Zeitschrift: Helvetica Physica Acta

Band: 41 (1968)

Heft: 6-7

Artikel: Winkel- und Wirkungsvariable für allgemeine mechanische Systeme

Autor: Jost, Res

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-113956

Winkel- und Wirkungsvariable für allgemeine mechanische Systeme

von **Res Jost**
Seminar für theoretische Physik ETH

(18. I. 68)

Abstract. The results of ARNOLD [1] are generalized to general (non-exact) canonical manifolds and general (non-exact) hamiltonian vector-fields.

Nachdem in den letzten Jahren die klassische Mechanik sich wieder erstaunlich verjüngt hat, mag es gestattet sein, dem alten Problem der Winkel- und Wirkungsvariablen eine kleine Note zu widmen. Es handelt sich dabei um die Adaptation einer bekannten Fragestellung [2, 3] an einen allgemeinen Formalismus, der vom Phasenraum zwar eine kanonische aber nicht notwendig eine exakt kanonische Struktur voraussetzt. Ausserdem ergeben sich Aussagen über Hamiltonsche, aber nicht notwendig exakt Hamiltonsche Vektorfelder. Dabei heisst eine kanonische Struktur exakt, wenn die sie definierende quadratische Differentialform Ω nicht nur geschlossen, sondern auch exakt ist; ebenso heisst ein hamiltonsches Vektorfeld L exakt, falls $\omega(.) = \Omega(L, .)$ nicht nur geschlossen, sondern exakt ist.

Nun gelten die klassischen Sätze auch in diesem Fall, und das wäre zu erwarten gewesen. Ein Beweis ist aber vielleicht doch nicht ganz überflüssig, da ein Satz von MOSER ([5] Theorem 5) aus unserem Problemkreis, wie das einfachste Beispiel auf dem 2dimensionalen Torus zeigt, wesentlich von der *exakt kanonischen* Struktur des Phasenraumes abhängt.

Aus der neuesten Literatur, die Winkel und Wirkungsvariablen betreffend, erwähnen wir den Appendix 26 des Buches von ARNOLD und AVEZ [1], wo jedoch eine exakt kanonische Struktur vorausgesetzt wird. Trotzdem ist unser Beitrag als eine Art Kommentar zu diesem Appendix aufzufassen.

Ich verwende aus naheliegenden Gründen den Formalismus aus [4].

Sei nun also $\mathcal{M}$ mit der Poissonklammer [,] eine 2 n-dimensionale, differenzierbare (C^∞), kanonische Mannigfaltigkeit. $\mathcal{E}$ sei der Raum der C^∞-Funktionen über $\mathcal{M}$. $\{p_1, \ldots, p_n; q^1, \ldots, q^n\}$, $p_k \in \mathcal{E}$, $q^k \in \mathcal{E}$ heissen in $x_0 \in \mathcal{M}$ kanonische Koordinaten, falls durch $x \to (p_1(x), \ldots, p_n(x); q^1(x), \ldots, q^n(x))$ eine Umgehung von x_0 diffeomorph auf eine offene Menge des R^{2n} abgebildet wird und ausserdem in dieser Umgebung $[p_i, p_k] = [q^i, q^k] = 0$ und $[p_i, q^k] = \delta_i^k$ gelten.

Ein klassischer Satz von Liouville, dessen einfachen Beweis wir reproduzieren, besagt:

1. Satz (Liouville) [6]:

Falls $\alpha_k \in \mathcal{E}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ in einer Umgebung $\mathcal{U}$ von x_0 für alle k, l $[\alpha_k, \alpha_l] = 0$ erfüllen und falls $d\alpha_1(x_0), \ldots, d\alpha_n(x_0)$ in $T^*_{x_0}(\mathcal{M})$ linear unabhängig sind, dann existieren $\beta^k \in \mathcal{E}$, $k = 1, 2, \ldots, n$ so dass $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta^1, \ldots, \beta^n\}$ in x_0 kanonische Koordinaten sind.

Beweis: Seien $\{p_1, \ldots, p_n; q^1, \ldots, q^n\}$ kanonische Koordinaten in x_0 und $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ eine zu diesen Koordinaten gehörige, kubische Umgebung von x_0. $\mathcal{U}'$ kann offenbar so gewählt werden, dass $d\alpha_1(x), \ldots, d\alpha_n(x)$ für jedes $x \in \mathcal{U}'$ in $T^*_x(\mathcal{M})$ linear unabhängig sind. $h_1(p, q), \ldots, h_n(p, q)$ sind die Darstellungen von $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ in den kanonischen Koordinaten $\{p, q\}$. Da auch $\{-q^1, p_2, \ldots, p_n; p_1, q^2, \ldots, q^n\}$ in $\mathcal{U}'$ kanonische Koordinaten sind, können wir immer erreichen, dass die Matrix $H_p = (\partial h_k/\partial p_s)$ nicht singulär ist. Damit werden die Gleichungen $\alpha_i = h_i(p_1, \ldots, p_n, q^1, \ldots, q^n)$ nach p auflösbar und wir schreiben $p_i = f_i(\alpha_1, \ldots, \alpha_n; q^1, \ldots, q^n)$.

Es sei $F = (\partial f_l/\partial q^s)$ und $H_q = (\partial h_k/\partial q^s)$, dann gelten die Gleichungen

$$H_p\, F + H_q = 0 \tag{1}$$

und

$$H_p\, H_q^T - H_q\, H_p^T = 0\,. \tag{2}$$

(2) entspringt den Gleichungen $[\alpha_i, \alpha_k] = 0$. Nun folgen aus (1) und (2)

$$H_p\, F\, H_p^T + H_q\, H_p^T = H_p\, F\, H_p^T + H_p\, H_q^T = 0 \tag{3}$$

oder, da H_p nicht singulär ist, durch Transponieren

$$H_p\, F^T + H_q = 0 \tag{4}$$

also $F = F^T$. Die Form $\sum_i f_i\, dq^i$ ist also geschlossen und daher lokal exakt:

$$f_i = \partial S/\partial q^i. \tag{5}$$

Weiter ist $S_{q\alpha} = (\partial^2 S/\partial q^i\, \partial\alpha_s) = (\partial f_i/\partial\alpha_s)$ nicht singulär. S erzeugt daher lokal eine kanonische Transformation

$$p_i = \partial S/\partial q^i; \quad \beta^i = \partial S/\partial\alpha_i \tag{6}$$

auf die kanonischen Koordinaten $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta^1, \ldots, \beta^n\}$. ∎

Zusatz: Sind $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \tilde{\beta}^1, \ldots, \tilde{\beta}^n\}$ in x_0 kanonische Koordinaten, dann gilt

$$\tilde{\beta}^i = \beta^i + \partial\chi/\partial\alpha_i \tag{7}$$

wobei $\chi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eine C^∞ Funktion der Argumente ist.
Ein Satz von Arnold besagt

2. Satz [1]:

Falls $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $\alpha_k \in \mathcal{E}$ die $n\,(n-1)/2$ Gleichungen $[\alpha_k, \alpha_l] = 0$ erfüllen und falls

$$\boldsymbol{T}(c^0) = \{x \mid \alpha_1(x) = c_1^0, \ldots, \alpha_n(x) = c_n^0\}$$

zusammenhängend und kompakt ist und falls schliesslich für jedes $x \in \boldsymbol{T}(c^0)$ die Differentiale $\{d\alpha_1, \ldots, d\alpha_n\}$ in $T_x^*\,(\mathcal{M})$ linear unabhängig sind, dann ist $\boldsymbol{T}(c^0)$ zu einem Torus diffeomorph.

Auch hier wiederholen wir den einfachen *Beweis:* Die Vektorfelder L_k: $L_k(f) = [\alpha_k, f]$ sind zu $\boldsymbol{T}(c^0)$ tangential und kommutieren. Da $\boldsymbol{T}(c^0)$ kompakt ist, bestimmen sie auf $\boldsymbol{T}(c^0)$ eine n-parametrige Abelsche Gruppe Ψ_τ: $\boldsymbol{T}(c^0) \to \boldsymbol{T}(c^0)$, $\tau \in R^n$; $\Psi_\tau \circ \Psi_{\tau'} = \Psi_{\tau+\tau'}$, die $\boldsymbol{T}(c^0)$ transitiv transformiert. Sei $x_0 \in \boldsymbol{T}(c^0)$, dann ist durch $\tau \to \Psi_\tau x_0$ der R^n auf $\boldsymbol{T}(c^0)$ differenzierbar abgebildet. Der Stabilisator $G = \{\tau \mid \Psi_\tau x_0 = x_0\}$ ist eine diskontinuierliche Untergruppe des R^n und, da $\boldsymbol{T}(c^0)$ kompakt ist, ein nicht ausgeartetes Gitter G. R^n/G ist ein Torus und diffeomorph zu $\boldsymbol{T}(c^0)$. $\blacksquare$

Zur weiteren Diskussion gehen wir von den Voraussetzungen des 2. Satzes aus. Es gibt dann im R^n ein offenes Intervall I um c^0, in dessen Punkten c diese Voraussetzungen wieder erfüllt sind. Zu jedem $c \in I$ gehört also ein Torus $\boldsymbol{T}(c)$ und die Gruppe Ψ_τ lässt sich auf dieses «Bündel von Tori» ausdehnen. Jetzt sei $x_0 \in \boldsymbol{T}(c^0)$, dann gelten in einer Umgebung von $\mathfrak{U}$ von x_0 die Voraussetzungen des ersten Satzes. $\mathfrak{U}$ sei so gewählt, dass die durch $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ definierte Abbildung A: $\mathfrak{U} \to R^n$ die Bedingung $A(\mathfrak{U}) \subset I$ erfüllt.

Nun seien $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \beta^1, \ldots, \beta^n\}$ die kanonischen Koordinaten aus dem 1. Satz zu einer Umgebung $\mathfrak{U}'_{x_0} \subset \mathfrak{U}$. Die Beschränkung von L_k auf $\mathfrak{U}'_{x_0}$ lautet dann $\partial/\partial\beta^k$, und das bedeutet, dass Ψ_τ: $(\alpha, \beta) \to (\alpha, \beta + \tau)$ bewirkt. Jetzt wählen wir in $\mathfrak{U}'_{x_0}$ einen Querschnitt $\sigma = \{x \mid \beta(x) = 0\}$ und zwar so, dass $A(\sigma) = I' \subset I$ wieder ein offenes Intervall um c^0 ist. Durch $\Psi_\tau\, x \to (\alpha(x), \tau)$, $x \in \sigma$ wird das «Bündel von Tori» $\bigcup_{c \in I'} T(c) = \mathfrak{M}_1$ auf $I' \times R^n$ abgebildet und diese Abbildung ist lokal ein Diffeomorphismus. Daher ist $\mathfrak{M}_1$ eine Untermannigfaltigkeit, und $I' \times R^n$ ist ihre universelle Überlagerungsmannigfaltigkeit. Die Fundamentalgruppe von $\mathfrak{M}_1$ ist isomorph zum Gitter G, das heisst zum Stabilisator von $x_0 \in \boldsymbol{T}(c^0)$. Die Erzeugenden von G sind kanonische Transformationen der Gestalt (7), also von der Form

$$\gamma_k\colon \quad \alpha \to \alpha; \quad \beta \to \beta' = \beta + \partial\chi_k/\partial\alpha \qquad k = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{8}$$

Da die Basisvektoren des Gitters G linear unabhängig sind, ist die Matrix $(\partial\chi_k/\partial\alpha_s)$ nicht singulär und wir können, allenfalls unter weiterer Beschränkung von I', als neue kanonische Variablen

$$p_i = \chi_i; \quad \beta^k = \sum_i \partial\chi_i/\partial\alpha^k\, q^i$$

einführen. Dabei sind die q^i jetzt modulo 1 zu nehmen.

Das liefert uns den

3. Satz:

Unter den Voraussetzungen des 2. Satzes gibt es eine Umgebung $\mathfrak{M}'$ von $\boldsymbol{T}(c^0)$ zu kanonischen Koordinaten $\{p_1, \ldots, p_n; q^1, \ldots, q^n\}$, q^i mod 1, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sich als Funktionen von $p_1, \ldots, p_n$ allein darstellen. $\mathfrak{M}'$ ist exakt kanonisch, Ω beschränkt auf $\mathfrak{M}'$ ist das Differential von $\sum_k p_k\, dq^k$.

1. Zusatz: Sind $\{p', q'\}$ ein weiterer Satz von Koordinaten, welche die Aussagen des 3. Satzes erfüllen, dann gilt

$$q' = M\, q + \partial\chi/\partial p; \qquad p = p'\, M + a$$

mit konstanter, ganzzahliger, modularer Matrix M ($\det M = \pm 1$), konstantem a und einer Funktion χ, die nur von p abhängt.

2. Zusatz: Eine einparametrige Gruppe von kanonischen Transformationen $\mathfrak{M}' \to \mathfrak{M}'$ die jedes α_k invariant lässt, ist von der Gestalt

$$\Phi_t: \quad p \to p' = p; \quad q \to q' = q + t\, \partial H / \partial p \qquad (\text{mod } 1)$$

wobei H nur eine Funktion von $p_1, \ldots, p_n$ ist. Die infinitesimale Erzeugende L von Φ_t ist durch $L(f) = [H, f]$ gegeben. L ist also ein *exakt kanonisches* Vektorfeld.

Literaturverzeichnis

[1] V. I. ARNOLD & A. AVEZ, *Problèmes ergodiques de la méchanique classique*, (Paris 1967) Appendice 26.

[2] A. EINSTEIN, Verh. dt. phys. Ges. *19*, 82 (1917).

[3] PH. FRANK und A. MISES, *Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik* (Braunschweig 1927) Bd. II, p. 51ff.

[4] R. JOST, Revs. mod. Phys. *36*, 572 (1964).

[5] J. MOSER, SIAM-Revue *8*, 145 (1966).

[6] E. T. WHITTAKER, *Analytical Dynamics* (Cambridge 1952) p. 322ff.

Electroreflectance in Ge — Si Alloys[1]

by **James S. Kline**[2], **Fred H. Pollak** and **Manuel Cardona**[3]

Physics Department, Brown University, Providence, Rhode Island, USA

(10. V. 68)

Abstract. The electroreflectance spectra of a series of germanium-silicon alloys, ranging in concentration from 6.5 atomic percent silicon to 92.4 percent silicon, have been measured in the energy region 0.8 eV–4.5 eV. A linear concentration dependence has been observed for all of the structures (E_0, $E_0 + \Delta_0$, E_1, $E_1 + \Delta_1$, E_0', $E_0' + \Delta_0'$ and E_2) that were investigated. A value of 4.00 ± 0.05 eV for the $\Gamma_{25}' - \Gamma_2'$ gap in pure silicon has been obtained from an extrapolation of the concentration dependence of the direct edge (E_0). It has also been observed that the E_1 and E_0' doublets of germanium merge into the 3.4 eV (E_0') structure of silicon. These results are compared to conventional reflectivity measurements.

I. Introduction

Considerable insight concerning the energy band structure of pure germanium and pure silicon has been gained by careful studies of the composition dependence of the properties of the germanium-silicon alloy system. BRAUNSTEIN, MOORE and HERMAN [1] were able to observe the transition between a [111] (germanium) and [100] (silicon)

[1]) Work supported by the National Science Foundation and the U.S. Army Research Office, Durham.

[2]) Presently in the Physics Department, Cornell University, Ithica, N.Y.

[3]) Alfred P. Sloan Research Fellow.