Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 41 (1968)

Heft: 5

Artikel: Application de la théorie relativiste des phénomènes irréversibles à la phénoménologie de la supraconductivité

Autor: Rothen, F.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-113906

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Application de la théorie relativiste des phénomènes irréversibles à la phénoménologie de la supraconductivité [1])

par **F. Rothen**

Institut für Theoretische Physik V der Philipps-Universität Marburg [2])

(26 II 68)

Summary. The dynamics of a superfluid system is thoroughly described with the help of the relativistic theory of irreversible processes; one finds that it is the general form of enthalpy in a continuous system which allows the decomposition of the movement into a superfluid movement and a 'normal' movement. The only specific assumptions are related to the superfluid which is supposed to transport no entropy and to have an irrotational movement. In the case of a type-I superconductor moving with a uniform rotation speed $\vec{\omega}$, it is stated that the ratio of the so created field to ω diverges of the elementary value $2\, m_{electron}/e_{electron}$; this is a mesurable relativistic effect, following JOSEPHSON's suggestion. At last, a result of LUTTINGER concerning the form of the thermal conductivity of a superconductor is generalised.

1. Introduction

Le *modèle des deux fluides* introduit par TISZA [1] pour l'étude des propriétés dynamiques de l'hélium II liquide s'est également révélé fructueux dans l'étude de la supraconductivité [2]. L'irréversibilité du mouvement du fluide normal s'est traduite dès l'origine par l'attribution à ce seul fluide de la totalité de l'entropie du système, hypothèse que l'on retrouve pratiquement dans tous les articles traitant du sujet [3]. Une seconde caractéristique, fondamentale aussi bien pour l'hélium II liquide que pour le supraconducteur, c'est le *caractère irrotationel du mouvement,* caractère reconnu en particulier par LANDAU dans le premier cas [4] et par LONDON dans le second [2].

Le but du présent article est de donner une formulation très générale du phénomène «*superfluidité*» – par là nous entendons aussi bien la supraconductivité que la propriété caractéristique de l'hélium II – et ceci dans le cadre de la théorie des phénomènes irréversibles. Parmi les phénomènes irréversibles considérés, nous envisageons en particulier *les échanges de type chimique* qui peuvent avoir lieu *entre superfluide et fluide normal,* échanges symbolisés sur le plan microscopique et dans le cas du supraconducteur par la formation à partir de deux électrons normaux d'une paire de Cooper, considérée comme molécule d'une substance chimique autre que la «substance électronique normale». *L'équation d'équilibre* ainsi obtenue *joue un role particulier dans la discussion de la conductivité thermique des supraconducteurs du type I* où l'on généralise un résultat de LUTTINGER [5]. La coexistence de plusieurs superfluides [3]) est également

[1]) Ce travail a été accompli grâce à l'appui financier du Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique.

[2]) Adresse actuelle: Institut de Physique Expérimentale de l'Université de Lausanne, Place du Château, Lausanne (Suisse).

[3]) Les notions de *superfluides, substances chimiques,* etc., sont exactement définies au § 2.

considérée dans cet article. Du point de vue phénoménologique, elle correspond, à l'hypothèse selon laquelle les électrons seraient capables de former des paires de Cooper de spin total égal à 1 [6]. L'ensemble de ces paires peut être considéré comme une substance chimique distincte de celle qui est constituée par des paires à spin nul, et à ce titre la coexistence d'au moins deux superfluides aux propriétés presque semblables [6] est physiquement concevable.

La formulation de la théorie des phénomènes irréversibles utilisée dans cet article est celle de STUECKELBERG et WANDERS [7]. Le formalisme relativiste utilisé est particulièrement adapté aux propriétés du superfluide. De plus, il trouve son utilité directe au § 7 où l'on montre l'existence en supraconductivité d'un effet relativiste observable, effet prévu par JOSEPHSON [8]. *La métrique que nous avons utilisée est tout à fait générale:* De WITT et d'autres [9] ont attiré l'attention sur l'existence d'effets gravitationnels à l'intérieur des supraconducteurs du type I comme la production de courants par un champ de LENSE-THIRRING [10]. Il convient de noter expressément que la généralité attribuée à la métrique est la seule allusion à la relativité générale: *la métrique est supposée donnée d'avance* et agit uniquement comme champ extérieur.

Dans une première partie (§§ 2 à 5) nous développons le formalisme général qui permet d'exprimer le mouvement d'un système comprenant des composantes superfluides. La seconde partie (§§ 6 à 8) est consacrée à l'application de ce formalisme à un supraconducteur du type I. Les résultats obtenus sont également développés dans le cas non relativiste, tout particulièrement en ce qui concerne la conductivité thermique.

2. Equations de continuité

Nous considérons un système isolé quelconque formé de *substances chimiques*. Outre *les premier et second principes* de la thermodynamique, le système vérifie *les lois de conservation de la quantité de mouvement et du moment cinétique totaux.*

Sous forme locale, ces lois de conservation s'écrivent[4])

$$D_\alpha \theta^{\alpha\beta} = 0 \tag{2.1}$$

Equation de conservation du tenseur impulsion-énergie.

$$D_\alpha s^\alpha = i \tag{2.2a}$$

Equation de continuité pour l'entropie.

$$i \geqslant 0 \tag{2.2b}$$

Expression locale du second principe.

$$D_\alpha n^\alpha_{\mathcal{A}} = \varrho_{\mathcal{A}} \tag{2.3a}$$

Equation de continuité pour la substance $\mathcal{A}$.

$$\sum_{\mathcal{A}=1}^{C} c_{k\mathcal{A}} \varrho_{\mathcal{A}} = 0 \tag{2.3b}$$

Loi des proportions constantes.

---

[4]) Le formalisme adopté est celui de la relativité généralisée; la métrique $g_{\alpha\beta}$ prend dans un repère galiléen la forme $g_{ii} = -1$, $g_{44} = 1$, $g_{\alpha\beta} = 0$ ($\alpha \neq \beta$); un indice latin prend les valeurs 1 à 3 alors que tout indice grec prend l'ensemble des valeurs de 1 à 4. Par définition $\partial_\alpha f \equiv \partial/\partial x^\alpha f$, alors que D_α désigne la dérivation covariante. Les grandeurs locales considérées dépendent de *l'événement* $x^\alpha = \{\boldsymbol{x}, \mathrm{ct}\}$.

s^α désigne le *courant* quadridimensionnel *d'entropie* et i sa source, ou *irréversibilité;* $n^\alpha_{\mathcal{A}}$ désigne le *courant* quadridimensionnel *de substance* $\mathcal{A}$ et $\varrho_{\mathcal{A}}$ la *vitesse de production de la substance* $\mathcal{A}$. La chimie relie les $\varrho_{\mathcal{A}}$ ($\gtrless 0$) par la loi des proportions constantes (2.3b), les coefficients $C_{k\mathcal{A}}$ étant des entiers non négatifs et l'indice $k = 1, \ldots n$ dénombrant les *espèces chimiques*[5]).

L'équation (2.3b) se résoud immédiatement sous la forme

$$\varrho_{\mathcal{A}} = \sum_{\Lambda} \nu_{\mathcal{A}\Lambda}\, \omega_{\Lambda} \tag{2.4}$$

ω_Λ est ici *la vitesse de* la Λ^e *réaction* chimique ($\Lambda = 1, \ldots \Xi$), et les entiers $\nu_{\mathcal{A}\Lambda}$ satisfont l'équation

$$\sum_{\mathcal{A}} c_{k\mathcal{A}}\, \nu_{\mathcal{A}\Lambda} = 0 \tag{2.5}$$

Un système normal peut être caractérisé par les variables d'état $s(x)$, $n_{\mathcal{A}}(x)$ et $u^\alpha(x)$ où u^α est la quadrivitesse d'un élément de fluide. Conformément à l'esprit du modèle des deux fluides, et à côté des variables coutumières s et $n_{\mathcal{A}}$, nous introduisons dans le modèle considéré ici $N + 1$ variables $u^\alpha_B(x)$, chacune définie en un point-événement du système et décrivant chacune le mouvement d'un *fluide* B différent, qui trouve là sa définition ($B = 0, 1, \ldots N$).

C'est l'existence de ces différentes quadrivitesses u^α_B, chacune normalisée suivant l'équation

$$u^\alpha_B\, u_{B\alpha} = c^2 \tag{2.6}$$

qui définit donc la notion de fluide. La fluide repéré à l'aide de l'indice 0 est par définition le *fluide normal;* les N autres fluides sont des *superfluides*. Au § 1 nous avons déjà mentionné la possibilité de l'introduction de plusieurs superfluides dans un même système: un supraconducteur dans lequel coexistent des paires de Cooper de spin total 0 et 1 constitue un exemple de système comportant 2 superfluides.
Pour préciser les notions de substance chimique et de fluide, nous leur imposons les restrictions suivantes:

1) *Chaque substance chimique appartient à un et un seul fluide.*

2) *Chaque superfluide est constitué d'une seule substance chimique.*

3) *L'équation de continuité du tenseur impulsion-énergie se décompose en une somme de termes relatifs à chacun des fluides*

$$D_\alpha\, \theta^{\alpha\beta} = \sum_{B=0}^{N} (D_\alpha\, \theta^{\alpha\beta})_B\,. \tag{2.7}$$

Plus précisément, l'expression $(D_\alpha\, \theta^{\alpha\beta})_B$ n'est formée que de fonctions d'état relatives au seul fluide B.

4) La décomposition (2.7) se fait après *attribution de l'entropie au fluide normal.*

Ces différents points appellent certains commentaires: *La notion de substance chimique est plus fine que la notion habituelle.* Est considéré par exemple comme

[5]) Par là nous entendons un type déterminé de particule ou d'atome. Voir par exemple au § 6.

substance chimique l'ensemble des paires de Cooper de spin nul[6]). D'autre part la restriction 1) conduit dans le cas de l'He II à considérer 2 substances He différentes suivant leur appartenance à l'un ou l'autre des superfluides. *Dans tous les cas on vérifie* néanmoins *l'existence d'une loi des proportions constantes* (2.3b) *avec des coefficients* $C_{k_{\mathcal{A}}}$ *entiers.*

Ces 4 restrictions ont pour conséquence qu'il est possible d'écrire pour chaque fluide une série d'équations de continuité analogues aux équations (2.1) à (2.3):

Pour le fluide normal, on a

$$(D_\alpha \theta^{\alpha\beta})_0 = \varrho_0^\beta \tag{2.8a}$$

$$D_\alpha n^\alpha_{\mathcal{A}_0} = \varrho_{\mathcal{A}_0} \tag{2.8b}$$

$$D_\alpha s^\alpha = i \geqslant 0 \tag{2.8c}$$

$\mathcal{A}_0 = 1_0, \ldots \mathsf{C}_0$ désigne les substances qui forment le fluide normal.

alors que pour chaque superfluide D $(D = 1, \ldots N)$

$$(D_\alpha \theta^{\alpha\beta})_D = \varrho_D^\beta \tag{2.9a}$$

$$D_\alpha n_D^\alpha = \varrho_D \,. \tag{2.9b}$$

A cause de (2.7), les fonctions ϱ_B^β – qui sont encore inconnues – satisfont à l'équation

$$\sum_{B=0}^{N} \varrho_B^\beta = 0 \tag{2.10}$$

Les équations (2.8) sont au nombre de $\mathsf{C}_0 + 5$ pour les $\mathsf{C}_0 + 4$ variables indépendantes u_0^α, s, $n_{\mathcal{A}_0}$ (les composantes u_0^α ne comptent que pour 3 variables à cause de (2.6)). De même, on compte 5 équations (2.9) pour les 4 variables u_D^α et n_D. Il doit donc exister dans chacun des cas une identité entre les différentes équations de continuité, identités que nous écrivons

$$[(D_\alpha \theta^{\alpha\beta})_0 - \varrho_0^\beta]\, u_{0\beta} - \sum_{\mathcal{A}_0} \mu'_{\mathcal{A}_0} (D_\alpha n^\alpha_{\mathcal{A}_0} - \varrho_{\mathcal{A}_0}) - T' (D_\alpha s^\alpha - i) \equiv 0 \tag{2.11a}$$

$$[(D_\alpha \theta^{\alpha\beta})_D - \varrho_D^\beta]\, u_{D\beta} - \mu'_D (D_\alpha n_D^\alpha - \varrho_D) \equiv 0 \tag{2.11b}$$

en généralisant la méthode de STUECKELBERG et WANDERS [7]. $\mu'_{\mathcal{A}}$ et T' sont des fonctions d'état encore indéterminées.

3. Partie réversible du tenseur impulsion-énergie

En hydrodynamique, le tenseur impulsion-énergie se compose de 2 parties, une partie réversible $\theta^{\alpha\beta}_{rév}$ qui décrit le «fluide parfait»[7]) et une partie irréversible $\theta^{\alpha\beta}_{irr}$; $\theta^{\alpha\beta}_{rév}$ s'écrit sous la forme

$$\theta^{\alpha\beta}_{rév} = \frac{w}{c^2} u^\alpha u^\beta - g^{\alpha\beta} p \,.$$

[6]) On peut considérer cependant une paire de Cooper comme un atome de masse atomique nulle 2 fois ionisé!

[7]) Le fluide parfait ne doit pas être confondu avec le superfluide.

w, qui dans un référentiel local géodésique au repos LGR[8]) s'identifie à l'enthalpie spécifique, a ici la forme

$$w = u + p = \sum_{\mathcal{A}} \mu_{\mathcal{A}}\, n_{\mathcal{A}} + Ts \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mu_{\mathcal{A}} = \dfrac{\partial u}{\partial n_{\mathcal{A}}} \\ T = \dfrac{\partial u}{\partial s} \end{array} \right.$$

u étant l'énergie interne spécifique et p la pression. Dans le cas étudié, on pose

$$\theta^{\alpha\beta}_{rév} = \theta^{\alpha\beta}_{fp} + \theta^{\alpha\beta}_{e'm} \tag{3.1a}$$

$$\theta^{\alpha\beta}_{fp} = \sum_{D=I}^{N} \frac{\mu_D}{c^2}\, n_D\, u^\alpha_D\, u^\beta_D + \sum_{\mathcal{A}_0=1_0}^{C_0} \frac{\mu_{\mathcal{A}_0}}{c^2}\, n_{\mathcal{A}_0}\, u^\alpha_0\, u^\beta_0 + \frac{T_s}{c^2}\, u^\alpha_0\, u^\beta_0$$

$$- g^{\alpha\beta}\, p = \sum_{B=0}^{N} \frac{w_A}{c^2}\, u^\alpha_{\mathcal{A}}\, u^\beta_{\mathcal{A}} - g^{\alpha\beta}\, p \tag{3.1b}$$

$$\theta^{\alpha\beta}_{e'm} = \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{4}\, B_{\gamma\delta}\, B^{\gamma\delta}\, g^{\alpha\beta} - B^{\alpha\gamma}\, B^{\beta\delta}\, g_{\gamma\delta} \right] \tag{3.1c}$$

$B_{\alpha\beta} = \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha$ est le *champ électromagnétique* et $A_\beta = (A_i, -u/c)$ le *quadripotentiel électromagnétique;* μ_0 est ici la permittivité du vide, toute polarisation tant électrique que magnétique étant exclue. C'est le système d'unités MKSA qui est utilisé.

En l'absence de polarisation, les équations de Maxwell s'écrivent

$$D_\gamma\, B^{\gamma\alpha} = \mu_0\, j^\alpha_t \tag{3.2a}$$

$$D_\alpha\, B_{\beta\gamma} + D_\beta\, B_{\gamma\alpha} + D_\gamma\, B_{\alpha\beta} = 0 \tag{3.2b}$$

où j^α_t est le (quadri) *courant de charge total.* En conséquence

$$D_\alpha\, \theta^{\alpha\beta}_{e'm} = - j_{t\gamma}\, B^{\gamma\beta}\,. \tag{3.3}$$

Le courant de charge total s'exprime à l'aide des courants de matière par la relation

$$j^\gamma_t = \sum_{\mathcal{A}_0=1_0}^{C_0} e_{\mathcal{A}_0}\, n^\gamma_{\mathcal{A}_0} + \sum_{D=1}^{N} e_D\, n^\gamma_D \equiv \sum_{\mathcal{A}=1}^{C} j^\gamma_{\mathcal{A}} \tag{3.4}$$

qui définit les *charges élémentaires* $e_{\mathcal{A}}$.

D'autre part

$$\delta p = \sum_{\mathcal{A}_0=1_0}^{C_0} n_{\mathcal{A}_0}\, \delta\mu_{\mathcal{A}_0} + s\, \delta T + \sum_{D=1}^{N} n_D\, \delta\mu_D \equiv \sum_{B=0}^{N} \delta p_B\,. \tag{3.5}$$

Il vient par conséquent

$$D_\alpha\, \theta^{\alpha\beta}_{rév} = \sum_{B=0}^{N} \left[- j_{B\gamma}\, B^{\gamma\beta} + D_\alpha \left(\frac{w_B}{c^2}\, u^\alpha_B\, u^\beta_B \right) - D^\beta\, p_B \right] \equiv \sum_{B=0}^{N} (D_\alpha\, \theta^{\alpha\beta}_{rév})_B \tag{3.6}$$

et la décomposition imposée par la restriction 3) est effectivement réalisable pour la partie réversible des équations du mouvement.

---

[8]) C'est à dire où $u^\alpha = (0, 0, 0, c)$ et g_{00} est galiléen.

4. Mouvement du superfluide

L'équation du mouvement du superfluide (2.9a) prend la forme

$$D_\alpha \theta^{\alpha\beta} - \varrho_D^\beta = D_\alpha \left(n_D \frac{\mu_D}{c^2} u_D^\alpha u_D^\beta\right) - D^\beta p_D - j_{D\gamma} B^{\gamma\beta} - \varrho_D^\beta = \frac{\mu_D}{c^2} u_D^\beta D_\alpha(n_D u_D^\alpha)$$
$$+ n_D u_D^\alpha \left[D_\alpha \frac{\mu_D}{c^2} u_D^\beta\right] - n_D D^\beta \mu_D - e_D n_{D\gamma} (D^\gamma A^\beta - D^\beta A^\gamma) - \varrho_D^\beta = 0 .$$

A cause de (2.6)

$$u_D^\alpha D_\beta u_{D\alpha} = 0 . \tag{4.1}$$

Il vient par conséquent, après réarrangement des différents termes,

$$n_D u_{D\alpha} \left[D^\alpha \left(\frac{\mu_D}{c^2} u_D^\beta - e_D A^\beta\right) - D^\beta \left(\frac{\mu_D}{c^2} u_D^\alpha - e_D A^\alpha\right)\right] + \frac{\mu_D}{c^2} u_D^\beta D_\alpha(n_D u_D^\alpha)$$
$$- e_D (n_{D\alpha} - n_D u_{D\alpha}) (D^\alpha A^\beta - D^\beta A^\alpha) - \varrho_D^\beta = 0 . \tag{4.2}$$

L'équation (4.2) a comme solution particulière le système[9])

$$\partial_\alpha \left(\frac{\mu_D}{c^2} u_{D\beta} - e_D A_\beta\right) - \partial_\beta \left(\frac{\mu_D}{c^2} u_{D\alpha} - e_D A_\alpha\right) = 0 \tag{4.3}$$

$$\varrho_D^\beta = \frac{\mu_D}{c^2} u_D^\beta D_\alpha(n_D u_D^\alpha) - e_D (n_{D\alpha} - n_D u_{D\alpha}) B^{\alpha\beta} \tag{4.4}$$

Les équations (4.3) constituent *les équations de London sous forme relativiste* que nous considérons comme valables pour un superfluide D dans tous les cas, même en dehors de l'équilibre (mis à part les phénomènes de haute fréquence).

Si l'on introduit (4.3) et (4.4) dans l'identité (2.11b), il vient

$$\mu_D D_\alpha(n_D u_D^\alpha) - e_D n_{D\alpha} u_\beta B^{\alpha\beta} - \varrho_D^\beta u_{D\beta} \equiv \mu_D' (D_\alpha n_D^\alpha - \varrho_D) \tag{4.5}$$

identité satisfaite par

$$\mu_D' \equiv \mu_D \tag{4.6}$$

$$n_D^\alpha \equiv n_D u_D^\alpha . \tag{4.7}$$

L'équation (4.4) permet alors de déterminer ϱ_D^β:

$$\varrho_D^\beta = \frac{\mu_D}{c^2} u_D^\beta \varrho_D . \tag{4.8}$$

5. L'irréversibilité du mouvement

Conformément à l'identité (2.11a), le mouvement du fluide normal est irréversible. Nous introduisons donc dans $\theta_0^{\alpha\beta}$ un terme irréversible $\theta_{0\,irr}^{\alpha\beta}$ dont on admet a priori qu'il a la forme d'une combinaison linéaire covariante en les gradients des différentes fonctions d'état, en le champ électromagnétique et en les vitesses de réaction, cette combinaison étant la plus générale possible; cette linéarité de $\theta_{0\,irr}^{\alpha\beta}$ entraîne la propriété correspondante pour les différents courants.

Avant toute chose, nous donnons encore quelques définitions: A partir du tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$, on peut former un tenseur analogue $g_{\perp\alpha\beta}$ normal à la quadrivitesse u_0^α:

$$g_{\perp\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \frac{u_{0\alpha} u_{0\beta}}{c^2} \tag{5.1}$$

[9]) A cause de sa forme particulière, l'équation (4.3) s'écrit indifféremment à l'aide de dérivées partielles simples ou à l'aide de dérivées covariantes.

$g_{\perp\alpha\beta}$ permet de former à partir d'un tenseur arbitraire $\tau^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\beta_1\cdots\beta_m}$ un tenseur $\tau_{\perp}{}^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\beta_1\cdots\beta_m}$ totalement orthogonal à u_0^α:

$$\tau_{\perp}{}^{\alpha_1\cdots\alpha_n}_{\beta_1\cdots\beta_m} = g_{\perp}{}^{\alpha_1}_{\alpha'_1}\cdots g_{\perp}{}^{\alpha_n}_{\alpha'_n}\, g_{\perp}{}^{\beta'_1}_{\beta_1}\cdots g_{\perp}{}^{\beta'_m}_{\beta_m}\, \tau^{\alpha'_1\cdots\alpha'_n}_{\beta'_1\cdots\beta'_m}\,. \tag{5.2}$$

A partir de

$$u_{0\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}\,(D_\alpha\, u_{0\beta} + D_\beta\, u_{0\alpha})$$

on forme par exemple $u_{0\perp}^{\alpha\beta}$; on note les propriétés suivantes (pour toute grandeur f, nous désignons par $\dot{f}$ la dérivée matérielle $u_{0\alpha}\, D^\alpha f$):

$$u_{0\perp\alpha}^{\alpha} = u_{0\alpha}^{\alpha} \tag{5.3}$$

$$u_{0\alpha\beta}\, u_0^\alpha = \frac{1}{2}\, u_0^\gamma\, D_\gamma\, u_{0\beta} \equiv \frac{1}{2}\, \dot{u}_{0\beta} \tag{5.4}$$

$$\dot{u}_{0\alpha}\, u_0^\alpha = 0\,. \tag{5.5}$$

Compte tenu de ces définitions, la forme la plus générale de $\theta_{0irr}^{\alpha\beta}$ qui soit compatible avec les conditions de linéarité et d'invariance relativiste est la suivante:

$$\begin{aligned}\theta_{0irr}^{\alpha\beta} = {} & \varkappa_1\, \mathring{u}_{0\perp}^{\alpha\beta} + \varkappa_2\, u_{0\perp\gamma}^{\gamma}\, g_\perp^{\alpha\beta} + \varkappa_3\,(u_0^\alpha\, \dot{u}_0^\beta + u_0^\beta\, \dot{u}_0^\alpha) + \varkappa_4\, u_{0\perp\gamma}^{\gamma}\, g^{\alpha\beta} \\ & + \Big(\varkappa_5\, \dot{T} + \sum_{\mathcal{A}_0} \varkappa_{6\mathcal{A}_0}\, \dot{\mu}_{\mathcal{A}_0}\Big)\, g^{\alpha\beta} + \Big(\varkappa_7\, \dot{T} + \sum_{\mathcal{A}_0} \varkappa_{8\mathcal{A}_0}\, \dot{\mu}_{\mathcal{A}_0}\Big)\, g_\perp^{\alpha\beta} \\ & + \sum_{\Lambda} \varkappa_{9\Lambda}\, \omega_\Lambda\, g_\perp^{\alpha\beta} + \sum_{\Lambda} \varkappa_{10\Lambda}\, \omega_\Lambda\, g^{\alpha\beta} + J_Q^\alpha\, \frac{u_0{}^\beta}{c^2} + J_Q^\beta\, \frac{u_0{}^\alpha}{c^2} \\ & + \sum_{\mathcal{A}_0} \Big[J_{\mathcal{A}_0}^\alpha\, \frac{u_0{}^\beta}{c^2} + J_{\mathcal{A}_0}^\beta\, \frac{u_0{}^\alpha}{c^2}\Big]\end{aligned} \tag{5.6}$$

où

$$\mathring{u}_{0\perp}^{\alpha\beta} = u_{0\perp}^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\, g_\perp^{\alpha\beta}\, u_{0\perp\gamma}^{\gamma} \tag{5.7a}$$

$$\mathring{u}_{0\perp\alpha}^{\alpha} = 0 \tag{5.7b}$$

et

$$\begin{aligned} J_Q^\alpha = {} & \tilde{L}_{QQ}\Big(g_\perp^{\alpha\beta}\, \partial_\beta\, T - \frac{\dot{u}_0^\alpha\, T}{c^2}\Big) \\ & + \sum_{\mathcal{A}_0} \tilde{L}_{Q\mathcal{A}_0}\Big(g_\perp^{\alpha\gamma}\, \partial_\gamma\, \mu_{\mathcal{A}_0} - \frac{\dot{u}_0^\alpha}{c^2}\, \mu_{\mathcal{A}_0} - e_{\mathcal{A}_0}\, B^{\alpha\gamma}\, u_{0\gamma}\Big)\end{aligned} \tag{5.8a}$$

$$\begin{aligned} J_{\mathcal{A}_0}^\alpha = {} & \sum_{\mathcal{B}_0} \tilde{L}_{\mathcal{A}_0\mathcal{B}_0}\Big(g^{\alpha\gamma}\, \partial_\gamma\, \mu_{\mathcal{B}_0} - \frac{\dot{u}_0^\alpha}{c^2}\, \mu_{\mathcal{B}_0} - e_{\mathcal{B}_0}\, B^{\alpha\gamma}\, u_{0\gamma}\Big) \\ & + \tilde{L}_{\mathcal{A}_0 Q}\Big(g_\perp^{\alpha\gamma}\, \partial_\gamma\, T - \frac{\dot{u}_0^\alpha}{c^2}\, T\Big)\end{aligned} \tag{5.8b}$$

Les coefficients nouveaux comme $\varkappa_i$, $\tilde{L}_{QQ}$, etc., sont des fonctions d'état inconnues indépendantes des dérivées de fonctions d'état, du champ électromagnétique et des vitesses de réaction. L'arrangement des termes des équations (5.6) et (5.8) a été choisi

pour des raisons de commodité sans que la généralité de l'expression (5.6) en eût été réduite. Le même souci de généralité ne s'oppose pas à ce qui la matrice $\tilde{L}$ définie par

$$\tilde{L} \equiv \begin{Bmatrix} \tilde{L}_{QQ}\, \tilde{L}_{Q10} \cdots \tilde{L}_{Q\mathcal{C}0} \\ \tilde{L}_{10Q} \\ \cdots \\ \tilde{L}_{\mathcal{C}0Q} \end{Bmatrix}$$

soit inversible. On note enfin que le *courant de chaleur* J_Q^α et les *courants de diffusion* $J_{\mathcal{A}0}^\alpha$ sont par construction orthogonaux à la quadrivitesse u_0^α:

$$J_Q^\alpha\, u_{0\alpha} = J_{\mathcal{A}0}^\alpha\, u_{0\alpha} = 0\,. \tag{5.9}$$

Pour utiliser l'identité (2.11a), il faut évaluer tout d'abord l'expression

$$u_{0\beta}\, D_\alpha\, \theta_0^{\alpha\beta} = u_{0\beta}\, [D_\alpha\, \theta_{0fp}^{\alpha\beta} + D_\alpha\, \theta_{0e'm}^{\alpha\beta} + D_\alpha\, \theta_{0irr}^{\alpha\beta}]$$

$$= u_{0\beta} \left[D_\alpha \left(\frac{w_0}{c^2}\, u_0^\alpha\, u_0^\beta\right) - D^\beta\, p_0\right] + D_\alpha(u_{0\beta}\, \theta_{0irr}^{\alpha\beta}) - u_{0\beta}\, j_{0\gamma}\, B^{\gamma\beta} - \theta_{0irr}^{\alpha\beta}\, u_{0\alpha\beta}\,. \tag{5.10}$$

On vérifie sans difficulté que

$$u_{0\beta} \left(D_\alpha \left(\frac{w_0}{c^2}\, u_0^\alpha\, u_0^\beta\right) - D^\beta\, p_0\right) = T\, D_\alpha\, (s\, u_0^\alpha) + \sum_{\mathcal{A}0} \mu_{\mathcal{A}0}\, D_\alpha(n_{\mathcal{A}0}\, u_0^\alpha)\,. \tag{5.11}$$

Il convient de s'arrêter sur le calcul du dernier terme de (5.10); on obtient tout d'abord à l'aide de (5.4), (5.5) et (5.7)

$$\theta_{0irr}^{\alpha\beta}\, u_{0\alpha\beta} = \varkappa_1\, \mathring{u}_{0\perp\alpha\beta}\, \mathring{u}_{0\perp}^{\alpha\beta} + \left(\varkappa_2 + \frac{1}{3}\, \varkappa_1 + \varkappa_4\right) (u_{0\perp\gamma}^\gamma)^2 + \varkappa_3\, \dot{u}_{0\alpha}\, \dot{u}_0^\alpha$$
$$+ \left(\varkappa_5\, \dot{T} + \sum_{\mathcal{A}0} \varkappa_{6\mathcal{A}0}\, \dot{\mu}_{\mathcal{A}0}\right) u_{0\perp\gamma}^\gamma + \sum_{\Lambda} (\varkappa_{9\Lambda} + \varkappa_{10\Lambda})\, \omega_\Lambda\, u_{0\perp\gamma}^\gamma + J_Q^\alpha\, \frac{\dot{u}_{0\alpha}}{c^2}$$
$$+ \sum_{\mathcal{A}0} J_{\mathcal{A}0}^\alpha\, \frac{\dot{u}_{0\alpha}}{c^2}\,. \tag{5.12}$$

Grâce aux hypothèses faites sur la matrice $\tilde{L}$, les équations (5.8) sont solubles relativement à $\dot{u}_0^\alpha$. Il vient

$$T_\perp^\alpha - \frac{\dot{u}_0^\alpha}{c^2}\, T = \tilde{L}_{QQ}^{-1}\, J_Q^\alpha + \sum_{\mathcal{A}0} \tilde{L}_{Q\mathcal{A}0}^{-1}\, J_{\mathcal{A}0}^\alpha \tag{5.13a}$$

$$\mu_{\mathcal{A}0\perp}^\alpha - e_{\mathcal{A}0}\, B^{\alpha\gamma}\, u_{0\gamma} - \frac{\dot{u}_0^\alpha}{c^2}\, \mu_{\mathcal{A}0} = \sum_{\mathcal{B}0} \tilde{L}_{\mathcal{A}0\mathcal{B}0}^{-1}\, J_{\mathcal{B}0}^\alpha + \tilde{L}_{\mathcal{A}0Q}^{-1}\, J_Q^\alpha \tag{5.13b}$$

où

$$f_\perp^\alpha \equiv g_\perp^{\alpha\beta}\, \partial_\beta\, f\,.$$

Utilisant alors tour à tour (5.13a) et (5.13b) suivant que $\dot{u}_{0\alpha}$ forme un produit scalaire avec J_Q^α ou $J_{\mathcal{A}0}^\alpha$, on transforme les 2 derniers termes de (5.12) suivant la formule

$$J_Q^\alpha\, \frac{\dot{u}_{0\alpha}}{c^2} + \sum_{\mathcal{A}0} J_{\mathcal{A}0}^\alpha\, \frac{\dot{u}_{0\alpha}}{c^2} = \frac{J_{Q\alpha}}{T} \left[T_\perp^\alpha - \tilde{L}_{QQ}^{-1}\, J_Q^\alpha - \sum_{\mathcal{A}0} \tilde{L}_{Q\mathcal{A}0}^{-1}\, J_{\mathcal{A}0}^\alpha\right]$$
$$+ \sum_{\mathcal{A}0} \frac{J_{\mathcal{A}0\alpha}}{\mu_{\mathcal{A}0}} \left[\mu_{\mathcal{A}0\perp}^\alpha - e_{\mathcal{A}0}\, B^{\alpha\gamma}\, u_{0\gamma} - \sum_{\mathcal{B}0} \tilde{L}_{\mathcal{A}0\mathcal{B}0}^{-1}\, J_{\mathcal{B}0}^\alpha - \tilde{L}_{\mathcal{A}0Q}^{-1}\, J_Q^\alpha\right] \tag{5.14}$$

Dès lors, compte tenu de (2.10), (4.8), (5.10), (5.11), (5.12) et (5.14), l'identité (2.11a) s'écrit

$$
\begin{aligned}
T\, D_\alpha(s\, u_0^\alpha) &+ \sum_{\mathcal{A}_0} \mu_{\mathcal{A}_0}\, D_\alpha(n_{\mathcal{A}_0}\, u_0^\alpha) + D_\alpha \{\varkappa_3\, c^2\, \dot{u}_0^\alpha + [\varkappa_4\, u_{0\perp\gamma}^\gamma + (\varkappa_5 + \varkappa_7\, c^2)\, \dot{T} \\
&+ \sum_{\mathcal{A}_0} (\varkappa_{6\mathcal{A}_0} + \varkappa_{8\mathcal{A}_0}\, c^2)\, \dot{\mu}_{\mathcal{A}_0} + \sum_{\Lambda} \varkappa_{10\Lambda}\, \omega_\Lambda]\, u_0^\alpha + J_Q^\alpha + \sum_{\mathcal{A}_0} J_{\mathcal{A}_0}^\alpha\} \\
&- \varkappa_1\, \mathring{u}_{0\perp\alpha\beta}\, \mathring{u}_{0\perp}^{\alpha\beta} - \left(\frac{\varkappa_1}{3} + \varkappa_2 + \varkappa_4\right) (u_{0\perp\gamma}^\gamma)^2 - \varkappa_3\, \dot{u}_{0\alpha}\, \dot{u}_0^\alpha - u_{0\perp\gamma}^\gamma\, [\varkappa_5\, T \\
&+ \sum_{\mathcal{A}_0} \varkappa_{6\mathcal{A}_0}\, \dot{\mu}_{\mathcal{A}_0} + \sum_{\Lambda} (\varkappa_{9\Lambda} + \varkappa_{10\Lambda})] - \frac{J_{Q\alpha}}{\tau}\, T_\perp^\alpha - \sum_{\mathcal{A}_0} \frac{J_{\mathcal{A}_0\alpha}}{\mu_{\mathcal{A}_0}}\, \mu_{\mathcal{A}_0\perp}^\alpha \\
&+ \frac{\tilde{L}_{QQ}^{-1}}{T}\, J_{Q\alpha}\, J_Q^\alpha + \sum_{\mathcal{A}_0} \frac{\tilde{L}_{Q\mathcal{A}_0}^{-1}}{T}\, J_{Q\alpha}\, J_{\mathcal{A}_0}^\alpha + \sum_{\mathcal{A}_0 \mathcal{B}_0} \frac{\tilde{L}_{\mathcal{A}_0 \mathcal{B}_0}^{-1}}{\mu_{\mathcal{A}_0}}\, J_{\mathcal{A}_0\alpha}\, J_{\mathcal{B}_0}^\alpha \\
&+ \sum_{\mathcal{A}_0} \frac{\tilde{L}_{\mathcal{A}_0 Q}^{-1}}{\mu_{\mathcal{A}_0}}\, J_{\mathcal{A}_0\alpha}\, J_Q^\alpha + \sum_{\mathcal{A}_0} \frac{J_{\mathcal{A}_0\alpha}}{\mu_{\mathcal{A}_0}}\, e_{\mathcal{A}_0}\, B^{\alpha\gamma}\, u_{0\gamma} - \sum_{\mathcal{A}_0} e_{\mathcal{A}_0}\, n_{\mathcal{A}_0\gamma}\, B^{\gamma\beta}\, u_{0\beta} \\
&+ \sum_{D=1}^{N} u_{0\beta}\, \frac{\mu_D}{c^2}\, u_D^\beta \sum_{\Lambda} \nu_{D\Lambda}\, \omega_\Lambda - \sum_{\mathcal{A}_0} \mu'_{\mathcal{A}_0}\, D_\alpha\, n_{\mathcal{A}_0}^\alpha + \sum_{\mathcal{A}_0} \sum_{\Lambda} \mu'_{\mathcal{A}_0}\, \nu_{\mathcal{A}_0\Lambda}\, \omega_\Lambda \\
&- T'\, D_\alpha\, s^\alpha + i\, T' \equiv 0
\end{aligned}
\tag{5.15}
$$

avec la condition

$$i \geqslant 0$$

On est conduit aux identifications suivantes

$$\varkappa_3 \equiv \varkappa_4 \equiv \varkappa_5 \equiv \varkappa_{6\mathcal{A}_0} \equiv \varkappa_7 \equiv \varkappa_{8\mathcal{A}_0} \equiv \varkappa_{10\Lambda} \equiv 0 \tag{5.16a}$$

$$T' = T \quad \mu'_{\mathcal{A}_0} = \mu_{\mathcal{A}_0} \tag{5.16b}$$

$$J_{\mathcal{A}_0}^\alpha \equiv \mu_{\mathcal{A}_0}\, n_{\mathcal{A}_0\perp}^\alpha \qquad J_Q^\alpha \equiv T\, s_\perp^\alpha \tag{5.16c}$$

$$n_{\mathcal{A}_0}^\alpha \equiv n_{\mathcal{A}_0}\, u_0^\alpha + n_{\mathcal{A}_0\perp}^\alpha \qquad s^\alpha \equiv s\, u_0^\alpha + s_\perp^\alpha \tag{5.16d}$$

Dans ces conditions, on peut exprimer i comme forme quadratique en les courants et la condition que la forme soit définie s'exprime comme une condition sur la matrice des coefficients.

Si l'on pose encore

$$
\begin{aligned}
\omega_\Lambda = -\sum_{\Lambda'} \zeta_{\Lambda\Lambda'}\, \Phi_{\Lambda'} + \theta_\Lambda\, u_{0\perp\gamma}^\gamma \equiv -\sum_{\Lambda'} \zeta_{\Lambda\Lambda'} \Bigg[&\sum_{\mathcal{A}_0} \frac{\mu_{\mathcal{A}_0}}{c^2}\, \nu_{\mathcal{A}_0\Lambda'}\, u_0^\alpha \\
&+ \sum_{D} \frac{\mu_D}{c^2}\, \nu_{D\Lambda'}\, u_D^\alpha \Bigg] u_{0\alpha} + \theta_\Lambda\, u_{0\perp\gamma}^\gamma
\end{aligned}
\tag{5.17}
$$

$$X_T^\alpha = T_\perp^\alpha - \frac{\dot{u}_0^\alpha}{c^2}\, T \tag{5.18a}$$

$$X_{\mathcal{A}_0}^\alpha = \mu_{\mathcal{A}_0\perp}^\alpha - \frac{\dot{u}_0^\alpha}{c^2}\, \mu_{\mathcal{A}_0} - e_{\mathcal{A}_0}\, B^{\alpha\gamma}\, u_{0\gamma} \tag{5.18b}$$

$$
\begin{aligned}
\eta = \varkappa_1 \qquad \xi &= \varkappa_2 + \frac{\varkappa_1}{3} + \sum_{\Lambda} \varkappa_{9\Lambda}\, \theta_\Lambda \\
2\, \chi_1 &= -\left(\sum_{\Lambda'} \varkappa_{9\Lambda'}\, \zeta_{\Lambda'\Lambda} + \theta_\Lambda\right)
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

il vient finalement

$$i = \frac{1}{T}\left\{\eta\, \mathring{u}_{0\perp\alpha\beta}\, \mathring{u}^{\alpha\beta}_{0\perp} + \xi\,(u^{\gamma}_{0\perp\gamma})^2 + \sum_{\Lambda} 2\,\chi_{\Lambda}\, u^{\gamma}_{\perp\gamma}\,\phi_{\Lambda} + \sum_{\Lambda\Lambda'} \zeta_{\Lambda\Lambda'}\,\phi_{\Lambda}\,\phi_{\Lambda'} - \left[\frac{\tilde{L}_{QQ}}{T}\, X^{\alpha}_{T}\, X_{T\alpha}\right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{\mathcal{A}_0}\left(\frac{\tilde{L}_{Q\mathcal{A}_0}}{T} + \frac{\tilde{L}_{\mathcal{A}_0 Q}}{\mu_{\mathcal{A}_0}}\right) X^{\alpha}_{\mathcal{A}_0}\, X_{T\alpha} + \sum_{\mathcal{A}_0\mathcal{B}_0} \frac{\tilde{L}_{\mathcal{B}_0\mathcal{A}_0}}{\mu_{\mathcal{B}_0}}\, X^{\alpha}_{\mathcal{A}_0}\, X_{\mathcal{B}_0\alpha}\right]\right\} \tag{5.20}$$

Le fait que cette forme est définie positive entraîne les conditions usuelles sur les coefficients de cette forme. Il faut toutefois noter que le choix de la métrique est tel que pour tout vecteur $a^{\alpha}_{\perp}$ normal à u^{β}_{0}, on a l'inégalité

$$a^{\alpha}_{\perp}\, a_{\perp\alpha} \leqslant 0\,; \tag{5.21}$$

il suffit de choisir un référentiel LGR pour s'en convaincre.

En conséquence, la matrice L' est définie positive

$$L' \equiv \begin{Bmatrix} \dfrac{\tilde{L}_{QQ}}{T} & \dfrac{\tilde{L}_{Q1_0}}{T} & \cdots & \dfrac{\tilde{L}_{Q\mathcal{C}_0}}{T} \\ \dfrac{\tilde{L}_{1_0 Q}}{\mu_{1_0}} & & & \\ \dfrac{\tilde{L}_{\mathcal{C}_0 Q}}{\mu_{\mathcal{C}_0}} & & & \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} L_{QQ} & L_{Q\mathcal{A}_0} & \cdots & L_{Q\mathcal{C}_0} \\ \cdots & & & \\ L_{\mathcal{C}_0 Q} & & & \end{Bmatrix} > 0 \tag{5.22}$$

A l'équilibre, l'irréversibilité est nulle et l'on a les équations

$$\mathring{u}^{\alpha\beta}_{0\perp} = 0 \qquad u^{\gamma}_{0\perp\gamma} = 0 \tag{5.23}$$

$$\Phi_{\Lambda} \equiv \left(\sum_{\mathcal{A}_0 = 1_0}^{\mathcal{C}_0} \mu_{\mathcal{A}_0}\, \nu_{\mathcal{A}_0\Lambda}\, u^{\alpha}_{0} + \sum_{D=1}^{N} \mu_D\, \nu_{D\Lambda}\, u^{\alpha}_{0}\right) u_{0\alpha} = 0\,^{10)} \tag{5.24}$$

$$X^{\alpha}_{T} \equiv T^{\alpha}_{\perp} - \frac{\dot{u}^{\alpha}_{0}}{c^2}\, T = 0 \tag{5.25a}$$

$$X^{\alpha}_{\mathcal{B}_0} \equiv \mu^{\alpha}_{\mathcal{B}_0\perp} - \frac{\dot{u}^{\alpha}_{0}}{c^2}\, \mu_{\mathcal{B}_0} - e_{\mathcal{B}_0}\, B^{\alpha\gamma}\, u_{0\gamma} = 0\,. \tag{5.25b}$$

L'équation (5.24) est la généralisation de l'équation d'équilibre chimique à un système à $N + 1$ fluides; en hydrodynamique conventionnelle cette équation s'écrit

$$\sum_{\mathcal{A}} \mu_{\mathcal{A}}\, \nu_{\mathcal{A}\Lambda} = 0\,. \tag{5.26}$$

D'autre part, et c'est un point qui n'est pas usuel en hydrodynamique, il est un grand nombre de circonstances où la «force» $X^{\alpha}_{\mathcal{A}_0}$ est nulle, même en dehors de l'équilibre. Evaluons en effet l'expression

$$X^{\gamma}_{D} \equiv g^{\gamma\alpha}_{D\perp}\, u^{\beta}_{D}\left[D_{\alpha}\left(\frac{\mu_D}{c^2}\, u_{D\beta} - e_D\, A_{\beta}\right) - D_{\beta}\left(\frac{\mu_D}{c^2}\, u_{D\alpha} - e_D\, A_{\alpha}\right)\right] = 0 \tag{5.27}$$

---

10) Φ_1 est *l'affinité chimique* de la réaction Λ.

où par définition

$$g_{D\perp}^{\gamma\alpha} \equiv g^{\gamma\alpha} - \frac{u_D^\gamma\, u_D^\alpha}{c^2}$$

L'expression X_D^γ est évidemment nulle à cause des équations de London (4.3).

Si l'on définit encore

$$\dot{f}^{\,D} \equiv u_D^\alpha\, D_\alpha f$$

il vient

$$X_D^\gamma = g_{D\perp}^{\gamma\alpha}\left[\partial_\alpha \mu_D - \frac{\dot{\mu}_D^D}{c^2}\, u_{D\alpha} - \frac{\mu_D}{c^2}\, \dot{u}_{D\alpha}^D - e_D\, B_{\alpha\beta}\, u_D^\beta\right]$$

$$= \mu_{D\perp}^\gamma - \mu_D\, \frac{\dot{u}_D^{D\gamma}}{c^2} - e_D\, B^{\gamma\beta}\, u_{D\beta} = 0\,. \tag{5.28}$$

Or $X^\gamma_{\mathcal{A}_0}$ et X_D^γ sont les mêmes fonctions, l'une de $\mu_{\mathcal{A}_0}$ et u_0^α, l'autre de μ_D et u_D^α. Bien plus, si l'équation d'équilibre chimique (5.24) est vérifiée, l'égalité des quadrivitesses u_0^α et u_D^α entraîne celle de $X^\gamma_{\mathcal{A}_0}$ et X_D^γ. Cette égalité a certainement lieu dans un supraconducteur au-delà de la limite de pénétration du champ électromagnétique. On arrive donc à la conclusion que *la force $X^\alpha_{\mathcal{A}_0}$ est nulle dans tout le domaine où le champ électromagnétique ne pénètre pas, quel que soit par ailleurs l'état de mouvement du système.* Ce résultat est analogue à celui de LUTTINGER [5]; au § 8 nous étudions dans quelle mesure il peut être étendu à la portion superficielle du système où champs et courants électromagnétiques ne sont pas nuls.

Transposition des formules obtennes dans le formalisme usuel.

Pour simplifier, nous choisissons un système local géodésique au repos relativement au fluide normal, c'est-à-dire que

$$g_{44} = g^{44} = 1 \qquad g_{ij} = g^{ij} = -\,\delta_{ij} \qquad u_0^\alpha = (0, 0, 0, c)\,. \tag{5.29}$$

Dans ce référentiel[11])

$$u_D^\alpha = \left(\frac{\boldsymbol{V}_D}{(1-(v_D/c)^2)^{1/2}},\ \frac{c}{(1-(v_D/c)^2)^{1/2}}\right);\ u_{D\alpha} = \left(\frac{-\boldsymbol{V}_D}{(1-(v_D/c)^2)^{1/2}},\ \frac{c}{(1-(v_D/c)^2)^{1/2}}\right) \tag{5.30a}$$

$$\theta^{44}_{rév} = \sum_{D=1}^{N} \frac{\mu_D\, n_D}{(1-(v_D/c)^2)^{1/2}} + \sum_{\mathcal{A}_0=1_0}^{C_0} \mu_{\mathcal{A}_0}\, n_{\mathcal{A}_0} + Ts - p + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\, E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right) \tag{5.30b}$$

Les équations de London s'écrivent

$$\operatorname{rot} \frac{\mu_D}{c^2}\, \frac{\boldsymbol{V}_D}{(1-(v_D/c)^2)^{1/2}} + e_D\, \boldsymbol{B} = 0$$

$$\partial_t\, \frac{\mu_D}{c^2}\, \frac{\boldsymbol{V}_D}{(1-(v_D/c)^2)^{1/2}} + \operatorname{grad} \frac{\mu_D}{c^2}\, \frac{c^2}{(1-(v_D/c)^2)^{1/2}} - e_D\, \boldsymbol{E} = 0 \tag{4.3$'$}$$

tandis que la densité de force et de puissance chimiques prennent la forme

$$\varrho_D^\beta = \frac{\mu_D}{c^2} \sum_{\Lambda} \nu_{D\Lambda}\, \omega_\Lambda \left(\frac{\boldsymbol{V}_D}{(1-(v_D/c)^2)^{1/2}},\ \frac{c}{(1-(v_D/c)^2)^{1/2}}\right) \tag{4.8$'$}$$

---

[11]) Voir formules (7.6).

Les vecteurs X_T^α et $X^\alpha_{\mathcal{A}_0}$ s'expriment à l'aide des symboles de Riemann-Christoffel Γ^i_{44}

$$X_T^4 = 0 \quad X_T^i = -\operatorname{grad}^i T - (\partial_t v_o^i + \Gamma^i_{44} c^2) \frac{T}{c^2} \approx \operatorname{grad}^i T$$

$$X^4_{\mathcal{A}_0} = 0 \quad X^i{}_{\mathcal{A}_0} = -\operatorname{grad}^i \mu_{\mathcal{A}_0} - (\partial_t v_0^i + \Gamma^i_{44} c^2) \frac{{}^{\mu}\mathcal{A}_0}{c^2}$$

$$\approx -[m_{\mathcal{A}_0} \partial_t v_0^i - (e_{\mathcal{A}_0} E^i - \operatorname{grad}^i \mu_{\mathcal{A}_0})] \,. \tag{5.18)'$$

Les expressions approchées ne tiennent pas compte des effets gravifiques ou inertiaux. Enfin l'équation (5.24) qui régit l'équilibre chimique s'écrit

$$\sum_{\mathcal{A}_0} \mu_{\mathcal{A}_0} \nu_{\mathcal{A}_0 A} + \sum_D \mu_D \nu_{DA} \frac{1}{(1-(v_D/c)^2)^{1/2}} = 0 \,. \tag{5.24)'$$

6. Le supraconducteur

Nous envisageons l'application des résultats précédents à un supraconducteur de type I, chimiquement pur.

On a 3 substances en présence: les *ions* j et les *porteurs de charge normaux* n qui ensemble constituent le fluide normal et les superélectrons s qui constituent le superfluide. n et s sont constitués de la même espèce chimique, *l'espèce électronique* e. La formation du superfluide est régie par la loi des proportions constantes

$$c_{es} \varrho_s + c_{en} \varrho_n = 0 \tag{6.1}$$

avec $C_{es} = 2$ et $C_{en} = 1$, ce qui correspond à l'hypothèse de l'existence des paires de Cooper.

La vitesse de réaction correspondante est ω_e et l'on a

$$\varrho_s = \nu_s \omega_e \quad \varrho_n = \nu_n \omega_e \tag{6.2}$$

avec

$$c_{es} \nu_s + c_{en} \nu_n = 2 \nu_s + \nu_n = 0 \,. \tag{6.3}$$

Si l'on prend $\nu_s = 1$ et $\nu_n = -2$, l'équation (6.1) correspond à l'équation chimique

$$e_s^* \leftrightarrow 2\, e_n^* \tag{6.4}$$

où e_s^* symbolise une paire de Cooper et e_n^* un électron normal.

(6.4) s'écrit aussi

$$\nu_s e_s + \nu_n e_n = 0 \tag{6.5}$$

7. Les équations de London

En présence d'une métrique quelconque, l'élément de longueur ds^2 peut se mettre sous la forme [11]

$$ds^2 = g_{44} (dx^4)^2 + 2\, g_{4i}\, dx^4\, dx^i + g_{ij}\, dx^i\, dx^j = g_{44} \left(dx^4 - \frac{\boldsymbol{g}}{c}\, d\boldsymbol{x}\right)^2 - dl^2 \tag{7.1}$$

où

$$\frac{g_i}{c} = -\frac{g_{i4}}{g_{44}}\,;\; dl^2 = \gamma_{ij}\, dx^i\, dx^j \tag{7.2}$$

$\boldsymbol{g}$ est ici un vecteur de l'espace de Riemann $\mathcal{R}$ à 3 dimensions dont

$$\gamma_{ij} = \frac{g_{i4}\, g_{j4}}{g_{44}} - g_{ij} \tag{7.3}$$

est le tenseur métrique[12]). On vérifie la relation

$$\gamma_{ij}\, g^{il} = -\, \delta_i^l\,. \tag{7.4}$$

On nomme *potentiel dynamique* le vecteur $\boldsymbol{h} \in \mathcal{R}$ défini par

$$\boldsymbol{h} = \sqrt{g_{44}}\; \boldsymbol{g}. \tag{7.5}$$

Il est possible d'exprimer la quadrivitesse $u^\alpha(x)$ à l'aide d'un vecteur $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ que l'on interprète comme la vitesse d'un élément de fluide mesurée en temps propre:

$$u^i = \frac{v^i}{(1-(v/c)^2)^{1/2}} \qquad u^4 = \frac{c}{(g_{44}\,(1-(v/c)^2))^{1/2}} \tag{7.6a}$$

$$u_i = \frac{-\,v_i - h_i}{(1-(v/c)^2)^{1/2}} \qquad u_4 = \left(\frac{g_{44}}{1-(v/c)^2}\right)^{1/2} c \tag{7.6b}$$

On récrit alors les *équations de London* (4.3) dans ce formalisme:

$$\operatorname{rot} \frac{\mu_s}{e_s\, c^2}\, \frac{\boldsymbol{V}_s + \boldsymbol{h}}{(1-(v_s/c)^2)^{1/2}} + \boldsymbol{B} = 0 \tag{7.7a}$$

$$\partial_t \frac{\mu_s}{e_s\, c^2}\, \frac{\boldsymbol{V}_s + \boldsymbol{h}}{(1-(v_s/c)^2)^{1/2}} + \operatorname{grad} \frac{\mu_s + \Delta\varphi}{(1-(v_s/c)^2)^{1/2}} - \boldsymbol{E} = 0 \tag{7.7b}$$

où

$$\Delta\varphi \approx \frac{c^2}{2}\,(g_{44} - 1)$$

est le *potentiel gravifique.*

Les équations (7.7) correspondent au cas étudié par De Witt et Papini [9].

Supposons que le supraconducteur, supposé homogène, soit animé d'une rotation uniforme $\boldsymbol{\Omega}$ autour d'une axe fixe. Le processus étant par ailleurs stationnaire, on choisit un système de référence au repos par rapport au supraconducteur; en un point suffisamment éloigné de la surface, $\boldsymbol{v}_s$ est nul. Dans ce cas

$$\boldsymbol{h} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}}{(1-(\Omega^2\, r^2/c^2))^{1/2}} \tag{7.8}$$

$\boldsymbol{r}$ étant un rayon vecteur issu normalement de l'axe. L'équation (7.7a) s'écrit alors

$$\operatorname{rot} \frac{m_s'}{e_s}\, \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r} + \boldsymbol{B} = 0 \tag{7.9}$$

avec

$$m_s = \frac{\mu_s}{c^2\,(1-(\Omega^2\, r^2/c^2))^{1/2}} \equiv (m_s + \Delta m_s) \tag{7.10}$$

Pour des vitesses de rotations accessibles à l'expérience le facteur $(1 - \Omega^2\, r^2/c^2)^{-1/2}$ peut être sans inconvénient remplacé par 1. Néanmoins m_s' s'écarte appréciablement

[12]) Lorsqu'il s'agit d'un tenseur de $\mathcal{R}$, la variance des indices est définie relativement à la métrique γ_{ij}.

de m_s, défini comme la somme des énergies de repos des composants électroniques de la paire:

$$\nu_s\, m_s + \nu_n\, m_n = 0\,. \tag{7.11}$$

m_s pouvant donc être considéré comme une constante, l'équation (7.9) s'écrit

$$\boldsymbol{B} + \frac{2\, m_s'}{e_s}\, \boldsymbol{\Omega} = 0\,. \tag{7.12}$$

Le «rapport gyromagnétique» $2\, m_s'/e_s$ s'écarte ainsi de la valeur élémentaire $2\, m_{\text{électron}}/e_{\text{électron}}$, conformément à une remarque de JOSEPHSON citée par ANDERSON [8].

8. Limite non relativiste et conductivité thermique

A la limite non relativiste et dans un système de référence animé d'une vitesse de rotation $\boldsymbol{\Omega}$, *les équations de London* (4.3) s'écrivent

$$\operatorname{rot} \frac{m_s}{e_s}\, (\boldsymbol{V}_s + \boldsymbol{k}) + \boldsymbol{B} = 0 \tag{8.1a}$$

$$\partial_t \frac{m_s}{e_s}\, (\boldsymbol{V}_s + \boldsymbol{k}) + \operatorname{grad}\left(\frac{m_s}{2\, e_s}\, V_s^2 + \frac{m_s}{e_s}\, \Delta\varphi + \frac{\Delta\mu_s}{e_s}\right) = \boldsymbol{E} \tag{8.1b}$$

où

$$\Delta\mu_s \equiv \mu_s - m_s\, c^2$$

est le potentiel chimique non relativiste et

$$\Delta\varphi = c^2\, ((g_{44})^{1/2} - 1)$$

représente le potentiel gravifique ou d'inertie. Quant à

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r}$$

c'est la limite non relativiste du potentiel dynamique. Dans des conditions stationnaires, *les équations d'équilibre* (5.23) à (5.25) s'écrivent

$$V_{0ik} \equiv \frac{1}{2}\, (\partial_i\, V_{0k} + \partial_k\, V_{0i}) \tag{8.2a}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{V}_0 = 0 \tag{8.2b}$$

$$\Delta\mu_n\, \nu_n + \Delta\mu_s\, \nu_s + m_s\, \nu_s\, \frac{1}{2}\, (\boldsymbol{V}_s - \boldsymbol{V}_0)^2 = 0 \tag{8.3}$$

$$\boldsymbol{X}_T \equiv \operatorname{grad} T = 0 \tag{8.4}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_n \equiv{}& \operatorname{grad} \Delta\mu_n - m_n\, (\boldsymbol{V}_0\, \boldsymbol{\nabla})\, \boldsymbol{V}_0 - e_n\, \boldsymbol{E} \\ &+ \operatorname{grad} m_n\, \Delta\varphi - \boldsymbol{V}_0 \wedge (\operatorname{rot} m_n\, \boldsymbol{k} + e_n\, \boldsymbol{B}) = 0 \end{aligned} \tag{8.5}$$

équations auxquelles il faut ajouter la forme stationnaire des équations de London (8.1).

Alors que les équations (8.2) admettent la solution $\boldsymbol{v}_0 = \vec{\omega} \wedge \boldsymbol{r}$, ce n'est pas en général le cas des équations (8.3) à (8.5); pour le montrer, nous transformons $\boldsymbol{x}_n$ en faisant usage successivement de (6.5), (7.11), (8.1) et (8.3):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_n = \frac{1}{\nu_n} [&\operatorname{grad} \nu_n \Delta\mu_n + \nu_n m_n (\boldsymbol{V}_0 \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{V}_0 + m_n \nu_n \operatorname{grad} \Delta\varphi - \nu_n e_n \boldsymbol{E} \\ &- \boldsymbol{V}_0 \wedge (\operatorname{rot} \nu_n m_n \boldsymbol{k} + \nu_n e_n \boldsymbol{B})] = \frac{1}{\nu_n} [\operatorname{grad} \nu_n \Delta\mu_n \\ &+ \nu_n m_n (\boldsymbol{V}_0 \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{V}_0 + \operatorname{grad} \nu_s \Delta\mu_s + \operatorname{grad} \nu_s m_s \frac{V_s^2}{2} \\ &+ \boldsymbol{V}_0 \wedge \operatorname{rot} \nu_n m_n \boldsymbol{V}_s = m_n [(\boldsymbol{V}_0 \boldsymbol{\nabla}) \boldsymbol{V}_0 + \operatorname{grad} \left(\frac{1}{2} (\boldsymbol{V}_s - \boldsymbol{V}_0)^2 - \frac{V_s^2}{2}\right) \\ &+ \boldsymbol{V}_0 \wedge \operatorname{rot} \boldsymbol{V}_s = m_n [\operatorname{grad} \boldsymbol{V}_0 (\boldsymbol{V}_0 - \boldsymbol{V}_s) - \boldsymbol{V}_0 \wedge \operatorname{rot} (\boldsymbol{V}_0 - \boldsymbol{V}_s)] . \end{aligned} \tag{8.6}$$

Cette dernière expression est en général différente de zéro, sauf si $\boldsymbol{v}_0 = 0$. La chose était prévisible car nous nous sommes placés dans un système de référence relativement auquel les champs électromagnétiques sont fixes: l'équilibre ne peut y être atteint que si la partie normale du système est également au repos. Il faut noter d'ailleurs que si les charges élémentaires e_n et e_s étaient nulles, une famille plus étendue de solutions annulerait $\boldsymbol{X}_n$, à savoir

$$\boldsymbol{V}_s = - \boldsymbol{\Omega} \wedge \boldsymbol{r} \qquad \boldsymbol{V}_0 = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r} \tag{8.7}$$

$\boldsymbol{\Omega}$ est ici la vitesse de rotation du système de référence et $\boldsymbol{\omega}$ un vecteur axial uniforme quelconque.

En définitive, l'équilibre du supraconducteur est régi par les équations

$$\operatorname{rot} \frac{m_s}{e_s} (\boldsymbol{V}_s + \boldsymbol{k}) + \boldsymbol{B} = 0 \tag{8.8a}$$

$$\operatorname{grad} \left(\frac{m_s}{2 e_s} V_s^2 + \frac{m_s}{e_s} \Delta\varphi + \frac{\Delta\mu_s}{e_s}\right) - \boldsymbol{E} = 0 \tag{8.8b}$$

$$\boldsymbol{X}_n = \operatorname{grad} (\Delta\mu_n \nu_n + m_n \Delta\varphi) - e_n \boldsymbol{E} = 0 \tag{8.8c}$$

$$\boldsymbol{X}_T = \operatorname{grad} T = 0 \tag{8.8d}$$

$$\Delta\mu_n \nu_n + \Delta\mu_s \nu_s + m_s \nu_s \frac{1}{2} V_s^2 = 0 \tag{8.8e}$$

$$\boldsymbol{V}_0 = 0 \tag{8.8f}$$

(8.8c) étant la conséquence de (8.8b) et (8.8e).

Supposons que l'on mesure la conductivité thermique d'un supraconducteur dont les dimensions sont grandes relativement à la profondeur de pénétration. Dans tout le domaine intérieur D_I, on peut raisonnablement s'attendre à ce que

$$\boldsymbol{V}_s = 0 \tag{8.9}$$

or, quand cette condition est remplie, l'équilibre chimique est également réalisé. Dès lors X_n est encore nul, et dans tout le domaine D_I (nous négligeons la contribution ionique):

$$\boldsymbol{J}_Q \equiv - L_{QQ} \operatorname{grad} T - L_{Qn} \boldsymbol{X}_n = - L_{QQ} \operatorname{grad} T \tag{8.10a}$$

$$\boldsymbol{j}_n \equiv e_n \mu_n^{-1} \boldsymbol{J}_n = e_n \mu_n^{-1} [- L_{nn} \boldsymbol{X}_n - L_{nQ} \operatorname{grad} T] = - e_n \mu_n^{-1} L_{nQ} \operatorname{grad} T . \tag{8.10b}$$

j_n est le courant électrique total dû aux charges normales. La conductivité thermique λ est donc simplement

$$\lambda = L_{QQ} \tag{8.11}$$

Il convient de noter que cette formule est valable pour un supraconducteur animé d'un mouvement de rotation quelconque.

Ainsi les calculs montrent que les formules (8.10) sont valables dans tous les domaines supraconducteurs où aucun échange chimique n'a lieu, et cela que l'on se trouve ou non au voisinage immédiat de la surface[13]).

En conclusion, l'auteur tient à remercier le Prof. S. GROSSMANN et ses collaborateurs pour leur hospitalité ainsi que le Fonds National Suisse de la Recherche Scientifique pour son aide financière.

Bibliographie

[1] L. TISZA, Nature *141*, 913 (1938).
[2] F. LONDON, *Superfluids*, Vol. 1, Dover publications, 2nd ed. (New York 1960).
[3] F. LONDON, *Superfluids*, Vol. 2 (John Wiley & Sons, New York 1954).
[4] Voir par exemple L. D. LANDAU, E. M. LIFSHITZ, *Physics of Fluids* (Addison-Welsey, New York).
[5] J. M. LUTTINGER, Phys. Rev. *136 A*, 1481 (1964).
[6] Voir par exemple D. J. THOULESS, Ann. Phys. *10*, 553 (1960); P. W. ANDERSON, P. MOREL, Phys. Rev. *123*, 1911 (1961); R. BALIAN, N. H. WERTHAMER, Phys. Rev. *131*, 1553 (1963). Pour ce qui est de l'identité des propriétés des supraconducteurs dont les paires de Cooper sont à spin total 0 ou 1, voir particulièrement BALIAN et WERTHAMER, op. cit.
[7] E. C. G. STUECKELBERG DE BREIDENBACH, G. WANDERS, Helv. phys. Acta *26*, 307 (1953); E. C. G. STUECKELBERG DE BREIDENBACH, Helv. phys. Acta *26*, 417 (1953); *35*, 568 (1962).
[8] Voir *Progress in Low Temperature Physics*, Vol. 5, p. 32 (C. J. Gorter, éditeur, North-Holland Publishing Comp., Amsterdam 1967).
[9] B. S. DE WITT, Phys. Rev. Lett. *16*, 1092 (1966); G. PAPINI, Phys. Lett. *23*, 418 (1966); *24 A*, 32 (1967); Nuovo Cim. *45 B*, 66 (1966); *52 B*, 136 (1967).
[10] J. LENSE, H. THIRRING, Physik. Z. *29*, 156 (1918).
[11] L. D. LANDAU, E. M. LIFSHITZ, *Théorie du Champ* (Editions de la Paix, Moscou).
[12] F. ROTHEN, à paraître.

[13]) En fait, il est possible de montrer que ces échanges chimiques ne jouent pas de rôle dans les phénomènes stationnaires [12].