

Zur Genauigkeit von Newtons Messung Seiner Interferenzringe

Autor(en): **Fierz, Markus / Fierz, Martin**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **67 (1994)**

Heft 8

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-116674>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Zur Genauigkeit von Newtons Messung Seiner Interferenzringe

Von Markus Fierz* und Martin Fierz

(1.XII.1994, revised 21.XII.1994)

Abstract. We discuss Newton's *Observations* in *Opticks II.1* to show how the extraordinary precision of his measurement of the fifth dark ring may be checked by using a table of the spectral sensitivity of the human eye.

Einleitung

Legt man eine Linse auf eine plan-geschliffene Glasplatte und betrachtet die Gläser unter freiem Himmel, so erscheinen im von den Gläsern reflektierten Himmelslicht, konzentrisch um den Berührungspunkt von Linse und Glasplatte, helle und dunkle Interferenzringe.

Isaac Newton hat erkannt, dass diese Ringe am Luftspalt zwischen den beiden Gläsern entstehen. Dem Radius eines jeden Ringes entspricht eine bestimmte Spaltbreite. Die Ringe haben nur einige *mm* Durchmesser, und ihre Grösse hängt von der Oberflächenkrümmung der Linse ab.

Newton hat nun den fünften dunklen Ring mit dem Messzirkel gemessen und benützte hierbei zwei etwas verschiedene Linsen.¹ Das waren Präzisionsmessungen, aus denen er die zugehörige Spaltbreite ausgerechnet hat. Er erhielt zwei Werte, die nur $1\frac{1}{2}$ p.m. voneinan-

*Die Redaktion der *Helvetica Physica Acta* freut sich, diesen Kommentar von Markus Fierz und dessen Enkel Martin Fierz zu Newtons *Optik* abzdrukken. Markus Fierz war während zwei Jahrzehnten Redaktor unserer Zeitschrift. Aus Anlass seines 80. Geburtstags widmete er diesen Beitrag seinen Freunden.

¹*I. Newton 'Opticks', Book II., Part I., Observation 6., I. Newton 'Opera omnia', ed. Sam. Horsley, Vol. IV (1782) pg. 125/126.*

der abweichen.² Das ist erstaunlich.

Richard S. Westfall, der in seiner Newton-Biographie, *'Never at Rest'* (Cambridge 1980; pg. 217 ff) diese Untersuchung fachkundig beschreibt, sagt freilich *'It is impossible to compare Newtons results against modern measurements with finality'*. Obwohl in solchen Dingen 'endgültige Aussagen' kaum möglich sind, scheint uns doch dieser Satz etwas zu apodiktisch. Zwar wird kaum jemand Newtons Messungen wiederholen, da wir nicht mehr geübt sind, fast ohne Hilfsmittel zu beobachten. Zudem hängt das Ergebnis entscheidend von der Empfindlichkeit des Auges für Licht verschiedener Wellenlängen ab, und das ist keine physikalische, sondern eine physiologische Grösse. Aber diese ist heute gut bekannt, und darum kann man Newtons Messung durch eine Rechnung nachprüfen. Wir wollen aber zunächst die Experimente Newtons kurz darstellen:

Newtons Messungen und sein Ergebnis

Newton verwendete zwei etwas verschiedene Fernrohr-Objektive mit dem Brechungsindex $n = 17/11$. Aus ihrer Brennweite im *'hellen Gelb'* bestimmte er den Krümmungsradius R ihrer Oberfläche. Ist B die Brennweite, so gilt: $2(n - 1) \cdot B = R$. Er fand die beiden Brennweiten $B_1 = 83\frac{2}{3}$ inch und $B_2 = 84\frac{1}{10}$ inch,³ was $R_1 = 90\frac{54}{55}$ und $R_2 = 91\frac{8}{11}$ ergibt, was er auf

91 inch und 92 inch

aufrundet.

In Anbetracht der – vielleicht erst später – angestrebten Genauigkeit, ist der Rundungsfehler von R_2 etwas gross.

Newton hat die Ringdurchmesser mit dem Messzirkel 'abgestochen' – wie wir sagen würden – und er findet für die Ringdurchmesser r_1 und r_2 :

$$2r_1 = \frac{1}{5} \text{ inch 'exactly' und } 2r_2 = \frac{121}{600}.$$

Da er die Ringe nicht am Spalt, sondern an der Linsen-Oberfläche misst, wobei sein Auge 8 bis 9 inch über den Gläsern war, so sind die Messwerte mit dem Faktor⁴

$$1 + \frac{D}{nA}$$

zu vergrössern. Hierbei ist D die Dicke der Linse ($\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{8}$ inch), A der Augenabstand und n der Brechungsindex. Aus den so korrigierten Zahlen wird gemäss:

$$d = \frac{r^2}{2R}$$

²p.m. $\equiv$ Promille

³In den *'Opera'* Vol. IV, pg. 126 wird für B_2 $168\frac{1}{2}$ inch angegeben, was offenbar ein Druckfehler ist. Unten an der Seite ist eine Fussnote, auf die im Text nirgends verwiesen ist; aber die hier besprochenen Zahlen sind die Werte für B_2 , und Horsley stellt fest, dass $84\frac{1}{10}$ am besten ist.

⁴Diese Formel steht nicht bei Newton: das scheint ihm selbstverständlich.

d_1 und d_2 ausgerechnet. Er korrigiert nun diese Werte noch, weil sein Auge nicht senkrecht über dem Ring stand, sondern 4° vom Lot abwich. Daher ist d um 2,4 p.m. zu verkleinern. Dies wird ausführlich begründet. Die Korrektur zeigt, dass er auf Promille genau messen und rechnen wollte.

Aus den Formeln sieht man, dass ein prozentualer Fehler von B einfach, von r doppelt in d eingeht. Da n vor allem in der Form $n - 1$ vorkommt, so geht hier der Fehler von n dreifach ein, da $n \sim 1\frac{1}{2}$. Da für alle Messungen n stets dasselbe ist, so ist der Fehler von n ein 'systematischer Fehler'.

Nach diesen Korrekturen ergeben sich für d die Werte

$$d_1 = \frac{5}{88952}, \quad d_2 = \frac{5}{89063},$$

oder 'in nearest round numbers': $d = \frac{5}{89000}$ inch.

Wegen des Rundungsfehlers von R_2 von $91\frac{8}{11}$ auf 92 ist d_2 etwas zu klein, und $d_2 = \frac{5}{88805}$ wäre richtiger. Das ergibt einen Mittelwert

$$d = \frac{9}{160000} \text{ inch, was ins metrische System:}$$

$$1 \text{ inch} = 2,5400 \text{ cm}$$

$$\underline{d = 142,88 \cdot 10^{-6} \text{ cm}} \text{ ergibt.}$$

Theoretische Prüfung von Newtons Ergebnis

Um den Wert von d rechnerisch zu prüfen, braucht man eine Tafel für die relative, spektrale Empfindlichkeit des Auges, die mit Hilfe des 'Flimmerphotometers' gemessen werden kann.

Im '*Handbook of Chemistry and Physics*' (ed. Ch. Hodgman, Chemical Rubber Publ. Co., Cleveland, Ohio) 28th ed. 1944, pg. 2157 findet man eine Tabelle '*Relative Stimulation of the Three Primary Colour Sensations*'. Indem man die drei Reize für jedes Spektralintervall addiert, erhält man die folgende Tabelle für $E(\lambda)$, die relative spektrale Empfindlichkeit des Auges.

(Man erkennt aus der Tabelle im '*Handbook*', dass sie für Tageslicht normiert ist, da die drei Empfindlichkeiten über alle λ summiert denselben Wert ergeben.)

Tabelle für $E(\lambda)$:

λ in 10^{-6} cm	38	40	42	44	46	48	50	52	54
$E(\lambda)$	10	31	52	77	81	78	78	100	133
λ	56	58	60	62	64	66	68	70	
$E(\lambda)$	146	137	108	69	32	13	5	2	

Die Intensität $|a|^2$ von monochromatischem Licht der Wellenzahl $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, das an einem Spalt zwischen zwei Gläsern vom Brechungsindex n reflektiert wird, ist proportional zu:

$$J_\lambda(d) = \frac{\sin^2(kd)}{4n^2 + (n^2 - 1)^2 \sin^2(kd)}.$$

Man integriert nun numerisch – mit einem Computer – $\int E(\lambda) J_\lambda(d) d\lambda = H(d)$.

$H(d)$ hat nicht gleichmässig verteilte Minima und Maxima, und das fünfte Minimum finden wir bei

$$d = 142,691 \cdot 10^{-6} \text{ cm}.$$

Dieses Ergebnis weicht nur $1\frac{1}{2}$ p.m. von demjenigen Newtons ab, und liegt daher innerhalb der durch die beiden Messwerte Newtons angedeuteten Fehlerprocente. Das war für uns eine Überraschung, da wir Abweichungen von Prozenten erwartet hatten.

Diskussion

Da jeder Fehler in r einen doppelten Fehler in d bewirkt, muss Newton r eher genauer als auf 1 Promille gemessen haben. Denn B und n sind ja sicher auch nicht fehlerfrei, und ein Fehler in n geht ins Resultat dreifach ein.

Newtons beide Werte unterscheiden sich um $1\frac{1}{2}$ p.m..

Der Unterschied zum berechneten Wert ist $0.19 \cdot 10^{-6}$ oder $1\frac{1}{2}$ p.m.. Das ist so wenig, dass man fragen muss, wie genau der berechnete Wert ist. Das hängt wesentlich von unserer Tabelle der Empfindlichkeit $E(\lambda)$ ab. Es scheint, dass diese, wenn $E(\lambda) \sim 50$ ist, auf 1% genau ist. Man hat 11 solche Zahlen von $\lambda = 42$ bis 62, die für das Integral die Hauptsache sind. Man kann hoffen, dass sich die Fehler einigermaßen ausgleichen, und wird daher einen Fehler um 2 p.m. erwarten. Man könnte daran denken, in der Rechnung

die Dispersion von n zu berücksichtigen, über die ja Newton in seiner Optik quantitative Angaben macht. Das scheint uns aber wenig Sinn zu haben, in Anbetracht der möglichen und unbekannten Fehler von $E(\lambda)$, die ja auch nicht für alle Personen genau gleich sein müssen.

Man wird aber wohl sagen dürfen, dass Newtons Bestimmung von d sicher auf 5 p.m. oder genauer ist. Das bedeutet aber, dass er den Ringdurchmesser auf ca. 2 p.m. genau gemessen hat, d.h. auf $1/100$ mm, oder noch genauer.

Daher muss man fragen, ob eine solche Messung auf 'Haaresbreite' überhaupt von blossen Auge möglich ist.

Es gibt nun einen Beobachter, der ähnliche Genauigkeits-Ansprüche stellte, und der ebenfalls von blossen Auge gemessen hat: *Tycho Brahe*, der Astronom (1546 - 1601). Dieser hat, wie jeder Astronom, Winkel gemessen; also müssen wir auch die Messung Newtons als Winkelmessung formulieren, um vergleichen zu können.

Newton hat einen Durchmesser von $\frac{1}{5}$ inch im Abstand von 8 inch betrachtet, so dass der Ring unter dem Gesichtswinkel $\frac{1}{40}$, im Bogenmass, erschien. Ein Promille hiervon ist $\frac{1}{40000}$.

Tycho hat mit grossen Sextanten die Positionen von neun Fixsternen bestimmt, die ihm als Referenzpunkte bei seinen Planeten-Ortsbestimmungen dienten. Er hat die Koordinaten dieser Fixsterne auf 5 Bogensekunden angegeben.⁵ Im Bogenmass ist das ebenfalls $\frac{1}{40000}$. Nun kann man die Sternkoordinaten Tychos mit modernen Werten vergleichen, indem man diese für ihre bekannte Eigenbewegung korrigiert. Der mittlere Koordinatenfehler Tychos ergibt sich dann zu 24 Bogensekunden, was in Anbetracht der grossen Winkel, die gemessen wurden, wobei sich die Sterne dauernd bewegen, ganz erstaunlich ist. Man muss daher annehmen, dass Newton den Durchmesser r tatsächlich auf wenige Promille bestimmen konnte. Er erreichte damit die Grenze der Beobachtungsmöglichkeit vom blossen Auge, wie dies auch Tycho, anerkanntermassen, gelungen ist.

Es bleibt nun noch die Frage:

Newton hat eine Länge in Inches gemessen. War sein Längenmass - um 1670 - dasselbe, wie es heute in England gesetzlich ist? In Anbetracht der konservativen Haltung der Engländer in solchen Dingen ist dies wahrscheinlich.

Bemerkungen zu unserer Rechnung

Die maximale Empfindlichkeit des Auges liegt bei $\lambda = 5560 \text{ \AA}$. Das Maximum ist gut ausgeprägt, wie auch unsere Tabelle zeigt. Macht man das Experiment, d.h. Reflexion an einer dünneren Schicht mit monochromatischem Licht, so liegen die Werte für minimale und maximale Reflexion bei $d_n = n \cdot \frac{\lambda}{4}$, $n = 1, 2, 3 \dots$. Daher hat man für Licht von $\lambda = 5560 \text{ \AA}$: $d_{10} = 139 \cdot 10^{-6} \text{ cm}$, was merklich kleiner ist als der berechnete und der

⁵ J.L.E. Dreyer, *Tycho Brahe* (London 1890); Appendix E.

beobachtete Wert. Also ist unsere Rechnung nötig, da es nicht nur auf das Maximum von $E(\lambda)$ ankommt. Die Rechnung ergibt Minima und Maxima bei d (in 10^{-6}cm) :

(+)	(-)	(+)	(-)	(+)	(-)	(+)	(-)	(+)	(-)
12.86	26.09	39.64	56.27	71.72	85.93	100.07	114.32	128.38	142.69

und daraus hat man die Differenzfolge:

12.86	13.23	13.55	16.63	15.45	14.21	14.14	14.25	14.07	14.31
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Man sieht, die Differenzen schwanken um $\pm 10\%$; aber sie werden bei den höheren Ordnungen regelmässiger. Diese Schwankungen hängen mit dem Überlappen der Ordnungen und mit der Empfindlichkeit des Auges in unübersichtlicher Art zusammen. Man muss auch wirklich den 5. dunklen Ring, oder d_{10} betrachten. Nimmt man die 5. helle Stelle, so ist $128,07 \cdot \frac{10}{9} = 145,2$ deutlich grösser als $d_{10} = 142,25$.

Newton's monochromatische Betrachtungen und Messungen.

In seiner Optik, *l.c.* *Observations 13. – 16.* (Vol. IV, pg. 130-132), beschreibt Newton monochromatische Ringe. Diese hat er in der 'Dunkelkammer' beobachtet: den in der Kammer einfallenden Lichtstrahl lenkte ein Assistent mit einem Prisma so ab, dass das Licht einer bestimmten Farbe auf einen weissen Papierstreifen fiel, den Newton über die Gläser hielt. Im reflektierten Bild des Streifens sah er nun die Ringe. Diese, obwohl wenig hell, erschienen sehr scharf und blassten nach aussen kaum ab, so dass Newton bis 20 und mehr Ringe zählen konnte. Durch passendes Drehen des Prismas wurden auf diese Weise die verschiedenen Farben auf das Papier geworfen, wobei die Ringe, je nach der Farbe, grösser oder kleiner wurden. Im Violett waren sie am kleinsten, im Rot am grössten. Newton schätzte, dass das, was wir Wellenlänge⁶ nennen, am Rande des Rot und am Rande des Violett, sich wie 14:9 verhält. Newton war sich darüber klar, dass seine spektrale Auflösung mangelhaft war. Darum meinte er, man sollte dieses Verhältnis auf $14\frac{1}{4} : 9$ oder $14\frac{1}{3} : 9$ vergrössern.

Damit wird das Verhältnis recht genau 8 : 5. Das entspricht in unserer Tabelle S. 4 dem Spektralbereich, in welchem $E(\lambda) > 30$ ist, also dem Intervall $\lambda = 4000 \text{ Å}$ bis 6400 Å . Ausserhalb dieses Intervalls ist $E(\lambda)$ wohl so klein, dass die Ringe nicht mehr deutlich erscheinen.

In der 16. Observation berichtet Newton, dass er den 6. hellen Ring im Zitronengelb

⁶Newton spricht nicht von Wellenlängen, sondern von "length of the fit of easy transmission and reflection". Das ist die Periode der Interferenz an "dünnen Blättchen". Sie ist gleich der halben Wellenlänge und eine rein experimentelle Grösse!

(*citrine Yellow*) gemessen habe. Er fand: ' $\frac{58}{100}$ inches, or a little less, agreeable to Observation 6', wo er den 6. Ring bei Tageslicht gemessen hat. Die dabei verwendete Linse hatte $2R = 102$ feet. Daraus kann man, wegen $d = \frac{11}{4} \cdot \lambda$, die zugehörige Wellenlänge ausrechnen und findet

$$\lambda = 5860 \text{ \AA} .$$

In Book II. Part II. (Opera IV. 143 unten) nennt er die Farbe dieses Lichts '*bright citrine Yellow or confine of Yellow and Orange*'. Im '*Handbook of Ch. & Ph.*' pg. 1993 findet man eine Liste der zu verschiedenen Wellenlängen gehörenden Farben. Darin heisst es: '*Yellow, representative 5800 \AA, limits 5750 – 5850 \AA*'. Die repräsentative Farbe ist dadurch *definiert*, dass die Farbkoordinaten für Grün und Rot praktisch gleich sind, und die Farbe fast gesättigt ist: $R = 69$, $G = 67$, $B = 1$. Die Grenze von Gelb zu Orange stimmt wieder erstaunlich gut zur Angabe Newtons. Dieser hielt aber seine Messung des 5. dunklen Ringes für genauer, und er war der Ansicht, er entspreche dem leuchtenden Zitronengelb. Daher legt er die diesem Ring entsprechende Wellenlänge $\frac{5}{2} \cdot \lambda = d$ seinen Überlegungen zugrunde. Dieses λ ist

$$\lambda = 5707 \text{ \AA} .$$

Newton hat bekanntlich die Farbenfolge im Spektrum mit der Tonfolge in der Tonleiter verglichen. Er wusste zwar, dass hierfür keine physikalischen Gründe geltend gemacht werden können, aber durch diese Analogie war er auf ein Koordinatensystem im Kontinuum der Farben geführt worden, das er bei allen seinen Forschungen benützt hat, und das durch seine Entdeckung der '*lengths of Fits*' präzisiert werden konnte. Er hat auf diese Weise das Spektrum in sieben Intervalle geteilt: ist g der Grundton und h der Halbton, so ist die Intervallfolge

g	h	g	g	g	h	g
Violett	Indigo	Blau	Grün	Gelb	Orange	Rot

Setzt man das rote Ende des Spektrums 10000, so entspricht das violette Ende 6300, was aus dem Zahlenverhältnis 8 : 5 folgt. Nach der 'musikalischen' (exponentiellen) Teilung liegt alsdann die Grenze Gelb-Orange bei 8855, und dies soll nun, nach Newton, der präzise bestimmten Wellenlänge 5707 \AA entsprechen. Daraus folgt, dass das für Newton sichtbare Spektrum von 4000 \AA bis 6350 \AA reicht, was sehr gut zu unserem Schluss aus der Tabelle für $E(\lambda)$ passt. Indem so, durch bestimmte Wellenlängen, das Farbenkontinuum in Intervalle geteilt ist, erhielten die Farbenamen einen physikalischen Sinn, während sie sonst konventionell sind.

Newtons Messungen sind bis ins 19. Jahrhundert die weitaus besten Wellenlängen-Bestimmungen gewesen. Sie wurden erst übertroffen, nachdem Fraunhofer um 1815 das Beugungsgitter erfunden hatte, und die Spektroskopie ist so zur 'Präzisions-Wissenschaft' geworden.⁷

Juni 1992

⁷ Vergl. auch: M. Fierz "Zur Entstehung der Wellenoptik", Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich (1983) 128 pg. 1-20.