

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 39 (1966)
Heft: 2

Artikel: S-Matrix und interpolierende Felder
Autor: Schneider, Walter
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-113677>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 15.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

S-Matrix und interpolierende Felder

von **Walter Schneider**

Seminar für theoretische Physik, ETH Zürich

(27. XII. 65)

Abstract. For a certain class of S -matrices LSZ [1]¹⁾ gave a formal construction of interpolating fields $A(x)$ satisfying the asymptotic condition $\lim_{t \rightarrow \pm \infty} A(x) = A_{out}(x)$, $A_{out}(x) = S^{-1} A_{in}(x) S$. The purpose of this paper is to formulate this construction in a mathematically rigorous manner.

1. Einleitung

Ein bisher ungelöstes Problem der Quantenfeldtheorie ist der Nachweis der Existenz nichttrivialer Modelle, die sämtlichen Wightmanschen Axiomen genügen [5]; nichttrivial bedeutet in diesem Zusammenhang, dass das betreffende Modell zu einer von **1** verschiedenen S -Matrix führt.

Das Ziel dieser Arbeit ist die Konstruktion nichttrivialer Modelle, die einem Teil der Wightmanschen Axiome genügen. Um die Einschränkung des Axiomensystems genau zu erfassen, sei daran erinnert, dass sich die Wightmanschen Axiome für ein einziges reelles Skalarfeld wie folgt formulieren lassen:

0. Der Zustandsraum ist ein Hilbertraum $\mathcal{H}$. In $\mathcal{H}$ ist eine stetige unitäre Darstellung $U(a, \Lambda)$ der Einkomponente $P_{\uparrow}^{\uparrow}$ der Poincaré-Gruppe gegeben. Als unitärer Operator besitzt $U(a, 1)$ die Darstellung $U(a, 1) = \exp i P^{\mu} a_{\mu}$; das Spektrum der selbstadjungierten Operatoren P^{μ} liegt voraussetzungsgemäss in $\{p / (p, p) > 0, p^0 > 0\} \cup \{0\}$.

Es existiert ein bis auf einen Phasenfaktor eindeutiger Zustand Ω , das sogenannte Vakuum mit $U(a, \Lambda) \Omega = \Omega$.

1. Jedem $\tilde{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ (Raum der stark abfallenden C^{∞} -Funktionen [6]) ist ein Operator $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$ zugeordnet. $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$ ist definiert auf einem dichten Bereich $D \subset \mathcal{H}$, derart dass $\tilde{A}(\tilde{\varphi}) D \subset D$ und $(\Psi, \tilde{A}(\tilde{\varphi}) \Phi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$ (Raum der temperierten Distributionen [6]) für $\Psi, \Phi \in D$.

$\tilde{A}$ ist symmetrisch, das heisst $(\Psi, \tilde{A}(\tilde{\varphi}) \Phi) = (\tilde{A}(\tilde{\varphi}^*) \Psi, \Phi)$ mit $\tilde{\varphi}^*(p) = \overline{\tilde{\varphi}(-p)}$. Ω gehört zu D . D ist invariant unter $U(a, \Lambda)$: $U(a, \Lambda) D \subset D$.

2. Auf D gilt

$$U(a, \Lambda) \tilde{A}(\tilde{\varphi}) U(a, \Lambda)^{-1} = \tilde{A}(\tilde{\varphi}_{(a, \Lambda)})$$

mit

$$\tilde{\varphi}_{(a, \Lambda)}(p) = e^{-i p a} \tilde{\varphi}(\Lambda^{-1} p) .$$

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 106.

3. Lokalität: Sind die Träger der Fouriertransformierten von $\tilde{\varphi}_1$ und $\tilde{\varphi}_2$ raumartig separiert, so gilt auf D

$$[\tilde{A}(\tilde{\varphi}_1), \tilde{A}(\tilde{\varphi}_2)] = 0.$$

Bemerkung: Axiom 1 kann dahingehend verallgemeinert werden, dass jedem $\tilde{\varphi} \in \mathcal{W} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ ein Operator $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$ zugeordnet wird mit der Eigenschaft $(\Psi, \tilde{A}(\tilde{\varphi}) \Phi) \in \mathcal{W}' \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^4)$. Dabei ist $\mathcal{W}$ ein topologischer linearer Raum, $\mathcal{W}'$ sein Dualraum [7]; die durch $\mathcal{W}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ induzierte Topologie kann größer sein als die übliche Topologie in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$.

Die im folgenden konstruierten Modelle erfüllen Axiom 0, Axiom 1 in der in obiger Bemerkung abgewandelten Form für einen noch zu beschreibenden topologischen Raum $\mathcal{W}$ (der leider $\mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$ nicht enthält) und Axiom 2.

2. Formale Betrachtungen [1, 2]

Es sei $A_{in}(x)$ ein freies Feld zur Masse $m > 0$. Die Klasse der betrachteten S-Matrizen ist durch

$$S = e^{i\eta} \quad (2.1)$$

$$\eta = \sum_{k=4}^n \frac{1}{k!} \int h_k(x_1, \dots, x_k) : A_{in}(x_1) \dots A_{in}(x_k) : d^4 x_1 \dots d^4 x_k \quad (2.2)$$

charakterisiert, wobei die Funktionen $h_k(x_1 \dots x_k)$ den Bedingungen

- a) $h_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) = h_k(x_1, \dots, x_k), \begin{pmatrix} 1 \dots k \\ i_1 \dots i_k \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_k$
- b) $\overline{h_k(x_1, \dots, x_k)} = h_k(x_1, \dots, x_k)$
- c) $h_k(\Lambda x_1 + a, \dots, \Lambda x_k + a) = h_k(x_1, \dots, x_k) \quad (a, \Lambda) \in P_+^\uparrow$
- d) $h_k(-x_1, \dots, -x_k) = h_k(x_1, \dots, x_k)$

zu genügen haben. Die Bedingung a) wird durch die totale Symmetrie des Wick-Produkts: $A_{in}(x_1) \dots A_{in}(x_k)$: nahegelegt; auf Grund von b) ist η ein symmetrischer Operator, die S-Matrix wegen (2.1) also ein unitärer Operator. Aus c) folgt

$$[U(a, \Lambda), \eta] = 0 \quad (2.3)$$

wobei $U(a, \Lambda)$ die zu $A_{in}(x)$ gehörige unitäre Darstellung von $P_+^\uparrow$ (Einskomponente der Poincaré-Gruppe) ist. (2.1) und (2.3) implizieren

$$[U(a, \Lambda), S] = 0 \quad (2.4)$$

das heisst die S-Matrix ist invariant unter der Poincaré-Gruppe.

Ist Θ_{in} eine antiunitäre Involution mit

$$\Theta_{in} A_{in}(x) \Theta_{in} = A_{in}(-x) \quad (2.5)$$

so folgt aus d)

$$\Theta_{in} \eta \Theta_{in} = \eta \quad (2.6)$$

was mit (2.1)

$$\Theta_{in} S \Theta_{in} = S^{-1} \quad (2.7)$$

ergibt.

Definiert man

$$A_{out}(x) = S^{-1} A_{in}(x) S \quad (2.8)$$

und

$$\Theta = \Theta_{in} S \quad (= S^{-1} \Theta_{in}) \quad (2.9)$$

so ist Θ eine antiunitäre Involution mit

$$\Theta A_{in}(x) \Theta = A_{out}(-x) \quad (2.10)$$

Analog ist

$$\Theta_{out} = S^{-1} \Theta_{in} S \quad (2.11)$$

eine antiunitäre Involution mit

$$\Theta_{out} A_{out}(x) \Theta_{out} = A_{out}(-x) \quad (2.12)$$

Θ_{in} ist durch $\Theta_{in} \Omega = \Omega$ (Ω Vakuumzustand) eindeutig festgelegt; es gilt dann auch $\Theta \Omega = \Omega$.

(2.9) führt zu

$$\Theta S \Theta = S^{-1} \quad (2.13)$$

was nichts anderes als die TCP-Invarianz der S-Matrix bedeutet.

Führt man die einparametrische Schar unitärer Operatoren $e^{i\lambda\eta}$, λ reell, ein, so erhält man durch formale Differentiation nach λ

$$\frac{d}{d\lambda} (e^{-i\lambda\eta} A_{in}(x) e^{i\lambda\eta}) = i e^{-i\lambda\eta} [A_{in}(x), \eta] e^{i\lambda\eta} \quad (2.14)$$

oder durch Integration

$$A_{out}(x) = A_{in}(x) + i \int_0^1 d\lambda e^{-i\lambda\eta} [A_{in}(x), \eta] e^{i\lambda\eta}. \quad (2.15)$$

Mit (2.2) folgt

$$[A_{in}(x), \eta] = i \int d^4 y \Delta(x-y) \vartheta(y) \quad (2.16)$$

$$\vartheta(y) = \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k!} \int h_{k+1}(y, x_1, \dots, x_k): A_{in}(x_1) \dots A_{in}(x_k): d^4 x_1 \dots d^4 x_k. \quad (2.17)$$

Setzt man (2.16) in (2.15) ein, so erhält man

$$A_{out}(x) = A_{in}(x) - \int_0^1 d\lambda e^{-i\lambda\eta} \left(\int d^4 y \Delta(x-y) \vartheta(y) \right) e^{i\lambda\eta}. \quad (2.18)$$

Ausgehend von (2.18) führt man das interpolierende Feld $A(x)$ ein:

$$A(x) = A_{in}(x) + \int_0^1 d\lambda e^{-i\lambda\eta} \left(\int d^4 y \Delta_{ret}(x-y) \vartheta(y) \right) e^{i\lambda\eta} \quad (2.19)$$

$$\Delta_{ret}(\xi) = -\Theta(\xi^0) \Delta(\xi). \quad (2.20)$$

Aus (2.19) folgt

$$\Theta A(x) \Theta = A_{out}(-x) + \int_0^1 d\lambda e^{i\lambda\eta} \left(\int d^4y \Delta_{ret}(x-y) \Theta \vartheta(y) \Theta \right) e^{-i\lambda\eta}, \quad (2.21)$$

wobei von $\Theta e^{i\lambda\eta} \Theta = e^{-i\lambda\eta}$ (Analogon zu (2.13)) und $\overline{\Delta_{ret}(\xi)} = \Delta_{ret}(\xi)$ Gebrauch gemacht wurde. Die Variablentransformation $\lambda \rightarrow 1 - \lambda$ führt zu

$$\Theta A(x) \Theta = A_{out}(-x) + \int_0^1 d\lambda e^{-i\lambda\eta} \left(\int d^4y \Delta_{ret}(x-y) S \Theta \vartheta(y) \Theta S^{-1} \right) e^{i\lambda\eta} \quad (2.22)$$

was mit $S \Theta = \Theta_{in}$ und der Bedingung (d)

$$\Theta A(x) \Theta = A_{out}(-x) + \int_0^1 d\lambda e^{-i\lambda\eta} \left(\int d^4y \Delta_{ret}(x-y) \vartheta(-y) \right) e^{i\lambda\eta} \quad (2.23)$$

ergibt. Drückt man in (2.23) $A_{out}(-x)$ nach (2.18) aus und verwendet man $\Delta(-\xi) = -\Delta(\xi)$ nebst (2.20), so ist schliesslich

$$\Theta A(x) \Theta = A_{in}(-x) + \int_0^1 d\lambda e^{-i\lambda\eta} \left(\int d^4y \Delta_{ret}(-x-y) \vartheta(y) \right) e^{i\lambda\eta}. \quad (2.24)$$

Vergleich mit (2.19) ergibt [2]

$$\Theta A(x) \Theta = A(-x). \quad (2.25)$$

Diese rein formalen Betrachtungen sollen im folgenden einer mathematisch strengen Behandlung unterzogen werden, das heisst also, dass Definitions- und Bildbereich der eingeführten Operatoren in einem konkreten Hilbertraum angegeben werden.

3. Fockraum und freies Feld

Die Sequenz von Hilberträumen $\mathcal{H}_N$, $N = 0, 1, 2, \dots$ sei wie folgt definiert:

$$\mathcal{H}_0 = \mathbb{C} \quad (3.1)$$

$$(\Phi_0, \Psi_0) = \overline{\Phi_0} \Psi_0 \quad (3.2)$$

$$\mathcal{H}_N = \left\{ \Phi_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \mid \Phi_N(\mathbf{p}_{i_1}, \dots, \mathbf{p}_{i_N}) = \Phi_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N), \right. \\ \left. \int \prod_1^N \frac{d^3 p_i}{2\omega_i} |\Phi_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)|^2 < \infty \right\}, \quad (3.3)$$

$$(\Phi_N, \Psi_N) = \int \prod_1^N \frac{d^3 p_i}{2\omega_i} \overline{\Phi_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)} \Psi_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N). \quad (3.4)$$

Dabei ist $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^3$, $\omega_{\mathbf{p}} = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} > 0$, $m > 0$.

Der Fockraum $\mathcal{H}$ ist die direkte Summe der Hilberträume $\mathcal{H}_N$, also

$$\mathcal{H} = \bigoplus_0^\infty \mathcal{H}_N = \left\{ \Phi = \{\Phi_N\}_0^\infty \mid \Phi_N \in \mathcal{H}_N, \sum_0^\infty (\Phi_N, \Phi_N) < \infty \right\}, \quad (3.5)$$

$$(\Phi, \Psi) = \sum_0^\infty (\Phi_N, \Psi_N). \quad (3.6)$$

$\mathcal{H}$ ist ein separabler Hilbertraum.

Lemma 1: Die Menge D_N sei dicht in $\mathcal{H}_N$, $N = 0, 1, 2, \dots$. Dann ist die Menge

$$D = \{\Phi \in \mathcal{H} \mid \Phi_N \in D_N, \Phi_N = 0 \text{ für } N > N_0(\Phi)\} \quad (3.7)$$

dicht in $\mathcal{H}$.

Beweis: $D^\perp$ sei das orthogonale Komplement von D , das heisst es ist $(\Phi, \Psi) = 0$ für $\Phi \in D^\perp$, $\Psi \in D$. Nun enthält D alle Vektoren $\Psi = \{0, \dots, 0, \Psi_N, 0, \dots\}$, $\Psi_N \in D_N$, $N = 0, 1, 2, \dots$. Daher ist für beliebiges $\Phi \in D^\perp$ nach (3.6) $(\Phi, \Psi) = (\Phi_N, \Psi_N) = 0$ für alle $\Psi_N \in D_N$, $N = 0, 1, 2, \dots$, das heisst $\Phi_N = 0$, $N = 0, 1, 2, \dots$. Somit ist $D^\perp = 0$, q.e.d.

Das freie Feld $\tilde{A}_{in}(\tilde{\varphi})$ ist durch

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_{in}(\tilde{\varphi}) \Phi)_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) &= \sqrt{2\pi} \sqrt{N+1} \int \frac{d^3 p}{2\omega_p} \tilde{\varphi}(\omega_p, \mathbf{p}) \Phi_{N+1}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_N) \\ &+ \sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \tilde{\varphi}(-\omega_i, -\mathbf{p}_i) \Phi_{N-1}(\mathbf{p}_1 \dots \hat{\mathbf{p}}_i \dots \mathbf{p}_N) \end{aligned} \quad (3.8)$$

definiert. $(\tilde{A}_{in}(\tilde{\varphi}) \Phi)_N$ ist genau dann in $\mathcal{H}_N$ für beliebiges $\Phi \in \mathcal{H}$ falls

$$\int \frac{d^3 p}{2\omega_p} \{ |\tilde{\varphi}(\omega_p, \mathbf{p})|^2 + |\tilde{\varphi}(-\omega_p, -\mathbf{p})|^2 \} < \infty \quad (3.9)$$

gilt. Die Menge aller Funktionen $\tilde{\varphi}(p)$, für die (3.9) gilt, bilden einen Hilbertraum $\mathfrak{H}$.

Der Definitionsbereich $D_{\tilde{\varphi}}$ von $\tilde{A}_{in}(\tilde{\varphi})$, $\tilde{\varphi} \in \mathfrak{H}$, besteht aus allen $\Phi \in \mathcal{H}$ mit

$$\| \tilde{A}_{in}(\tilde{\varphi}) \Phi \|^2 < \infty. \quad (3.10)$$

Erfüllt D die Voraussetzungen des Lemma 1, wobei zusätzlich $D_N = \mathcal{H}_N$ gelten soll, so ist $D \subset D_{\tilde{\varphi}}$; insbesondere ist also $D_{\tilde{\varphi}}$ dicht in $\mathcal{H}$.

Es gilt der

Satz 1: [3]

$$\tilde{A}_{in}(\tilde{\varphi}^*) = [\tilde{A}_{in}(\tilde{\varphi})]^* \quad (3.11)$$

das heisst $\tilde{A}_{in}(\tilde{\varphi}^*)$ ist der zu $\tilde{A}_{in}(\tilde{\varphi})$ adjungierte Operator. Dabei ist $\tilde{\varphi}^*(p) = \overline{\tilde{\varphi}(-p)}$.

Es ist üblich $\tilde{A}_{in}(\tilde{\varphi}) = \tilde{A}_{in}^+(\tilde{\varphi}) + \tilde{A}_{in}^-(\tilde{\varphi})$ zu setzen mit

$$(\tilde{A}_{in}^+(\tilde{\varphi}) \Phi)_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \sqrt{2\pi} \sqrt{N+1} \int \frac{d^3 p}{2\omega_p} \tilde{\varphi}(\omega_p, \mathbf{p}) \Phi_{N+1}(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \quad (3.12)$$

$$(\tilde{A}_{in}^-(\tilde{\varphi}) \Phi)_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N \tilde{\varphi}(-\omega_i, -\mathbf{p}_i) \Phi_{N-1}(\mathbf{p}_1, \dots, \hat{\mathbf{p}}_i, \dots, \mathbf{p}_N) \quad (3.13)$$

$\tilde{A}_{in}^+(\tilde{\varphi})$ heisst Vernichtungs-, $\tilde{A}_{in}^-(\tilde{\varphi})$ Erzeugungsoperator.

Der Raum $\mathfrak{S}$ ist der grösstmögliche Raum von sogenannten Testfunktionen für das freie Feld $\tilde{A}_{in}$. Es wird im folgenden nötig sein, passende Unterräume (mit im allgemeinen feineren Topologien versehen als mit der induzierten) von $\mathfrak{S}$ zu finden, auf welchen nebst $\tilde{A}_{in}$ weitere Operatoren als lineare Funktionale definiert werden können.

Die antiunitäre Involution Θ_{in} ist durch

$$(\Theta_{in} \Phi)_0 = \overline{\Phi_0} \quad (3.14)$$

$$(\Theta_{in} \Phi)_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \overline{\Phi_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)}$$

charakterisiert. Man überzeugt sich leicht, dass

$$\Theta_{in} \tilde{A}_{in}(\tilde{\varphi}) \Theta_{in} = \tilde{A}_{in}(\overline{\tilde{\varphi}}) \quad (3.15)$$

gilt. Das stimmt formal mit (2.5) überein, wenn man

$$\int d^4x A_{in}(x) \varphi(x) = \tilde{A}_{in}(\tilde{\varphi}) \quad \tilde{\varphi}(p) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^4x \varphi(x) e^{-ipx} \quad (3.16)$$

setzt.

In $\mathcal{H}$ ist eine unitäre Darstellung $U(a, \Lambda)$ der Poincaré-Gruppe $P_+^\uparrow$ gegeben:

$$(U(a, \Lambda) \Phi)_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = e^{i \sum_{k=1}^N p_k a} \Phi_N(\Lambda^{-1} \mathbf{p}_1, \dots, \Lambda^{-1} \mathbf{p}_N) \\ p_r^0 = \omega_{\mathbf{p}_r} \quad r = 1, \dots, N. \quad (3.17)$$

Aus (3.8) und (3.17) folgt

$$U(a, \Lambda) \tilde{A}_{in}(\tilde{\varphi}) U(a, \Lambda)^{-1} = \tilde{A}_{in}(\tilde{\varphi}_{(a, \Lambda)}) \quad (3.18)$$

$$\tilde{\varphi}_{(a, \Lambda)}(p) = \varphi(\Lambda^{-1} p) e^{-ip a}. \quad (3.19)$$

Um einen für das folgende geeigneten Definitionsbereich charakterisieren zu können, wird der Begriff der Hölderstetigkeit eingeführt und einige Lemmata über hölderstetige Funktionen bewiesen.

Definition: Die Funktion $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$, heisst hölderstetig, falls eine Konstante $\mu = \mu(f)$, $0 < \mu \leq 1$ und eine Konstante $\varrho(f) > 0$ existieren mit

$$|f(x') - f(x)| \leq \varrho(f) \sum_{i=1}^m |x'_i - x_i|^\mu \quad (3.20)$$

für alle $x, x' \in \mathbb{R}^m$; $\varrho(f)$ heisst Hölderkonstante, μ Hölderindex. Eine hölderstetige Funktion f mit Hölderindex μ heisse kurz $H(\mu)$ -stetig.

Mit $\varrho(f)$ ist auch $\varrho'(f) > \varrho(f)$ Hölderkonstante; das Infimum $\varrho_0(f)$ aller Hölderkonstanten ist ebenfalls eine Hölderkonstante. $\varrho_0(f)$ ist eine Seminorm, das heisst es gilt:

$$\varrho_0(f) \geq 0$$

$$\varrho_0(\lambda f) = |\lambda| \varrho_0(f)$$

$$\varrho_0(f + g) \leq \varrho_0(f) + \varrho_0(g), \quad (3.21)$$

wovon man sich leicht überzeugt.

Eine $H(\mu)$ -stetige Funktion ist stetig im gewöhnlichen Sinn. Besitzt f beschränkte partielle Ableitungen erster Ordnung, so ist f $H(1)$ -stetig (Mittelwertsatz der Differentialrechnung).

Lemma 2: Ist $f(x_1, \dots, x_m)$ $H(\mu)$ -stetig in jeder Variablen separat, so ist f $H(\mu)$ -stetig. Trivialerweise gilt die Umkehrung.

Beweis: Nach Voraussetzung ist

$$|f(x_1, \dots, x'_i, \dots, x_m) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_m)| \leq \varrho_i(f) |x'_i - x_i|^\mu \quad i = 1, \dots, m.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x)| &= \left| \sum_{k=1}^m (f(x_1, \dots, x_{k-1}, x'_k, \dots, x'_m) - f(x_1, \dots, x_k, x'_{k+1}, \dots, x'_m)) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^m \varrho_k(f) |x'_k - x_k|^\mu \\ &\leq \varrho(f) \sum_{k=1}^m |x'_k - x_k|^\mu \quad \varrho(f) = \max_k \varrho_k(f). \end{aligned} \quad \text{q. e. d.}$$

Lemma 3: Eine beschränkte $H(\mu)$ -stetige Funktion f ist $H(\nu)$ -stetig für

$$0 < \nu \leq \mu.$$

Beweis: Nach Lemma 2 genügt es zu zeigen, dass f in jeder Variablen separat $H(\nu)$ -stetig ist. Für $|x'_i - x_i| \leq 1$ folgt das aus $|x'_i - x_i|^\mu \leq |x'_i - x_i|^\nu$, $0 < \nu \leq \mu$; für $|x'_i - x_i| > 1$ ist es eine Konsequenz der Beschränktheit von f .

Lemma 4: $f(x)$, $x \in \mathbb{R}^r$, sei $H(\mu)$ -stetig, $g_k(y)$, $y \in \mathbb{R}^s$, sei $H(\nu)$ -stetig, $k = 1, \dots, r$. Dann ist $h(y) = f(g(y))$ $H(\mu \nu)$ -stetig.

Beweis: Die $H(\mu \nu)$ -Stetigkeit von $h(y)$ ist eine unmittelbare Folge der Ungleichung

$$\left(\sum_{i=1}^s a_i \right)^\mu \leq \sum_{i=1}^s a_i^\mu \quad a_i \geq 0$$

die man durch Induktion nach s beweist. Für $s = 2$ erhält man sie aus

$$(1 + b)^\mu \leq 1 + b \leq 1 + b^\mu \quad 0 \leq b \leq 1,$$

indem man entweder $b = a_1/a_2$ oder $b = a_2/a_1$ setzt.

Lemma 5: $f(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^r$, $y \in \mathbb{R}^s$, und $g(y, z)$, $y \in \mathbb{R}^s$, $z \in \mathbb{R}^t$, seien beschränkt und $H(\mu)$ -stetig. Dann ist auch $h(x, y, z) = f(x, y) g(y, z)$ $H(\mu)$ -stetig und beschränkt.

Beweis: Sind $\sigma(f)$ und $\sigma(g)$ Schranken von f bzw. g , so ist $\sigma(f) \sigma(g)$ eine Schranke von h . Weiter folgt

$$\begin{aligned} &|f(x', y') g(y', z') - f(x, y) g(y, z)| \\ &= |f(x', y') g(y', z') - f(x, y) g(y', z') + f(x, y) g(y', z') - f(x, y) g(y, z)| \\ &\leq \sigma(g) \varrho(f) \left(\sum_{i=1}^r |x'_i - x_i|^\mu + \sum_{i=1}^s |y'_i - y_i|^\mu \right) \\ &+ \sigma(f) \varrho(g) \left(\sum_{i=1}^s |y'_i - y_i|^\mu + \sum_{i=1}^t |z'_i - z_i|^\mu \right) \leq (\sigma(g) \varrho(f) + \sigma(f) \varrho(g)) \\ &\times \left(\sum_{i=1}^r |x'_i - x_i|^\mu + \sum_{i=1}^s |y'_i - y_i|^\mu + \sum_{i=1}^t |z'_i - z_i|^\mu \right) \end{aligned} \quad \text{q. e. d.}$$

Sei nun D ein Bereich, der den Voraussetzungen von Lemma 1 genügt. Es wird folgende spezielle Wahl von D_N getroffen:

D_N besteht aus allen Φ_N , die hölderstetig sind und einen kompakten Träger haben. Offensichtlich existiert dann zu $\Phi \in D$ eine Konstante $C(\Phi)$ und ein Index $\mu = \mu(\Phi)$ derart, dass $\Phi_N H(\mu)$ -stetig ist und $C(\Phi)$ Schranke und Hölderkonstante von Φ_N ist; das ist eine unmittelbare Folge von Lemma 3.

D_N ist dicht in $\mathcal{H}_N$, da bereits die Teilmenge der differenzierbaren $\Phi_N \in D_N$ dicht in $\mathcal{H}_N$ ist.

Es gilt der Satz 2:

$$U(a, \Lambda) D \subset D. \quad (3.22)$$

Beweis: Sei $\Phi \in D$. Nach (3.17) ist

$$(U(a, \Lambda) \Phi)_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \exp i \left(a^0 \sum_{k=1}^N \omega_k - \mathbf{a} \sum_{k=1}^N \mathbf{p}_k \right) \Psi_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$$

$$\Psi_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \Phi_N(\Lambda^{-1} \mathbf{p}_1, \dots, \Lambda^{-1} \mathbf{p}_N).$$

Die Funktion $\exp i \left(a^0 \sum_{k=1}^N \omega_k - \mathbf{a} \sum_{k=1}^N \mathbf{p}_k \right)$ ist beschränkt und besitzt beschränkte erste Ableitungen; sie ist daher $H(1)$ -stetig, also nach Lemma 3 auch $H(\mu)$ -stetig. Die Funktion $\Psi_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ ist $H(\mu)$ -stetig nach Lemma 4, da $(\Lambda^{-1} p)^k = (\Lambda^{-1})_0^k \omega_p + (\Lambda^{-1})_l^k p^l$ $H(1)$ -stetig ist. Lemma 5 ergibt schliesslich die $H(\mu)$ -Stetigkeit von $(U(a, \Lambda) \Phi)_N$.

Es bleibt die Kompaktheit des Trägers von Ψ_N nachzuweisen. Da $\text{supp } \Phi_N$ kompakt ist, existiert ein c mit $\text{supp } \Phi_N \subset \left\{ (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \mid \sum_{i=1}^N \omega_i < c \right\}$. Dann ist $\text{supp } \Psi_N \subset \left\{ (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \mid \sum_{i=1}^N \omega_i < 2c \Lambda_0^0 \right\}$, q. e. d.

Der Testfunktionenraum $\mathcal{W}$ bestehe aus allen $H(1)$ -stetigen $\tilde{\varphi}(p)$ mit kompaktem Träger. $\mathcal{W}$ ist ein topologischer linearer Raum; die Topologie auf $\mathcal{W}$ ist der induktive Limes der Topologien auf den Teilräumen $\mathcal{W}_K$, die aus allen $\tilde{\varphi}(p) \in \mathcal{W}$ bestehen, deren Träger in der kompakten Menge K enthalten sind. Die Topologie auf $\mathcal{W}_K$ ist durch die beiden Seminormen $\sup |\tilde{\varphi}(p)|$, $\varrho_0(\tilde{\varphi})$ bestimmt.

Satz 3: Für $\tilde{\varphi} \in \mathcal{W}$ ist

$$\tilde{A}_{in}(\tilde{\varphi}) D \subset D. \quad (3.23)$$

Dabei ist $\mu(\tilde{A}_{in}(\tilde{\varphi}) \Phi) = \mu(\Phi)$; $\tilde{A}_{in}(\tilde{\varphi}) \Phi$ hängt stetig von $\tilde{\varphi}$ ab.

Der Beweis folgt ohne Schwierigkeit aus (3.8) und den Lemmata 3, 5.

4. Die S-Matrix – Fall $n = 4$

Die durch (2.1), (2.2) formal definierte S-Matrix enthält den Parameter n , der die Werte $n = 4, 5, 6, \dots$ und $n = \infty$ annehmen kann. Der im folgenden ausführlich behandelte Fall $n = 4$ zeichnet sich sowohl durch Einfachheit als auch durch die Tatsache aus, dass η – und damit S – teilchenzahlerhaltend ist.

Für den Fall $n = 4$ ist der Operator η durch

$$\begin{aligned}
 (\eta \Phi)_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) &= 1/2 \sum_{i < j} f(p_i + p_j) \int d\Omega_e k_4(p_i, p_j, -s(p_i + p_j, \mathbf{e}), -t(p_i + p_j, \mathbf{e})) \\
 &\quad \Phi_N((s(p_i + p_j, \mathbf{e}), t(p_i + p_j, \mathbf{e}), \mathbf{p}_1, \dots, \hat{\mathbf{p}}_i, \dots, \hat{\mathbf{p}}_j, \dots, \mathbf{p}_N) \\
 &\quad p_r^0 = \sqrt{m^2 + \mathbf{p}_r^2} \quad r = 1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

definiert. Dabei ist für einen beliebigen Vierervektor P

$$f(P) = \Theta(P^0) \Theta(P^2 - 4m^2) \sqrt{P^2 - 4m^2} / 8 \sqrt{P^2} \tag{4.2}$$

und für Vierervektoren P mit $P^0 > 0$, $P^2 \geq 4m^2$

$$\begin{aligned}
 s(P, \mathbf{e}) &= \frac{1}{2} (P + \sqrt{P^2 - 4m^2} L(P)^{-1} \mathbf{e}) \\
 t(P, \mathbf{e}) &= \frac{1}{2} (P - \sqrt{P^2 - 4m^2} L(P)^{-1} \mathbf{e}) \\
 \mathbf{e} &= (0, \mathbf{e}), \quad |\mathbf{e}| = 1,
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

$L(P)$ ist die drehungsfreie Lorentz-Transformation

$$L(P) = \begin{pmatrix} P^0/\sqrt{P^2} & -P^1/\sqrt{P^2} & -P^2/\sqrt{P^2} & -P^3/\sqrt{P^2} \\ -P^1/\sqrt{P^2} & & & \\ -P^2/\sqrt{P^2} & \delta_{ij} + \frac{P^i P^j}{\sqrt{P^2} (\sqrt{P^2} + P^0)} & & \\ -P^3/\sqrt{P^2} & & & \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

aus $L_+^\uparrow: L(P) P = (\sqrt{P^2}, \mathbf{0})$.

Eine einfache Rechnung ergibt

$$L(P)^{-1} \mathbf{e} = 1/\sqrt{P^2} \cdot \left(\mathbf{P} \mathbf{e}, \sqrt{P^2} \mathbf{e} + \frac{\mathbf{P} \mathbf{e}}{\sqrt{P^2} + P^0} \mathbf{P} \right) \tag{4.5}$$

und

$$s^2 = t^2 = m^2, \quad s^0 > 0, \quad t^0 > 0 \tag{4.6}$$

$k_4(p_1, p_2, p_3, p_4)$ genüge den Bedingungen:

- 1) k_4 ist beschränkt und $H(1)$ -stetig
- 2) $k_4(p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}, p_{i_4}) = k_4(p_1, p_2, p_3, p_4)$
- 3) $k_4(\Lambda p_1, \Lambda p_2, \Lambda p_3, \Lambda p_4) = k_4(p_1, p_2, p_3, p_4) \quad \Lambda \in L_+^\uparrow$
- 4) $k_4(-p_1, -p_2, -p_3, -p_4) = k_4(p_1, p_2, p_3, p_4)$
- 5) $\overline{k_4(p_1, p_2, p_3, p_4)} = k_4(p_1, p_2, p_3, p_4)$.

Daraus folgt der Satz 4:

a) Der Operator η_N , definiert als Einschränkung von η auf $\mathcal{H}_N$ (Definitions- und Bildbereich von η_N liegen in $\mathcal{H}_N$, letzterer wegen (4.1)), ist symmetrisch und beschränkt. Daher ist η ein selbstadjungierter Operator [4].

b) η ist invariant unter $P_+^\dagger$:

$$[U(a, \Lambda), \eta] = 0. \quad (4.7)$$

c) Es ist

$$\eta D \subset D \quad (4.8)$$

und für $\Phi \in D$ gilt

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\|\eta^r \Phi\|}{r!} |z|^r < \infty, \forall z \in \mathbb{C}. \quad (4.9)$$

D ist also ein dichter Bereich analytischer Vektoren [8] des Operators η .

Beweis: Für das Skalarprodukt in $\mathcal{H}_N$ gilt

$$\begin{aligned} (\Phi_N, \Psi_N) &= \int \prod_1^N \frac{d^3 p_i}{2 \omega_i} \overline{\Phi_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)} \Psi_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \\ &= \int d^4 P \int d\Omega_e \int \prod_3^N \frac{d^3 p_i}{2 \omega_i} f(P) \overline{\Phi_N(s(P, e), t(P, e), \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_N)} \\ &\quad \cdot \Psi_N(s(P, e), t(P, e), \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_N) \end{aligned} \quad (4.10)$$

speziell also

$$\|\Phi_N\|^2 = \int d^4 P \int d\Omega_e \int \prod_3^N \frac{d^3 p_i}{2 \omega_i} \left| \sqrt{f(P)} \Phi_N(s(P, e), t(P, e), \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_N) \right|^2. \quad (4.11)$$

Dabei wurde von

$$\int \frac{d^3 p_1}{2 \omega_1} \int \frac{d^3 p_2}{2 \omega_2} F(p_1, p_2) = \int d^4 P \int d\Omega_e f(P) F(s(P, e), t(P, e)) \quad (4.12)$$

Gebrauch gemacht. Die Herleitung von (4.12) findet man im Anhang 1.

a) Aus (4.1) und (4.10) folgt

$$\begin{aligned} (\Phi_N, \eta_N \Psi_N) &= \frac{N(N-1)}{4} \int d^4 P \int d\Omega_e \int d\Omega_f \int \prod_3^N \frac{d^3 p_i}{2 \omega_i} \\ &\quad f(P) \overline{\Phi_N(s(P, e), t(P, e), \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_N)} k_4(s(P, e), t(P, e), -s(P, f), -t(P, f)) \\ &\quad f(P) \Psi_N(s(P, f), t(P, f), \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_N), \end{aligned} \quad (4.13)$$

woraus man unmittelbar die Symmetrie von η_N abliest unter Berücksichtigung der Bedingungen (4) und (5) für $k_4(p_1, p_2, p_3, p_4)$.

Nach Bedingung (1) ist $|k_4(p_1, p_2, p_3, p_4)| \leq K < \infty$. Es folgt daher aus (4.13) wegen $(f(P))^2 \leq f(P)/8$

$$\begin{aligned} |(\Phi_N, \eta_N \Psi_N)| &\leq \frac{N(N-1)}{4} K \frac{1}{8} \int d^4 P \int d\Omega_e \int d\Omega_f \int \prod_3^N \frac{d^3 p_i}{2 \omega_i} \\ &\quad \left| \sqrt{f(P)} \Phi_N(s(P, e), t(P, e), \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_N) \right| \left| \sqrt{f(P)} \Psi_N(s(P, f), t(P, f), \mathbf{p}_3, \dots, \mathbf{p}_N) \right|, \end{aligned} \quad (4.14)$$

woraus sich mit (4.11) und der Schwarzschen Ungleichung

$$|(\Phi_N, \eta_N \Psi_N)| \leq \frac{N(N-1)}{4} K \frac{1}{8} 4\pi \|\Phi_N\| \|\Psi_N\| \quad (4.15)$$

ergibt. Damit ist auch die Beschränktheit von η_N nachgewiesen.

b) Die Translationsinvarianz von η folgt unmittelbar aus

$$s(P, e) + t(P, e) = P, \quad (4.16)$$

während die Lorentzinvarianz eine Konsequenz von

$$L(\Lambda^{-1} P) \Lambda^{-1} L(P)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & R(\Lambda, P) & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad R(\Lambda, P) \in O_3^+ \quad (4.17)$$

ist. (4.17) zieht nämlich

$$\begin{aligned} \Lambda^{-1} s(P, e) &= s(\Lambda^{-1} P, R(\Lambda, P) e) \\ \Lambda^{-1} t(P, e) &= t(\Lambda^{-1} P, R(\Lambda, P) e) \end{aligned} \quad (4.18)$$

nach sich. Aus (4.18) und

$$\int d\Omega_e f(R e) = \int d\Omega_e f(e), \quad R \in O_3^+ \quad (4.19)$$

erhält man die Gleichheit von $(\eta U(0, \Lambda) \Phi)_N(p_1, \dots, p_N)$ und $(U(0, \Lambda) \eta \Phi)_N(p_1, \dots, p_N)$.

c) Sei $\Phi \in D$; Φ_N besitzt also kompakten Träger, das heisst es existiert c_N mit

$$\text{supp } \Phi_N \subset \left\{ (p_1, \dots, p_N) \mid \sum_{i=1}^N \omega_i < c_N \right\}. \quad (4.20)$$

Aus $[\eta, U(a, 1)] = 0$ folgt

$$\text{supp } (\eta \Phi)_N \subset \left\{ (p_1, \dots, p_N) \mid \sum_{i=1}^N \omega_i < c_N \right\}, \quad (4.21)$$

somit ist $\text{supp } (\eta \Phi)_N$ kompakt.

Aus (4.1) und der Kompaktheit von $\text{supp } \Phi_N$ folgt mit Lemmata 4, 5 die $H(\mu(\Phi))$ -Stetigkeit von $(\eta \Phi)_N$, da die Argumente von k_4 und Φ_N aus stetig differenzierbaren Funktionen zusammengesetzt sind – abgesehen von $f(p_i + p_j)$, dessen $H(1)$ -Stetigkeit im Anhang 2 nachgewiesen wird. Dieselbe Argumentation zeigt, dass eine Konstante $\alpha(\Phi)$ existiert mit

$$C(\eta \Phi) = \alpha(\Phi) C(\Phi). \quad (4.22)$$

Damit ist $\eta D \subset D$ gezeigt; darüber hinaus folgt, dass auch

$$e^{z\eta} D \subset D, \quad z \in \mathbb{C} \quad (4.23)$$

gilt, wobei

$$e^{z\eta} \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \eta^n \Phi, \quad \Phi \in D \quad (4.24)$$

ist. Nach (4.22) ist

$$C(e^{z\eta} \Phi) = e^{|z|\alpha(\Phi)} C(\Phi), \quad (4.25)$$

zudem ist

$$\mu(e^{z\eta} \Phi) = \mu(\Phi). \quad (4.26)$$

Setzt man

$$V^2 = \max_{N=1, \dots, N_0(\Phi)} \int \prod_1^N \frac{d^3 p_i}{2 \omega_i}, \quad (4.27)$$

$$\sum_1^N \omega_i < c_N$$

so folgt

$$\sum_0^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \|\eta^n \Phi\| \leq \sqrt{N_0(\Phi) + 1} e^{\alpha(\Phi)|z|} C(\Phi) V, \quad (4.28)$$

womit gezeigt ist, dass D ein Bereich analytischer Vektoren ist.

Korollar: $V(\lambda) = e^{i\lambda\eta}$, $-\infty < \lambda < \infty$, ist eine einparametrische Schar unitärer Operatoren mit $V(\lambda) D \subset D$; insbesondere ist $S = V(1)$ unitär und $S D \subset D$.

Bemerkung: Aus (4.1) und der Bedingung (5) für k_4 folgt unmittelbar die Gleichheit von $(\Theta_{in} \eta \Phi)_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ und $(\eta \Theta_{in} \Phi)_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$, das heisst

$$[\Theta_{in}, \eta] = 0. \quad (4.29)$$

Das durch

$$\tilde{A}_{out}(\tilde{\varphi}) = S^{-1} \tilde{A}_{in}(\tilde{\varphi}) S \quad (4.30)$$

definierte Feld erfüllt nach Satz 3 und dem Korollar zu Satz 4

$$\tilde{A}_{out}(\tilde{\varphi}) D \subset D. \quad (4.31)$$

Die entsprechende Zerlegung in Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren lautet

$$\tilde{A}_{out}^{\mp}(\tilde{\varphi}) = S^{-1} \tilde{A}_{in}^{\mp}(\tilde{\varphi}) S. \quad (4.32)$$

Sei $(\tilde{A}_{in}^{\mp}(\tilde{\varphi}))_N$ die Einschränkung von $\tilde{A}_{in}^{\mp}(\tilde{\varphi})$ auf $\mathcal{H}_N$. Dann ist $(\tilde{A}_{in}^{\mp}(\tilde{\varphi}))_N$ ein beschränkter Operator von $\mathcal{H}_N$ in $\mathcal{H}_{N \pm 1}$. Daher ist auch

$$e^{-i\lambda\eta_{N \pm 1}} (\tilde{A}_{in}^{\mp}(\tilde{\varphi}))_N e^{i\lambda\eta_N} \quad (4.33)$$

ein beschränkter Operator von $\mathcal{H}_N$ in $\mathcal{H}_{N \pm 1}$. Funktionen beschränkter Operatoren haben ein zu gewöhnlichen Funktionen analoges Verhalten, was Differenzierbarkeit, Analytizität und dergleichen anbelangt. Es gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\lambda} \left[e^{-i\lambda\eta_{N \pm 1}} (\tilde{A}_{in}^{\mp}(\tilde{\varphi}))_N e^{i\lambda\eta_N} \right] \\ &= i e^{-i\lambda\eta_{N \pm 1}} \left[(\tilde{A}_{in}^{\mp}(\tilde{\varphi}))_N \eta_N - \eta_{N \pm 1} (\tilde{A}_{in}^{\mp}(\tilde{\varphi}))_N \right] e^{i\lambda\eta_N}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Für jeden Bereich, der den Voraussetzungen von Lemma 1 genügt, gilt also

$$\frac{d}{d\lambda} [e^{-i\lambda\eta} \tilde{A}_{in}^{\mp}(\tilde{\varphi}) e^{i\lambda\eta} \Phi] = i e^{-i\lambda\eta} [\tilde{A}_{in}^{\mp}(\tilde{\varphi}), \eta] e^{i\lambda\eta} \Phi, \quad (4.35)$$

dabei hängt der Vektor

$$e^{-i\lambda\eta} \tilde{A}_{in}^{\mp}(\tilde{\varphi}) e^{i\lambda\eta} \Phi$$

analytisch von λ ab.

Aus (4.35) gewinnt man die Darstellung

$$\tilde{A}_{out}^{\mp}(\tilde{\varphi}) \Phi = \tilde{A}_{in}^{\mp}(\tilde{\varphi}) + i \int_0^1 d\lambda [e^{-i\lambda\eta} [\tilde{A}_{in}^{\mp}(\tilde{\varphi}), \eta] e^{i\lambda\eta} \Phi] \quad (4.36)$$

unter Berücksichtigung von (4.30).

Für die Operatoren

$$\tilde{\alpha}_{in}^{\mp}(\tilde{\varphi}) = [\tilde{A}_{in}^{\mp}(\tilde{\varphi}), \eta] \quad (4.37)$$

gilt

$$\begin{aligned} (\tilde{\alpha}_{in}^+(\tilde{\varphi}) \Phi)_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) &= \sqrt{2\pi} \sqrt{N+1} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int \frac{d^3p}{2\omega_p} \tilde{\varphi}(\omega_p, \mathbf{p}) f(p + p_i) \\ &\int d\Omega_e k_4(p, p_i, -s(p + p_i, \mathbf{e}), -t(p + p_i, \mathbf{e})) \\ &\times \Phi_{N+1}(s(p + p_i, \mathbf{e}), t(p + p_i, \mathbf{e}), \mathbf{p}_1 \dots \hat{\mathbf{p}}_i \dots \mathbf{p}_N) \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} (\tilde{\alpha}_{in}^-(\tilde{\varphi}) \Phi)_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) &= -\sqrt{2\pi} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i < j} f(p_i + p_j) \int d\Omega_e \tilde{\varphi}(-s(p_i + p_j, \mathbf{e})) \\ &k_4(p_i, p_j, -s(p_i + p_j, \mathbf{e}), t(p_i + p_j, \mathbf{e})) \Phi_{N-1}(t(p_i + p_j, \mathbf{e}), \mathbf{p}_1 \dots \hat{\mathbf{p}}_i \dots \hat{\mathbf{p}}_j \dots \mathbf{p}_N). \end{aligned} \quad (4.39)$$

5. Das interpolierende Feld $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$ – Fall $n = 4$

Für $\Phi \in D$, $\tilde{\varphi} \in \mathcal{W}$ ist das interpolierende Feld $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$ durch

$$\begin{aligned} (\tilde{A}(\tilde{\varphi}) \Phi)_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) &= \frac{1}{2} ((\tilde{A}_{in}(\tilde{\varphi}) \Phi)_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \\ &+ \frac{1}{2} (\tilde{A}_{out}(\tilde{\varphi}) \Phi)_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) + \int_0^1 d\lambda (e^{-i\lambda\eta} \tilde{\alpha}(\tilde{\varphi}) e^{i\lambda\eta} \Phi)_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \end{aligned} \quad (5.1)$$

definiert. Dabei ist

$$\tilde{\alpha}(\tilde{\varphi}) = \tilde{\alpha}_3(\tilde{\varphi}) + \tilde{\alpha}_1(\tilde{\varphi}) + \tilde{\alpha}^+(\tilde{\varphi}) + \tilde{\alpha}^-(\tilde{\varphi}) + \tilde{\alpha}_{-1}(\tilde{\varphi}) + \tilde{\alpha}_{-3}(\tilde{\varphi}) \quad (5.2)$$

mit

$$\begin{aligned} (\tilde{\alpha}_3(\tilde{\varphi}) \Phi)_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{(N+1)(N+2)(N+3)}}{3!} \int \prod_1^3 \frac{d^3q_i}{2\omega_i} \frac{\tilde{\varphi}\left(\sum_1^3 q_i\right)}{\left(\sum_1^3 q_i\right)^2 - m^2} \\ &\times k_4\left(\sum_4^3 q_i, -q_1, -q_2, -q_3\right) \Phi_{N+3}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$(\tilde{\alpha}_1(\tilde{\varphi}) \Phi)_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{N+1}}{2} \sum_{i=1}^N \int \prod_{j=1}^2 \frac{d^3 q_j}{2 \omega_j} \frac{\tilde{\varphi}(q_1 + q_2 - p_i)}{(q_1 + q_2 - p_i)^2 - m^2} \\ \times [1 - \chi((q_1 + q_2 - p_i)^2)] k_4(q_1 + q_2 - p_i, p_i, -q_1, -q_2) \Phi_{N+1}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1 \dots \hat{\mathbf{p}}_i \dots \mathbf{p}_N) \quad (5.4)$$

$$(\tilde{\alpha}_{-1}(\tilde{\varphi}) \Phi)_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i < j} \int \frac{d^3 q}{2 \omega_q} \frac{\tilde{\varphi}(q - p_i - p_j)}{(q - p_i - p_j)^2 - m^2} \\ \times [1 - \chi((q - p_i - p_j)^2)] k_4(q - p_i - p_j, p_i, p_j, -q) \Phi_{N-1}(\mathbf{q}, \mathbf{p}_1 \dots \hat{\mathbf{p}}_i \dots \hat{\mathbf{p}}_j \dots \mathbf{p}_N) \quad (5.5)$$

$$(\tilde{\alpha}_{-3}(\tilde{\varphi}) \Phi)_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{N(N-1)(N-2)}} \sum_{i_1 < i_2 < i_3} \frac{\tilde{\varphi}\left(-\sum_{k=1}^3 p_{i_k}\right)}{\left(\sum_{k=1}^3 p_{i_k}\right)^2 - m^2} \\ k_4\left(-\sum_{k=1}^3 p_{i_k}, p_{i_1}, p_{i_2}, p_{i_3}\right) \Phi_{N-3}(\mathbf{p}_1 \dots \hat{\mathbf{p}}_{i_1} \dots \hat{\mathbf{p}}_{i_2} \dots \hat{\mathbf{p}}_{i_3} \dots \mathbf{p}_N) \quad (5.6)$$

$\chi(s)$ ist eine reelle $H(1)$ -stetige Funktion mit $\text{supp } \chi \subset [m - \mu, m + \mu]$, $\mu < m$ und $\chi(m^2) = 1$.

Satz 5:

- a) $\tilde{\alpha}_i(\tilde{\varphi}) D \subset D \quad i = 3, 1, -1, -3$
- b) $U(a, \Lambda) \tilde{\alpha}_i(\tilde{\varphi}) U(a, \Lambda)^{-1} = \tilde{\alpha}_i(\tilde{\varphi}_{(a, \Lambda)})$
- c) $(\tilde{\alpha}_1(\tilde{\varphi}) \Phi, \Psi) = (\Phi, \tilde{\alpha}_{-1}(\tilde{\varphi}^*) \Psi)$
 $(\tilde{\alpha}_3(\tilde{\varphi}) \Phi, \Psi) = (\Phi, \tilde{\alpha}_{-3}(\tilde{\varphi}^*) \Psi)$
 $\Phi, \Psi \in D.$

Beweis:

a) Die Kompaktheit von $\text{supp } (\tilde{\alpha}_i(\tilde{\varphi}) \Phi)_N$ folgt aus derjenigen von $\text{supp } \Phi_{N+i}$ und $\text{supp } \tilde{\varphi}$. Auf die Hölderstetigkeit schliesst man wie üblich; es ist $\mu(\tilde{\alpha}_i(\tilde{\varphi}) \Phi) = \mu(\Phi)$,

b) folgt unmittelbar aus (5.3) bis (5.6), (3.17) und der Eigenschaft (3) von k_4 ,

c) folgt aus den Gleichungen:

$$((\tilde{\alpha}_1(\tilde{\varphi}) \Phi_N, \Psi_N) = (\Phi_{N+1}, (\tilde{\alpha}_{-1}(\tilde{\varphi}^*) \Psi)_{N+1}) \\ ((\tilde{\alpha}_3(\tilde{\varphi}) \Phi_N, \Psi_N) = (\Phi_{N+3}, (\tilde{\alpha}_{-3}(\tilde{\varphi}^*) \Psi)_{N+3}),$$

deren Gültigkeit man leicht nachweist.

Es bleiben die Operatoren $\tilde{\alpha}^+(\tilde{\varphi})$, $\tilde{\alpha}^-(\tilde{\varphi})$ zu definieren. Zu diesem Zweck wird das Hauptwertintegral eingeführt.

Definition: $f(x)$ sei eine Riemann-integrable Funktion in $[-a, a]$, $a > 0$. Falls

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^a \frac{f(x)}{x} dx \right) \quad (5.7)$$

existiert, so definiert man das Hauptwertintegral

$$P \int_{-a}^a \frac{f(x)}{x} dx \quad (5.8)$$

durch den erwähnten Grenzwert.

Wegen

$$P \int_{-a}^a \frac{1}{x} dx = 0 \quad (5.9)$$

ist auch

$$P \int_{-a}^a \frac{f(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{f(x)-f(0)}{x} dx + \int_{\varepsilon}^a \frac{f(x)-f(0)}{x} dx \right). \quad (5.10)$$

Aus (5.7) folgt, dass das Hauptwertintegral existiert, falls die Grenzwerte

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)}{x} \text{ und } \lim_{x \uparrow 0} \frac{f(x)}{x}$$

existieren; in diesem Fall ist

$$P \int_{-a}^a \frac{f(x)}{x} dx = \int_{-a}^a \frac{f(x)}{x} dx.$$

Aus (5.10) folgt die Existenz des Hauptwertintegrals für hölderstetige Funktionen und es ist

$$P \int_{-a}^a \frac{f(x)}{x} dx = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{-a}^{-\varepsilon} \frac{f(x)-f(0)}{x} dx + \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^a \frac{f(x)-f(0)}{x} dx \quad (5.11)$$

$$\left| P \int_{-a}^a \frac{f(x)}{x} dx \right| \leq 2 \varrho_0(f) \frac{1}{\mu} a^\mu. \quad (5.12)$$

Lemma 6: $f(x, y)$ sei hölderstetig und beschränkt. Dann ist auch

$$F(y) = P \int_{-a}^a \frac{f(x, y)}{x} dx \quad (5.13)$$

hölderstetig und beschränkt.

Beweis:

a) Beschränktheit von $F(y)$:

Nach (5.12) ist

$$|F(y)| \leq 2 \varrho_0(f) \frac{1}{\mu} a^\mu. \quad (5.14)$$

b) Hölderstetigkeit von $F(y)$:

Definiert man für $0 < u < a$

$$F_+(u, y) = \int_u^a \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} dx$$

$$F_-(u, y) = \int_{-a}^{-u} \frac{f(x, y) - f(0, y)}{x} dx$$

und

$$F_+(y) = \lim_{u \downarrow 0} F_+(u, y)$$

$$F_-(y) = \lim_{u \downarrow 0} F_-(u, y)$$

so ist $F(y) = F_+(y) + F_-(y)$.

Es genügt offenbar, die Hölderstetigkeit von $F_+(y)$ nachzuweisen.

Für $|y' - y| \geq a$ ist wegen (5.14)

$$|F_+(y') - F_+(y)| \leq 4 \varrho_0(f) \frac{1}{\mu} |y' - y|^\mu. \quad (5.15)$$

Für $|y' - y| < a$ ist

$$\begin{aligned} & |F_+(y') - F_+(y)| \\ &= |F_+(y') - F_+(|y' - y|, y') + F_+(|y' - y|, y') - F_+(|y' - y|, y) \\ &+ F_+(|y' - y|, y) - F_+(y)| \leq |F_+(y') - F_+(|y' - y|, y')| \\ &+ |F_+(|y' - y|, y') - F_+(|y' - y|, y)| + |F_+(|y' - y|, y) - F_+(y)|. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Wegen

$$|F_+(u, y) - F_+(y)| \leq \varrho_0(f) \frac{1}{\mu} u^\mu \quad (5.17)$$

sind der erste und letzte Summand in (5.16) jeweils kleiner als $\varrho_0(f) (1/\mu) |y' - y|^\mu$, was selbst wieder kleiner als $\varrho_0(f) (1/\mu) a^{\mu-\nu} |y' - y|^\nu$, $0 < \nu < \mu$ ist. Für den zweiten Summanden in (5.16) folgt

$$\begin{aligned} & |F_+(|y' - y|, y') - F_+(|y' - y|, y)| \leq 2 \varrho_0(f) |y' - y|^\mu \ln \frac{a}{|y' - y|} \\ & \leq 2 \varrho_0(f) a^{\mu-\nu} e^{-1} \frac{1}{\mu-\nu} |y' - y|^\nu, \quad 0 < \nu < \mu. \end{aligned} \quad (5.18)$$

$F_+(y)$ ist also $H(\nu)$ -stetig, $0 < \nu < \mu$ q. e. d.

Korollar: $f(x, x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n)$ sei beschränkt, hölderstetig in den Variablen $x, y_1 \dots y_n$, Riemann-integrierbar in $x_1 \dots x_m$, G ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^m$. Dann ist

$$F(y_1, \dots, y_n) = \int_G d^m x \left(P \int_{-a}^a \frac{f(x, x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n)}{x} dx \right) \quad (5.19)$$

hölderstetig und beschränkt; die beiden Integrationen in (5.17) sind vertauschbar, das heisst, es gilt:

$$F(y_1, \dots, y_n) = P \int_{-a}^a dx \frac{1}{x} \left(\int_G d^m x f(x, x_1 \dots x_m, y_1 \dots y_n) \right). \quad (5.20)$$

Das folgt unmittelbar aus Lemma 6, Lemma 2 und Abschätzungen vom Typus (5.17). Man setzt nun

$$\begin{aligned} (\tilde{\alpha}^+(\tilde{\varphi}) \Phi)_N(p_1, \dots, p_N) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{N+1} \int d^3 q P \int_{m-\mu}^{m+\mu} dx \frac{1}{x-m} \\ &\times \frac{x}{x+m} \chi(x^2) \frac{1}{2\sqrt{x^2+q^2}} \tilde{\varphi}(q) \sum_{i=1}^N f(q+p_i) \int d\Omega_e k_4(q, p_i, -s(q+p_i, e), \\ &-t(q+p_i, e)) \Phi_{N+1}(s(q+p_i, e), t(q+p_i, e), p_1 \dots \hat{p}_i \dots p_N) \end{aligned} \quad (5.21)$$

mit $q = (\sqrt{x^2 + q^2}, q)$ und

$$\begin{aligned} (\tilde{\alpha}^-(\tilde{\varphi}) \Phi)_N(p_1 \dots p_N) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i < j} \int d\Omega_e P \int_{m-\mu}^{m+\mu} dx \frac{1}{x-m} \\ &\times \frac{x}{x+m} \chi(x^2) F(p_i + p_j, x) \tilde{\varphi}(-S(p_i + p_j, x, e)) k_4(-S(p_i + p_j, x, e), \\ &-T(p_i + p_j, x, e), p_i, p_j) \Phi_{N-1}(T(p_i + p_j, x, e), p_1 \dots \hat{p}_i \dots \hat{p}_j \dots p_N) \end{aligned} \quad (5.22)$$

mit

$$\begin{aligned} F(P, x) &= \Theta(P^0) \Theta(P^2 - (x+m)^2) \frac{\sqrt{[P^2 - (x+m)^2][P^2 - (x-m)^2]}}{8 P^2} \\ S(P, x, e) &= \frac{1}{2} \left[\frac{P^2 + x^2 - m^2}{P^2} P + 8 \sqrt{P^2} F(P, x) L(P)^{-1} e \right] \\ T(P, x, e) &= \frac{1}{2} \left[\frac{P^2 - x^2 + m^2}{P^2} P - 8 \sqrt{P^2} F(P, x) L(P)^{-1} e \right] \\ e &= (0, \mathbf{e}), \quad |\mathbf{e}| = 1. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Die Kompaktheit von $\text{supp } (\tilde{\alpha}^\pm(\tilde{\varphi}) \Phi)_N$ ergibt sich leicht aus der Kompaktheit von $\text{supp } \Phi_{N\pm 1}$ und $\text{supp } \tilde{\varphi}$.

Berücksichtigt man, dass $\Theta(\xi) \sqrt{\xi} H(1/2)$ -stetig ist – es ist nämlich $|\sqrt{\xi'} - \sqrt{\xi}| \leq \sqrt{|\xi' - \xi|}$, $\xi', \xi \geq 0$ – so folgt auf Grund der Lemmata 2 bis 6 die Hölderstetigkeit von $(\tilde{\alpha}^\pm(\tilde{\varphi}) \Phi)_N$.

Satz 6:

- $\tilde{\alpha}^\pm(\tilde{\varphi}) D \subset D$,
- $U(a, \Lambda) \tilde{\alpha}^\pm(\tilde{\varphi}) U(a, \Lambda)^{-1} = \tilde{\alpha}^\pm(\tilde{\varphi}_{(a, \Lambda)})$,
- $(\tilde{\alpha}^+(\tilde{\varphi}) \Phi, \Psi) = (\Phi, \tilde{\alpha}^-(\tilde{\varphi}^*) \Psi), \quad \Phi, \Psi \in D$.

Beweis:

b) folgt aus (3.17), (5.21), (5.22), (4.18) und dessen Analogon für S , T , Bedingung (3) für k_4 und Korollar zu Lemma 6.

c) folgt aus

$$((\tilde{\alpha}^+(\tilde{\varphi}) \Phi)_N, \Psi_N) = (\Phi_{N+1}, (\tilde{\alpha}^-(\tilde{\varphi}^*) \Psi)_{N+1}),$$

was man aus dem Korollar zu Lemma 6 und dem Ergebnis des Anhanges 1 schliesst.

Die Operatoren $\tilde{\alpha}_1(\tilde{\varphi})$ und $\tilde{\alpha}^+(\tilde{\varphi})$ sind einzeln von der Wahl von χ abhängig, nicht aber ihre Summe $\tilde{\alpha}_1(\tilde{\varphi}) + \tilde{\alpha}^+(\tilde{\varphi})$, wie man leicht einsieht. Entsprechendes gilt für $\tilde{\alpha}_{-1}(\tilde{\varphi})$ und $\tilde{\alpha}^-(\tilde{\varphi})$.

Die Menge $D_N(K; \mu)$ aller $\Phi_N \in D_N$ mit gleichem Hölderindex, deren Träger in einem beliebigen, aber festen Kompaktum K enthalten sind, ist ein Banach-Raum; die Norm ist das Maximum der beiden Seminormen $\varrho_0(\Phi_N)$, $\max |\Phi_N(\mathbf{p}_1 \dots \mathbf{p}_N)|$.

Für jede Komponente Φ_N eines beliebigen $\Phi \in D$ existiert ein geeignetes $D_N(K; \mu)$ mit $\Phi_N \in D_N(K; \mu)$.

Die Einschränkungen von $\tilde{\alpha}_i(\tilde{\varphi})$, $\tilde{\alpha}^\pm(\tilde{\varphi})$, $e^{\pm i\lambda\eta}$ auf $D_N(K; \mu)$ sind beschränkte lineare Operatoren mit Bildbereich in $D_N'(K'; \mu')$. Daher ist der Integrand in (5.1) in D_N und hängt analytisch von λ ab, also existiert das Integral und ist ebenfalls in D_N .

Zusammen mit Satz 5, 6 folgt der

Satz 7:

$$\tilde{A}(\tilde{\varphi}) D \subset D$$

$$U(a, \Lambda) \tilde{A}(\tilde{\varphi}) U(a, \Lambda)^{-1} = \tilde{A}(\tilde{\varphi}_{(a, \Lambda)})$$

$$(\tilde{A}(\tilde{\varphi}) \Phi, \Psi) = (\Phi, \tilde{A}(\tilde{\varphi}^*) \Psi) \quad \Phi, \Psi \in D.$$

Bemerkung: $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$ ist CTP-invariant, das heisst es gilt

$$\Theta \tilde{A}(\tilde{\varphi}) \Theta = \tilde{A}(\tilde{\varphi}) \quad (5.24)$$

mit $\Theta = \Theta_{in} S$, was aus (5.1) und $\Theta_{in} \tilde{\alpha}(\tilde{\varphi}) \Theta_{in} = \tilde{\alpha}(\tilde{\varphi})$ (auf Grund der Bedingung (5) für k_4) folgt.

6. Asymptotenbedingung

Jedem $\tilde{\varphi} \in \mathcal{W}$ wird wie folgt ein $\tilde{\varphi}_t^\sigma \in \mathcal{W}$, $\sigma = \pm 1$ zugeordnet:

$$\tilde{\varphi}_t^\sigma(p) = \tilde{\varphi}(p) \frac{\sigma p^0 + \omega_p}{2 \omega_p} e^{i(\sigma p^0 - \omega_p)t}. \quad (6.1)$$

Dann gilt auf Grund von (3.12), (3.13), (4.32)

$$\tilde{A}_{ex}^\tau(\tilde{\varphi}_t^\sigma) = \delta_{\tau\sigma} \tilde{A}_{ex}^\tau(\tilde{\varphi}), \quad \tau, \sigma = \pm 1, \quad (6.2)$$

wobei ex für in bzw. out steht und $\tilde{A}_{ex}^{\pm 1}$ für $\tilde{A}_{ex}^\pm$ gesetzt wurde.

Satz 8: Für $\Psi, \Phi \in D$ gilt die LSZ-Asymptotenbedingung [9]

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ (-)}} (\Psi, \tilde{A}(\tilde{\varphi}_t^\sigma) \Phi) = (\Psi, \tilde{A}_{out}^\sigma(\tilde{\varphi}) \Phi) . \quad (6.3)$$

Beweis: Auf Grund von (5.1), (5.2), (6.1), (6.2) und Satz 5c), Satz 6c) genügt es,

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ (-)}} \int_0^1 d\lambda (e^{i\lambda\eta} \Psi, \tilde{\alpha}_i(\tilde{\varphi}_t^\sigma) e^{i\lambda\pi} \Phi) = 0 \quad i = 1, 3 \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ (-)}} \int_0^1 d\lambda (e^{i\lambda\eta} \Psi, \tilde{\alpha}^+(\tilde{\varphi}_t^\sigma) e^{i\lambda\eta} \Phi) \\ &= + \frac{1+\sigma}{2} \frac{i}{2} \int_0^1 d\lambda (e^{i\lambda\eta} \Psi, \tilde{\alpha}_{in}^+(\tilde{\varphi}) e^{i\lambda\eta} \Phi) \\ &= + \frac{1+\sigma}{2} \frac{1}{2} (\Psi, (\tilde{A}_{out}^+(\tilde{\varphi}) - \tilde{A}_{in}^+(\tilde{\varphi})) \Phi) \end{aligned} \quad (6.5)$$

zu zeigen; im letzten Schritt von (6.5) wurde von (4.36), (4.37) Gebrauch gemacht. (6.4) lässt sich auf folgendes Lemma reduzieren:

Lemma 7: $f(x_1, \dots, x_n)$ sei beschränkt und integrabel, $\text{supp } f$ kompakt, $g(x_1, \dots, x_n)$ sei differenzierbar, $\text{grad } g = 0$ höchstens auf einer Mannigfaltigkeit M der Dimension $m < n$. Dann ist

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int d^n x f(x_1, \dots, x_n) e^{itg(x_1, \dots, x_n)} = 0 . \quad (6.6)$$

Beweis: Sei $\text{supp } f = K$, K_ε eine Umgebung von $M \cap K$ derart, dass

$$\int_{K_\varepsilon} d^n x |f(x_1, \dots, x_n)| < \varepsilon \quad (6.7)$$

ist. In $K - K_\varepsilon$ ist $\text{grad } g \neq 0$, es existiert also eine Zerlegung $K - K_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^s K_i$, $s < \infty$, $K_i \cap K_j = \emptyset$, $i \neq j$, so dass in K_i $\partial g / \partial x_r \neq 0$ für ein $r = r(i)$ gilt. Dann lässt sich das Integral

$$\int_{K_i} d^n x f(x_1, \dots, x_n) e^{itg(x_1, \dots, x_n)} \quad (6.8)$$

auf die Form

$$\int_{\hat{K}_i} d^n y \hat{f}(y_1, \dots, y_n) e^{itg_1} \quad (6.9)$$

transformieren. Man sieht unmittelbar ein, dass sich auf (6.9) das Riemann-Lebesguesche Lemma (Theorem 1 von [10]) anwenden lässt; es ist also

$$\left| \int_{K_i} d^n x f(x_1, \dots, x_n) e^{itg(x_1, \dots, x_n)} \right| < \varepsilon, \quad t > T_i(\varepsilon) . \quad (6.10)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
 & \left| \int d^n x f(x_1, \dots, x_n) e^{i t g(x_1, \dots, x_n)} \right| \\
 &= \left| \int_{K_\varepsilon} d^n x f(x_1, \dots, x_n) e^{i t g(x_1, \dots, x_n)} + \sum_{i=1}^s \int_{\dot{K}_i} d^n x f(x_1, \dots, x_n) e^{i t g(x_1, \dots, x_n)} \right| \\
 &\leq \left| \int_{K_\varepsilon} d^n x f(x_1, \dots, x_n) e^{i t g(x_1, \dots, x_n)} \right| + \sum_{i=1}^s \left| \int_{\dot{K}_i} d^n x f(x_1, \dots, x_n) e^{i t g(x_1, \dots, x_n)} \right| \\
 &\leq (s+1) \varepsilon \text{ für } t > T(\varepsilon), \quad T(\varepsilon) = \max_{1 \dots s} T_i(s). \quad (6.11)
 \end{aligned}$$

(6.5) läuft auf eine Diskussion von

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ (-) \quad 0}} \int_0^\alpha dy \, P \int_{m-\mu}^{m+\mu} dx \, \frac{1}{x-m} f(x, y) (\sigma \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{m^2 + y^2}) e^{i(\sigma \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{m^2 + y^2})t} \quad (6.12)$$

hinaus, wobei $f(x, y)$ hölderstetig ist und einen kompakten Träger in

$$K = \{(x, y) \mid x \in [m - \mu, m + \mu], \quad y \in [0, \alpha]\}$$

besitzt. Für $\sigma = -1$ ist $(x - m)^{-1} (\sigma \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{m^2 + y^2})$ stetig; das Hauptwertintegral ist ein gewöhnliches Integral. Der Gradient von $(\sigma \sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{m^2 + y^2})$ verschwindet nirgends auf K ; daher lässt sich Lemma 7 anwenden:

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_0^\alpha dy \int_{m-\mu}^{m+\mu} dx f(x, y) \frac{-\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{m^2 + y^2}}{x - m} e^{i(-\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{m^2 + y^2})t} = 0. \quad (6.13)$$

Für $\sigma = +1$ ist

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\alpha dy \, P \int_{m-\mu}^{m+\mu} dx \, \frac{1}{x-m} f(x, y) (\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{m^2 + y^2}) e^{i(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{m^2 + y^2})t} \\
 &= \int_0^\alpha dy \, P \int_{m-\mu}^{m+\mu} dx \, \frac{1}{x-m} g_1(x, y) e^{i(\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{m^2 + y^2})t} \\
 &+ \int_0^\alpha dy \, g(m, y) \, P \int_{m-\mu}^{m+\mu} dx \, \frac{e^{i(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{m^2 + y^2})t}}{x-m} \quad (6.14)
 \end{aligned}$$

mit $g(x, y) = f(x, y) (\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{m^2 + y^2})$, $g_1(x, y) = g(x, y) - g(m, y)$. Wegen $|g_1(x, y)| \leq \varrho_0(g) |x - m|^v$ ist die Differenz zwischen dem ersten Summanden von (6.14) und

$$\int_0^\alpha dy \left\{ \int_{m-\mu}^{m-\delta(\varepsilon)} dx \, \frac{g_1(x, y)}{x-m} e^{i(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{m^2 + y^2})t} + \int_{m+\delta(\varepsilon)}^{m+\mu} dx \, \frac{g_1(x, y)}{x-m} e^{i(\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{m^2 + y^2})t} \right\} \quad (6.15)$$

dem Betrage nach kleiner als $\varepsilon > 0$ für geeignetes $\delta(\varepsilon) > 0$ unabhängig von t .



Auf die beiden Summanden in (6.15) lässt sich nun Lemma 7 anwenden: Für $|t| > T_i(\varepsilon)$ ist der i -te Summand in (6.15) dem Betrage nach kleiner als ε , $i = 1, 2$. Insgesamt ist also

$$\left| \int_0^\alpha dy \, P \int_{m-\mu}^{m+\mu} dx \frac{1}{x-m} g_1(x, y) e^{i(\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{m^2+y^2})t} \right| < 3\varepsilon, |t| > T(\varepsilon), T(\varepsilon) = \max_{i=1,2} T_i(\varepsilon) \quad (6.16)$$

oder also

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_0^\alpha dy \, P \int_{m-\mu}^{m+\mu} dx \frac{1}{x-m} g_1(x, y) e^{i(\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{m^2+y^2})t} = 0. \quad (6.17)$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int_0^\alpha dy \, g(m, y) \, P \int_{m-\mu}^{m+\mu} dx \frac{\cos(\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{m^2+y^2})t}{x-m} = 0 \quad (6.18)$$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ (-)}} \int_0^\alpha dy \, g(m, y) \int_{m-\mu}^{m+\mu} dx \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{m^2+y^2})t}{x-m} = +\pi \int_0^\alpha dy \, g(m, y) \quad (6.19)$$

gilt.

Da $\varphi(x, y) = \sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{m^2+y^2}$ das Intervall $m-\mu \leq x \leq m+\mu$ eindeutig und analytisch auf das Intervall $I_y = (\sqrt{(m-\mu)^2+y^2} - \sqrt{m^2+y^2}) \leq u \leq (\sqrt{(m+\mu)^2+y^2} - \sqrt{m^2+y^2})$ abbildet, lässt sich $\varphi(x, y) = u$ als neue Integrationsvariable einführen (man überlegt sich leicht, dass Hauptwertintegrale invariant sind unter analytischen Variablentransformationen). Für den Ausdruck in (6.18) folgt

$$\begin{aligned} & \int_0^\alpha dy \, g(m, y) \, P \int_{I_y} \frac{\cos u t}{u} \chi(u, y) du \\ &= P \int_{-A}^A du \frac{\cos u t}{u} \left(\int_0^\alpha dy \, g(m, y) \chi_1(u, y) \right) \\ &= P \int_{-A}^A du \frac{\cos u t}{u} \chi_2(u) \\ &= \int_{-A}^A du \frac{\chi_2(u) - \chi_2(0)}{u} \cos u t + \chi_2(0) P \int_{-A}^A du \frac{\cos u t}{u}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Dabei ist $\chi(u, y) = (u/\varphi(u, y)) \partial\varphi(u, y)/\partial u$, wenn mit $\varphi(u, y)$ die Umkehrfunktion von $\varphi(x, y)$ bezeichnet wird. $\chi_1(u, y)$ stimmt auf $u \in I_y$, $0 \leq y \leq \alpha$ mit $\chi(u, y)$ überein, sonst ist $\chi_1(u, y) \equiv 0$. Weiter ist $I_y \subset [-A, A]$, $0 \leq y \leq \alpha$ für geeignetes A und $u = m$ ist innerer Punkt von I_y , $0 \leq y \leq \alpha$. Offenbar ist $(\chi_2(u) - \chi_2(0))/u$ beschränkt und integrierbar; der erste Summand in (6.20) strebt also gegen null für $t \rightarrow \pm\infty$.

(Theorem 1 [10]). Der zweite Summand in (6.20) verschwindet identisch. Damit ist (6.18) bewiesen.

Analog ergibt sich (6.19) aus Theorem 12 [10] unter Berücksichtigung von $\chi_1(m, y) = \chi(m, y) = 1$.

7. Der allgemeine Fall

$D(c, \mu) \subset \mathcal{H}$ sei wie folgt definiert:

$$\Phi \in D(c, \mu) \leftrightarrow \Phi_N \text{ ist } H(\mu)\text{-stetig und } \text{supp } \Phi_N \subset \left\{ (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) \mid \sum_{i=1}^N \omega_i \leq c \right\}.$$

Offenbar ist $\Phi_N = 0$ für $N > c/m$, also ist $D(c, \mu) \subset D$. Umgekehrt existieren c, μ zu $\Phi \in D$ derart, dass $\Phi \in D(c, \mu)$.

$D(c, \mu)$ ist ein Banachraum mit der Norm

$$\|\Phi\|_{D(c, \mu)} = \sum_{N=0}^{\infty} \max \{ \varrho_0(\Phi_N), \sigma_0(\Phi_N) \} \quad \Phi \in D(c, \mu) \quad (7.1)$$

mit $\varrho_0(\Phi_N) = \text{Infimum der Hölderkonstanten von } \Phi_N \text{ und } \sigma_0(\Phi_N) = \max |\Phi_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)|$.

Zwischen der Hilbertnorm $\|\Phi\|$ und der Banachnorm $\|\Phi\|_{D(c, \mu)}$ besteht folgende Beziehung

$$\|\Phi\| \leq \gamma(c) \|\Phi\|_{D(c, \mu)} \quad \gamma(c)^2 = 1 + \sum_{N=1}^{c/m} \int \prod_1^N \frac{d^3 p_i}{2 \omega_i} \quad \sum_1^N \omega_i \leq c \quad (7.2)$$

Der Operator η ist durch

$$\begin{aligned} (\eta \Phi)_N(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N) &= \sum_{K=4}^n \sum_{r=-K+4}^{K-4} \sqrt{\frac{(N+r)!}{N!}} \frac{1}{(K+r)/2!} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{(K-r)/2}} \\ &\times \int \prod_3^{(K+r)/2} \frac{d^3 q_i}{2 \omega_i} f\left(\sum_1^{(K-r)/2} p_{i_t} - \sum_3^{(K+r)/2} q_t\right) \int d\Omega_e \\ &\times k_K(p_{i_1}, \dots, p_{i_{(K-r)/2}}, -s, -t, -q_3, \dots, -q_{(K+r)/2}) \\ &\times \Phi_{N+r}(s, t, q_3, \dots, q_{(K+r)/2}, p_1, \dots, \hat{p}_{i_1}, \dots, \hat{p}_{i_{(K-r)/2}}, \dots, p_N) \end{aligned} \quad (7.3)$$

erklärt, wobei

$$s = s\left(\sum_1^{(K-r)/2} p_{i_m} - \sum_3^{(K+r)/2} q_m, e\right) \quad t = t\left(\sum_1^{(K-r)/2} p_{i_m} - \sum_3^{(K+r)/2} q_m, e\right) \quad (7.4)$$

ist und $\sum_r'$ die Summation über r in geradzahlgigen Schritten bedeutet.

Die Funktionen $k_m(p_1, \dots, p_m)$, $m = 4, \dots, n$, erfüllen die Verallgemeinerung der Bedingungen (1) bis (5) für $k_4(p_1, \dots, p_4)$.

Satz 9:

- a) $[\eta, U(a, \Lambda)] = 0$
- b) $\eta D(c, \mu) \subset D(c, \mu)$
- $$\|\eta \Phi\|_{D(c, \mu)} \leq \delta(c) \|\Phi\|_{D(c, \mu)}.$$

Aus b) folgt

$$e^{z\eta} D(c, \mu) \subset D(c, \mu)$$

$$\|e^{z\eta} \Phi\|_{D(c, \mu)} \leq \sum_0^\infty \frac{|z|^n}{n!} \|\eta^n \Phi\|_{D(c, \mu)} \leq e^{|z|\delta(c)} \|\Phi\|_{D(c, \mu)}$$

und

$$\eta D \subset D, \quad e^{z\eta} D \subset D,$$

$$\sum_0^\infty \frac{|z|^n}{n!} \|\eta^n \Phi\| < \infty$$

- c) $(\eta \Phi, \Psi) = (\Phi, \eta \Psi) \quad \Phi, \Psi \in D.$

D ist also ein dichter Bereich analytischer Vektoren des symmetrischen Operators η ; nach [8] ist η wesentlich selbstadjungiert, besitzt also eine eindeutige selbstadjungierte Erweiterung $\bar{\eta}$. $e^{i\lambda\bar{\eta}}, -\infty < \lambda < \infty$, ist eine einparametrische Schar unitärer Operatoren mit $e^{i\lambda\bar{\eta}} \Phi = e^{i\lambda\eta} \Phi$, $\Phi \in D$ und $[e^{i\lambda\bar{\eta}}, U(a, \Lambda)] = 0$. Insbesondere ist die S-Matrix $S = e^{i\bar{\eta}}$ unitär und invariant unter der Poincaré-Gruppe.

Der Beweis verläuft analog zu dem von Satz 4.

Definiert man

$$\begin{aligned} & \sqrt{2\pi} (\tilde{\alpha}(\tilde{\varphi}) \Phi)_N(p_1, \dots, p_N) = \\ & \sum_{K=3}^{n-1} \sum_{r=-K}^K \sqrt{\frac{(N+r)!}{N!}} \frac{1}{(K+r)/2!} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{(K-r)/2}} \int \prod_1^{(K+r)/2} \frac{d^3 q_i}{2\omega_i} \frac{\tilde{\varphi}\left(\sum_1^{(K+r)/2} q_t - \sum_1^{(K-r)/2} p_{i_t}\right)}{(\sum q_t - \sum p_{i_t})^2 - m^2} \\ & [1 - \chi((\sum q_t - \sum p_{i_t})^2)] k_{K+1}(\sum q_t - \sum p_{i_t}, p_{i_1}, \dots, p_{i_{(K-r)/2}}, -q_1, \dots, -q_{(K+r)/2}) \\ & \Phi_{N+r}(q_1, \dots, q_{(K+r)/2}, p_1, \dots, \hat{p}_{i_1}, \dots, \hat{p}_{i_{(K-r)/2}}, \dots, p_N) \\ & + \sum_{\sigma=+1, -1} \sum_{K=3}^{n-1} \sum_{r=-K+4}^{K-4} \sqrt{\frac{(N+r)!}{N!}} \frac{1}{(K+r)/2!} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{(K-r)/2}} \int \prod_3^{(K+r)/2} \frac{d^3 q_i}{2\omega_i} \int d^3 q \\ & \int_{m-\mu}^{m+\mu} dx \frac{1}{x-m} \frac{x}{x+m} \chi(x^2) \frac{1}{\sqrt{x^2 + q^2}} \tilde{\varphi}(\sigma q) f\left(\sigma q + \sum_1^{(K-r)/2} p_{i_t} - \sum_3^{(K+r)/2} q_t\right) \\ & \int d\Omega_e k_{K+1}(\sigma q, p_{i_1} \dots p_{i_{(K-r)/2}}, -s, -t, -q_3 \dots -q_{(K+r)/2}) \\ & \Phi_{N+r}(s, t, q_3 \dots q_{(K+r)/2}, p_1 \dots \hat{p}_{i_1} \dots \hat{p}_{i_{(K-r)/2}} \dots p_N) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{K=3}^{n-1} \sqrt{\frac{(N+K-2)!}{N!}} \frac{1}{(K-1)!} \sum_i \int \prod_3^{K-1} \frac{d^3 q_j}{2 \omega_j} \int d^3 q \, P \int_{m-\mu}^{m+\mu} dx \frac{1}{x-m} \frac{x}{x+m} \\
& \chi(x^2) \tilde{\varphi}(q) \frac{1}{\sqrt{x^2 + q^2}} f\left(q + p_i - \sum_3^{K-1} q_t\right) \int d\Omega_e k_{K+1}(q, p_i, -s, -t, -q_3 \dots -q_{K-1}) \\
& \Phi_{N+K-2}(s, t, q_3 \dots q_{K-1}, p_1 \dots \hat{p}_i \dots p_N) \\
& + \sum_{K=3}^{n-1} \sqrt{\frac{(N-K+2)!}{N!}} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{K-1}} 2 P \int_{m-\mu}^{m+\mu} dx \frac{1}{x-m} \frac{x}{x+m} \chi(x^2) \\
& \int d\Omega_e \tilde{\varphi}\left(-S\left(\sum_1^{K-1} p_{i_t}, x, e\right)\right) F\left(\sum_1^{K-1} p_{i_t}, x\right) k_{K+1}(-S, p_{i_1} \dots p_{i_{K-1}}, -T) \\
& \Phi_{N-K+2}(T, p_1 \dots \hat{p}_{i_1} \dots \hat{p}_{i_{K-1}} \dots p_N) \tag{7.5}
\end{aligned}$$

so erfüllt das interpolierende Feld $\tilde{A}(\tilde{\varphi})$ nach (5.1) die Sätze 7 und 8. Die Beweise sind analog zum Fall $n = 4$, nur ist in der Argumentation durchgehend mit $D(c, \mu)$ zu operieren (im Fall $n = \infty$ sind nur endlich viele Glieder in (7.3) und (7.5) von null verschieden, so dass keine Konvergenzprobleme auftreten).

Meinem verehrten Lehrer Prof. R. JOST danke ich bestens für die Ermöglichung dieser Arbeit sowie für zahlreiche anregende Diskussionen.

Anhang 1

p_1, p_2 seien zwei Vierervektoren. Die Menge

$$\{(p_1, p_2) \mid p_1^0 = \sqrt{m_1^2 + \mathbf{p}_1^2}, p_2^0 = \sqrt{m_2^2 + \mathbf{p}_2^2}, m_2 \mathbf{p}_1 \neq m_1 \mathbf{p}_2\}$$

wird durch

$$P(p_1, p_2) = p_1 + p_2$$

$$e(p_1, p_2) = \Delta((p_1 + p_2)^2, m_1, m_2)^{-1} L(p_1 + p_2) \left(p_1 - p_2 - \frac{m_1^2 - m_2^2}{(p_1 + p_2)^2} (p_1 + p_2) \right)$$

$$\Delta(s, m_1, m_2) = \sqrt{(s - (m_1 + m_2)^2)(s - (m_1 - m_2)^2)} / \sqrt{s}$$

eindeutig auf die Menge

$$\{(P, e) \mid P^2 > (m_1 + m_2)^2, P^0 > 0, |e| = 1\}$$

abgebildet, denn es gilt:

$$1) \quad (p_1 + p_2)^2 \geq (m_1 + m_2)^2$$

für $p_1^0 = \sqrt{m_1^2 + \mathbf{p}_1^2}$, $p_2^0 = \sqrt{m_2^2 + \mathbf{p}_2^2}$ und das Gleichheitszeichen gilt genau dann, wenn $m_2 \mathbf{p}_1 = m_1 \mathbf{p}_2$ ist.

$$2) \quad \left(p_1 - p_2 - \frac{m_1^2 - m_2^2}{(p_1 + p_2)^2} (p_1 + p_2) \right)^2 = -\Delta((p_1 + p_2)^2, m_1, m_2)^2$$

$$\left(L(p_1 + p_2) \left(p_1 - p_2 - \frac{m_1^2 - m_2^2}{(p_1 + p_2)^2} (p_1 + p_2) \right) \right)^0 = 0.$$

Die inverse Abbildung lautet

$$p_1(P, \mathbf{e}) = \frac{1}{2} \left(\frac{(P^2 + m_1^2 - m_2^2) P}{P^2} + \Delta(P^2, m_1, m_2) L(P)^{-1} \mathbf{e} \right)$$

$$p_2(P, \mathbf{e}) = \frac{1}{2} \left(\frac{(P^2 - m_1^2 + m_2^2) P}{P^2} - \Delta(P^2, m_1, m_2) L(P)^{-1} \mathbf{e} \right)$$

$$\mathbf{e} = (0, \mathbf{e}) \quad |\mathbf{e}| = 1.$$

Man verifiziert leicht

$$p_1(P, \mathbf{e})^2 = m_1^2 \quad p_1^0 > \frac{1}{2} (\sqrt{\Delta^2 + 4 m_1^2} - \Delta) P^0 / P^2 > 0$$

$$p_2(P, \mathbf{e}) = m_2^2 \quad p_2^0 > \frac{1}{2} (\sqrt{\Delta^2 + 4 m_2^2} - \Delta) P^0 / P^2 > 0.$$

Setzt man $\mathbf{e} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$, so folgt

$$\frac{\partial(p_1^1, p_1^2, p_1^3, p_2^1, p_2^2, p_2^3)}{\partial(P^0, P^1, P^2, P^3, \vartheta, \varphi)} = \frac{\partial(p_2^1, p_2^2, p_2^3)}{\partial(P^0, \vartheta, \varphi)} = (1/8 \sqrt{P^2}) \Delta(P^2, m_1, m_2) \sin \vartheta \cdot 4 p_1^0 p_2^0.$$

Daraus folgt

$$\int \frac{d^3 p_1}{2 \sqrt{m_1^2 + \mathbf{p}_1^2}} \int \frac{d^3 p_2}{2 \sqrt{m_2^2 + \mathbf{p}_2^2}} G(p_1, p_2) = \int d^4 P \Theta(P^0) \Theta(P^2 - (m_1 + m_2)^2)$$

$$\frac{\Delta(P^2, m_1, m_2)}{8 \sqrt{P^2}} \int d\Omega_{\mathbf{e}} G(p_1(P, \mathbf{e}), p_2(P, \mathbf{e})).$$

Anhang 2

Sei

$$p = (\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}, \mathbf{p}) \quad q = (\sqrt{m^2 + \mathbf{q}^2}, \mathbf{q})$$

$$A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sqrt{\frac{(p+q)^2 - 4 m^2}{(p+q)^2}} = \sqrt{\frac{p q - m^2}{p q + m^2}},$$

also

$$0 \leq A(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \leq 1.$$

Differenziation ergibt

$$\frac{\partial A(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial p^k} = \frac{1}{p^0} \frac{m^2}{p q + m^2} \frac{1}{\sqrt{(p q)^2 - m^4}} (q^0 p^k - p^0 q^k)$$

$$= \frac{1}{p^0} \frac{m^2}{p q + m^2} \frac{1}{\sqrt{(p q)^2 - p^2 q^2}} (q^0 p^k - p^0 q^k).$$

Damit folgt

$$\sum_{K=1}^3 \left(\frac{\partial A(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial p^k} \right)^2 \frac{1}{p^{0^2}} \frac{m^4}{(p q + m^2)^2} \frac{1}{(p q)^2 - p^2 q^2} (q^{0^2} \mathbf{p}^2 + p^{0^2} \mathbf{q}^2 - 2 p^0 q^0 \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}).$$

Nun gilt für beliebige Vierervektoren a, b

$$(a \cdot b)^2 - a^2 b^2 = a^0{}^2 b^2 + b^0{}^2 a^2 - 2 a^0 b^0 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2;$$

daher ist

$$\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial A(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial p^k} \right)^2 = \frac{m^4}{p^0{}^2 (p \cdot q + m^2)^2} + \frac{m^4 (\mathbf{p} \times \mathbf{q})^2}{p^0{}^2 (p \cdot q + m^2)^2 [(p \cdot q)^2 - p^2 q^2]}.$$

Mit

$$|\mathbf{p}| = m \operatorname{Sh} u, u \geq 0$$

$$|\mathbf{q}| = m \operatorname{Sh} v, v \geq 0$$

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cos 2\alpha$$

folgt

$$\frac{m^4}{p^0{}^2 (p \cdot q + m^2)^2} \leq \frac{1}{4 m^2}$$

und

$$\begin{aligned} & \frac{m^4 (\mathbf{p} \times \mathbf{q})^2}{p^0{}^2 (p \cdot q + m^2)^2 [(p \cdot q)^2 - p^2 q^2]} \\ &= \frac{4 m^8 \operatorname{Sh}^2 u \operatorname{Sh}^2 v \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{m^2 \operatorname{Ch}^2 u m^4 [\operatorname{Ch} (u-v) + 2 \operatorname{Sh} u \operatorname{Sh} v \sin^2 \alpha + 1]^2 [(\operatorname{Ch} (u-v) + 2 \operatorname{Sh} u \operatorname{Sh} v \sin^2 \alpha)^2 - 1]} m^4 \\ &\leq \frac{1}{m^2} \frac{4 \operatorname{Sh}^2 u \operatorname{Sh}^2 v \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\operatorname{Ch}^2 u 4 \operatorname{Ch} (u-v) 4 \operatorname{Sh} u \operatorname{Sh} v \sin^2 \alpha} = \frac{1}{4 m^2} \frac{\operatorname{Sh} u}{\operatorname{Ch} u} \frac{\operatorname{Sh} v}{\operatorname{Ch} u \operatorname{Ch} (u-v)} \cos^2 \alpha \\ &= \frac{1}{4 m^2} \operatorname{Tg} u (\operatorname{Tg} u - \operatorname{Tg} (u-v)) \cos^2 \alpha \leq \frac{1}{2 m^2}. \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial A(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial p^k} \right)^2 \leq \frac{3}{4 m^2}.$$

Für $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ existieren also die Ableitungen $\partial A(\mathbf{p}, \mathbf{q})/\partial p^k$ und sind beschränkt. Ausserdem existieren

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{\partial A}{\partial p^k} (\mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{e}, \mathbf{q}), \quad |\mathbf{e}| = 1.$$

Das ist offenbar hinreichend für die $H(1)$ -Stetigkeit von $A(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ in $\mathbf{p}$. Analoges gilt für die Variable $\mathbf{q}$.

Literaturverzeichnis

- [1] H. LEHMANN, K. SYMANZIK, W. ZIMMERMANN, *Nuovo Cimento* 6, 319 (1957).
- [2] R. JOST, *Helv. phys. Acta* 36, 77 (1963).
- [3] R. JOST, *General Theory of Quantized Fields* (1965).
- [4] F. RIESZ, B. SZ.-NAGY, *Vorlesungen über Funktionalanalysis* (1956).
- [5] R. F. STREATER, A. S. WIGHTMAN, *PCT, Spin and Statistics, and all that* (1964).
- [6] L. SCHWARTZ, *Théorie des Distributions II* (1959).
- [7] G. KÖTHE, *Topologische lineare Räume I* (1960).
- [8] E. NELSON, *Ann. Math.* 70, 572 (1959).
- [9] H. LEHMANN, K. SYMANZIK, W. ZIMMERMANN, *Nuovo Cimento* 1, 425 (1955).
- [10] E. C. TITCHMARSH, *Introduction to the Theory of Fourier Integrals*.