der das Lichtquant eine kleine Masse hat, ist es aber auch in der klassischen Theorie unmöglich, magnetische Ladungen einzuführen. All das zeigt, dass die Hypothese magnetischer Ladungen in keiner Weise in die Struktur dieser Theorie passt und in ihr nicht beschrieben werden kann.

Darum ist es auch unmöglich, anzugeben, welche Eigenschaften solche Gebilde, die doch quantentheoretisch-relativistisch beschrieben werden müssten, haben sollen.

So sprechen also alle Indizien gegen die Existenz magnetisch geladener Teilchen.

2. Allgemeine Lösung der klassischen Feldgleichungen im radialen Fall.

Wir betrachten den Fall, in welchem keine magnetischen Ladungen vorhanden sind. Ferner sei $\mu/\varrho = 1$, das heisst die elektrische Materie sei «homogen».

$\mathfrak{E}$ und $\boldsymbol{v}$ seien beide radial gerichtet, dann verschwindet $\mathfrak{B}$ aus Symmetriegründen. Mit

$$\mathfrak{E}_r = E\,, \quad v_r = v\,, \quad v^0 = \sqrt{1+v^2}$$

lauten die Maxwellschen Gleichungen:

$$d(r^2\,E) = r^2\,\varrho\,\sqrt{1+v^2}\;dr - r^2\,\varrho\,v\,dt\,. \tag{2.1}$$

Die Bewegungsgleichung (1.3) wird

$$E = v + \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}\,\frac{\partial v}{\partial r}\,. \tag{2.2}$$

*) Da $\dfrac{e^2}{\hbar\,c} = \dfrac{1}{137}$, zerstört auch die Bedingung $\dfrac{e\,\mu}{\hbar\,c} = 1$ eine solche Symmetrie.

**) Die Auffassung der Ruhemasse null als Grenzfall endlicher Masse scheint mir auch zu erklären, warum die Wignerschen Darstellungen mit «unendlichem» Spin in der Natur nicht vorkommen.

Ich setze nun

$$u = \frac{1}{r^2 \varrho}, \quad F = r^2 E,$$

dann kann (2.1) wie folgt geschrieben werden

$$dr = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}} dF + \frac{v}{\sqrt{1+v^2}} dt, \tag{2.3}$$

F und t gelten jetzt als unabhängige Variable.

Da

$$\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)_F = \frac{v}{\sqrt{1+v^2}}, \tag{2.4}$$

so gilt, gemäss (2.2) und (2.4),

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_F = \frac{F}{r^2}. \tag{2.5}$$

Setzt man

$$\tau = \frac{t}{F}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial \tau},$$

so folgt hieraus

$$\frac{r}{F} = \frac{1}{\sqrt{v'}}. \tag{2.6}$$

Differenziert man (2.6) nach τ und vergleicht mit (2.4), so erhält man

$$\frac{v}{\sqrt{1+v^2}} + \frac{v''}{2\,(v')^{3/2}} = 0. \tag{2.7}$$

(2.7) kann man integrieren:

$$\sqrt{v'} + \sqrt{1+v^2} = C(F). \tag{2.8}$$

Aus (2.5) folgt somit

$$r = \frac{F}{C(F) - \sqrt{1+v^2}}. \tag{2.9}$$

Nochmalige Integration von (2.8) liefert:

$$\tau = \frac{1}{2\,(C^2-1)} \left\{ \frac{4\,Cx}{C-1+(C+1)\,x^2} + \frac{2}{\sqrt{C^2-1}} \lg \frac{\sqrt{C-1}+\sqrt{C+1}\,x}{\sqrt{C-1}-\sqrt{C+1}\,x} \right\} + D(F), \tag{2.10}$$

wobei

$$v = \frac{2\,x}{1-x^2}.$$

Wenn man aus (2.9) F als Funktion von r und v ausrechnet und in (2.10) einsetzt, so erhält man v als Funktion von t und r $C(F)$ und $D(F)$, entsprechend den Anfangswerten $v(r, 0)$ und $\varrho(r, 0)$.