Das Trapez

Autor(en): **Pünchera, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Jahresbericht des Bündnerischen Lehrervereins**

Band (Jahr): **17 (1899)**

Heft: **Der Geometrie-Unterricht in der I. und II. Klasse der Kantonsschule und in Realschulen**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-145630

Das verschobene Quadrat.

2) Nimm nun 4 gleich lange Stäbchen, und lege sie zu einem Quadrat zusammen. Was für Parallelogramme entstehen beim Zusammendrücken? Es entstehen schiefwinklige, aber gleichseitige Parallelogramme. Die früher behandelten schiefwinkligen Parallelogramme kann man im Gegensatz hiezu ungleichseitig nennen. Zeichne das verschobene Quadrat in verschiedenen Stellungen. Wir nennen eine solche Figur ein *schiefwinkliges, gleichseitiges Parallelogramm* oder einen *Rhombus* (eine Raute), mitunter auch verschobenes Quadrat.

Weise Mineralien vor, deren Flächen Rhomben sind. (Krystallform des Granats).

IV. Einteilung der Parallelogramme bezüglich der Seiten und Winkel.

Vergleiche nochmals die Merkmale der verschiedenen Parallelogramme, die wir behandelt haben.

Bezüglich der Seiten und Winkel kann man folgende Arten von Parallelogrammen unterscheiden:

1) Das schiefwinklige und ungleichseitige Parallelogramm oder das Rhomboid;
2) Das rechtwinklige und ungleichseitige Parallelogramm oder das Rechteck;
3) Das schiefwinklige und gleichseitige Parallelogramm oder den Rhombus;
4) Das rechtwinklige und gleichseitige Parallelogramm oder das Quadrat.

K. Das Trapez.

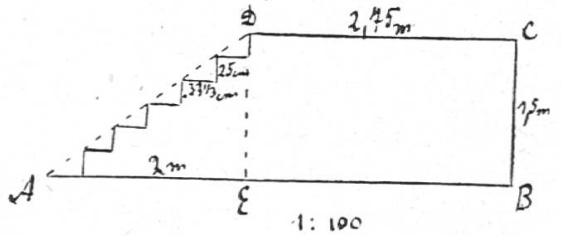
I. Das rechtwinklige Trapez.

1) Aufgabe. *Es soll die Seitenansicht des Mauerwerks der Treppe, deren Geländer besprochen wurde, gezeichnet und der Rauminhalt des Mauerwerks berechnet werden.*

Ansicht des Mauerwerks.

a) Betrachte also die Fläche der Treppe, die mit der Hausmauer parallel läuft. Wir denken uns die Geländerstange A D hinzu und fassen die Figur A B C D ins Auge. Diese können wir uns zusammengesetzt denken aus dem rechtwinkligen Dreieck A E D und dem Rechteck E B C D. Um sie zeichnen zu können, müssen wir die Länge von A E, E B und B C kennen. A E = 2 m, E B = 2,75 m, B C = 1,5 m.

Fig. 39.



Die Figur A B C D hat ein Paar parallele Gegenseiten, A B und D C, die jedoch ungleich lang sind. Das andere Seitenpaar A D und B C ist zu einander schief. Wir nennen diese Figur ein *Trapez.* Ihre Konstruktion ergibt sich unmittelbar.

Berechnung des Mauerwerks.

b) Wieviel m^3 Material enthält nun das Treppenmauerwerk? Wir denken uns für einen Augenblick die Stufen bis zur Linie A D ausgefüllt und das ganze Mauerwerk auf die Fläche A B C D gelegt; dann hat es die Form eines vierseitigen senkrechten Prismas, dessen Grundfläche das Trapez A B C D und dessen Höhe die Breite der Treppe ist, welche 1,2 m beträgt; sein Inhalt ist $G \times H$.

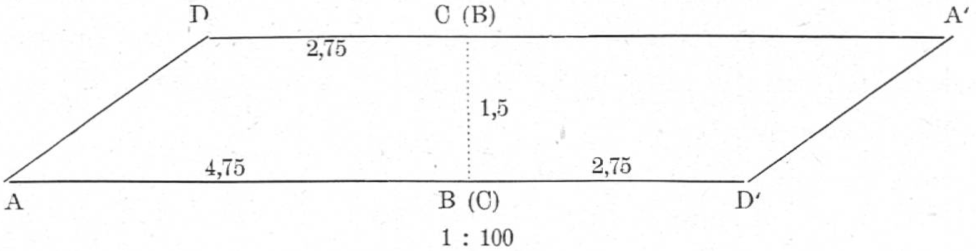
Demnach müssen wir zuerst das Trapez A B C D berechnen.

Erste Art. $ABCD = AED + EBCD = \frac{2 \times 1{,}5}{2}\ m^2 + 2{,}75 \times 1{,}5\ m^2 = 5{,}625\ m^2$.

Zweite Berechnung des Trapezes.

Zweite Art. Wir drehen das Trapez und legen es an B C; dann entsteht das Parallelogramm A D′ A′ D, dessen Grundlinie so

Fig. 40.



lang wie die beiden parallelen Trapezseiten, dessen Höhe gleich ihrem senkrechten Abstande ist, welcher auch Höhe des Trapezes heisst. Das Trapez A B C D ist die Hälfte dieses Parallelogramms, somit:

Flächeninhalt des Trapezes A B C D $= \frac{1}{2}$ (A B + D C) $\times$ B C $= \frac{1}{2}$ (4,75 + 2,75) $\times$ 1,5 m² = 5,625 m².

Wir erhalten daher den Inhalt des Trapezes A B C D, indem wir seine Höhe und die beiden parallelen Seiten messen und die halbe Summe dieser beiden letzteren mit der Höhe multiplizieren. Nun ist der Inhalt des senkrechten Prismas = Trapez $\times$ Treppenbreite = 5,625 $\times$ 1,2 m³ = 6,75 m³.

Inhalt des Prismas mit trap. Grundfläche.

Um den Inhalt des Mauerwerks zu erhalten, müssen wir noch die 6 dreieckigen Prismen abziehen, mit welchen wir uns die Treppenstufen ausgefüllt dachten.

Eine Stufe ist $\frac{2 \text{ m}}{6} = 33^1/_3$ cm breit und $\frac{1{,}5 \text{ m}}{6} = 25$ cm hoch. Die Grundfläche eines solchen dreiseitigen Prismas misst daher: $\frac{3^1/_3 \times 2^1/_2}{2}$ dm².

Sein Inhalt ist daher $= G \times H = \frac{3^1/_3 \times 2^1/_2}{2} \times 12$ dm³ = 50 dm³.

Inhalt dieser 6 Prismen = 6 . 50 dm³ = 300 dm³ = 0,3 m³.
Inhalt des Mauerwerks = 6,75 m³ — 0,3 m³ = 6,45 m³.

II. Das gleichschenklige Trapez.

2) Aufgabe. *Betrachte eine Doppeltreppe mit Holzgeländer, die auf beiden Seiten gleich lang ist und auf wagerechtem Boden steht. Zeichne die Seitenansicht der Treppe mit Geländer, und berechne den Rauminhalt des Mauerwerks.*

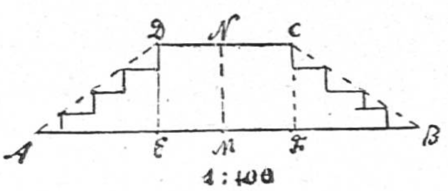
Die Doppeltreppe.

a) Beschreibe die Treppe. Wir gehen von der Symmetrieachse M N der Treppenfläche aus, welche zur Hausmauer parallel läuft (der Seitenansicht der Treppe), und können uns dann die Doppeltreppe aus 2 gleichen einfachen Treppen zusammengesetzt denken, wovon die eine links von der Symmetrieachse die andere rechts davon liegt.

Nimm die notwendigen Masse.

M A = M B = 2 m, N D = N C = 70 cm, M N = 90 cm, Geländerhöhe = 90 cm, Treppenbreite = 1,4 m. Die schrägen Geländerflächen sind zwei gleiche Parallelogramme. Solche haben wir zu zeichnen und zu berechnen gelernt.

Fig. 41.



Um die Figur A B C D (Ansicht des Treppenhauses) zu konstruieren, zeichnen wir zuerst die Symmetrieachse M N und tragen dann senkrecht zu ihr M A und M B, ferner N D und N C ab. Dadurch entstehen die beiden kongruenten Trapeze M N D A und M N C B, die wir durch Umklappen um M N zur Deckung bringen könnten. Daraus folgt, dass A D = B C ist, dass W. M A D = W. M B C und dass W. N D A = W. N C B ist. Die ganze Figur A B C D hat ein Paar Gegenseiten parallel und ungleich, das andere Paar schief zu einander und gleich; sie heisst *gleichschenkliges Trapez.* (Denken wir uns A D und B C verlängert, so würden sich diese in der Verlängerung der Symmetrieachse M N treffen, und es entstünde ein gleichschenkliges Dreieck.) Es heisst auch *symmetrisches* Trapez, weil es eine Symmetrieachse besitzt.

Konstruktion des Trapezes.

Das Trapez der einfachen Treppe und die beiden Trapeze A M N D und M B C N, bei welchen eine der nicht parallelen Seiten zu den parallelen senkrecht steht, heissen dann *rechtwinklige Trapeze.*

b) Nun wollen wir das Mauerwerk berechnen.

Berechnung des Trapezes und des Mauerwerks.

Die Überlegung, die wir bei Berechnung der einfachen Treppe machten, zeigt uns, dass der Inhalt des Mauerwerks gleich Trapez $\times$ Treppenbreite — 8 kleine dreiseitige Prismen ist. Wir berechnen zuerst das gleichschenklige Trapez A B C D.

Erste Art. $ABCD = 2\,(AMND) = 2\,\dfrac{(AM + DN)\,.\,MN}{2} =$

$(2 + 0{,}7)\,.\,0{,}9 = 2{,}43\ m^2.$

Zweite Art. Drehe A B C D um, und lege es an B C (wie früher das rechtw. Trapez); dann folgt $ABCD = \dfrac{1}{2}\,(AB + DC)$

$\times\ MN = \dfrac{1}{2}\,(4 + 1{,}4)\,.\,0{,}9\ m^2 = 2{,}43\ m^2.$

Das gleichschenklige Trapez A B C D wird also berechnet, indem man seine Höhe (d. h. den Abstand seiner parallelen Seiten) und seine parallelen Seiten misst und die halbe Summe der Masszahlen dieser letzteren mit der Masszahl der Höhe multipliziert.

Nun ist der Inhalt des Mauerwerks mit ausgefüllten Stufen $= 2{,}43\,.\,1{,}4\ m^3 = 3{,}402\ m^3.$

Hievon müssen wir noch die 8 kleinen dreiseitigen Prismen in Abzug bringen.

Die Grundfläche eines solchen Prismas ist ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten $\frac{1,3}{4}$ m $= 0,325$ m und $\frac{0,9}{4}$ m $= 0,225$ m messen, dessen Inhalt also $= \frac{0,325 \cdot 0,225}{2}$ m² ist.

Inhalt eines dreiseitigen Prismas

$$= \frac{0,325 \cdot 0,225}{2} \cdot 1,4 \text{ m}^3.$$

Inhalt der 8 dreiseitigen Prismen

$$= \frac{0,325 \cdot 0,225 \cdot 1,4}{2} \cdot 8 \text{ m}^3 = 0,409 \text{ m}^3.$$

Inhalt des Mauerwerks

$$= 3,402 \text{ m}^3 - 0,409 \text{ m}^3 = 2,993 \text{ m}^3, \text{ ung. } 3 \text{ m}^3.$$

III. Das Trapez mit ungleich langen schrägen Seiten.

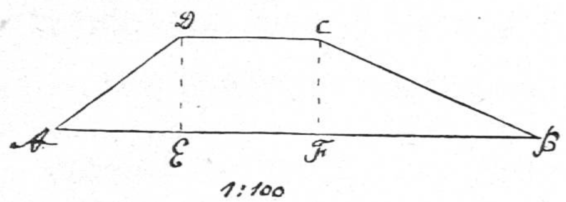
Es gibt auch Doppeltreppen, bei welchen die beiden Treppen ungleich lang und ungleich geneigt sind.

3) Aufgabe. *Zeichne auch die Seitenansicht eines solchen Trapezes.*

Berechnung des ungleichseitigen Trapezes.

Die Gegenseiten A D und B C sind hier ungleich lang; die längere B C ist weniger geneigt als die kürzere A D. Die Abstände D E und C F sind beide = 1 m; folglich sind A B und D C parallel.

Fig. 42.



Die Figur A B C D heisst auch Trapez. Um sie zeichnen zu können, haben wir gemessen: A E = 1,3 m, D C = E F = 1,4 m, F B = 2,3 m und D E = C F = 1 m. Hier sind die Dreiecke A D E und B F C nicht gleich.

Zeige, dass der Inhalt dieses Trapezes auf gleiche Weise berechnet wird wie der Inhalt des rechtwinkligen und gleichschenkligen Trapezes.

Inhalt von A B C D $= \frac{1}{2}$ (A B + D C) . D E $= \frac{1}{2} \cdot (5 + 1,4) \cdot 1 \text{ m}^2 = 3,2 \text{ m}^2$.

Verallgemeinerung. Welche Merkmale haben die behandelten Trapeze gemein?

Satz 45. a) Beim Trapez sind 2 Gegenseiten parallel und ungleich, die beiden andern schief zu einander.

b) Sind die beiden letztern gleich lang, so heisst das Trapez gleichschenklig oder symmetrisch.

c) Steht eine der nicht parallelen Seiten zu den parallelen Seiten senkrecht, so heisst das Trapez rechtwinklig.

Satz 46. Der Inhalt des Trapezes wird gefunden, indem man die halbe Summe der parallelen Seiten mit ihrem Abstande (Höhe des Trapezes) multipliziert.

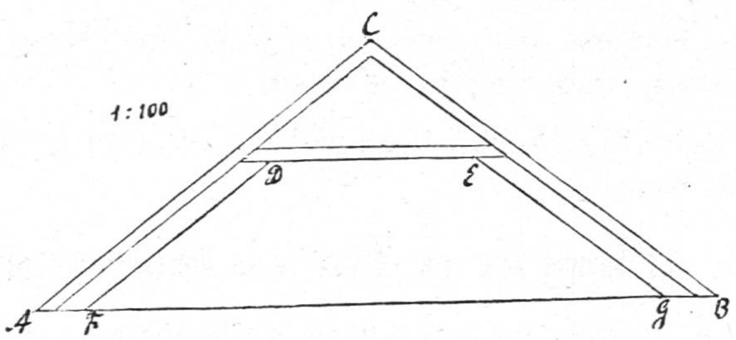
Übungen.

1) Zur Aufbewahrung von Tannenzapfen hat man einen Schopf mit Pultdach konstruiert, welcher folgende Dimensionen hat: Länge 4,5 m, Breite 3,2 m, vordere Höhe = 2,7 m, hintere Höhe = 1 m. Wieviel m^3 Tannenzapfen hält dieser Schopf? Zeichne sein Netz, und beschreibe ihn genau. Als was für einen Körper kann man ihn auffassen, wenn man ihn auf eines seiner Trapeze gelegt denkt? Was für Trapeze sind zwei seiner Seitenflächen?

Berechne auch den Preis der Bretter à 2 Fr. pro m^2.

2) Betrachte auf dem Estrich eine Dachstuhlkonstruktion. Wo kommt bei derselben die Form eines Parallelogramms und des Trapezes vor? Was kosten diese Balken, wenn A C und B C 13 cm hoch und 15 cm breit, D E 18 cm hoch und 15 cm breit, F D und G E 20 cm breit und 20 cm hoch sind? Entnimm die Länge der Balken aus der Zeichnung. (Fig. 43.)

Fig. 43.



3) Der Trog eines Mistwagens ist 95 cm lang und oben 95 cm breit, unten 77 cm breit und 27 cm hoch; zeichne sein Netz, und berechne, wieviel er hält.

4) Der Trog eines andern Mist-, Erd- oder Sandwagens ist 1,8 m lang, oben 72 cm, unten 46 cm breit und 27 cm hoch. Wieviel hält er, wenn er eben voll gemacht wird?

5) Zeichne das Fenstergesims, und berechne die Wandmauer abzüglich die Fenster.

6) Berechne den Flächeninhalt folgender Bretter:

1) Länge 5,45 m,	obere Breite 47 cm,	untere Breite 38 cm.
2) „ 6,12 m,	„ „ 53 cm,	„ „ 41 cm.
3) „ 4,78 m,	„ „ 32 cm,	„ „ 27 cm.

L. Allgemeines über Vierecke. Das Vieleck.

I. Einteilung und allgemeine Eigenschaften der Vierecke.

1) Welche Figuren heissen Vierecke?

2) *Einteilung der Vierecke.*

Der Boden des schiefwinkligen Zimmers, den wir in Kapitel C besprochen haben, ist ein Viereck, in welchem keine Seiten parallel laufen. Man nennt ein solches Viereck ein Trapezoid. Vierecke mit einem Paar paralleler Gegenseiten haben wir Trapeze, und Vierecke, bei welchen beide Gegenseitenpaare parallel sind, haben wir Parallelogramme genannt.

Bezüglich der gegenseitigen Lage der Seiten teilt man also die Vierecke in *Trapezoide, Trapeze* und *Parallelogramme* ein.

3) Was versteht man unter einer Diagonale eines Vierecks? Wie viele Diagonalen hat das Viereck?

4) Welche Eigenschaft bezüglich der Winkel ist allen Vierecken gemeinsam?

Satz 47. Die Summe aller vier Winkel eines Vierecks beträgt 360°.

Gib den Beweis dafür. (Durch Zerlegung in 2 Dreiecke.)