Allgemeines über Vierecke

3) Der Trog eines Mistwagens ist 95 cm lang und oben 95 cm breit, unten 77 cm breit und 27 cm hoch; zeichne sein Netz, und berechne, wieviel er hält.

4) Der Trog eines andern Mist-, Erd- oder Sandwagens ist 1,8 m lang, oben 72 cm, unten 46 cm breit und 27 cm hoch. Wieviel hält er, wenn er eben voll gemacht wird?

5) Zeichne das Fenstergesims, und berechne die Wandmauer abzüglich die Fenster.

6) Berechne den Flächeninhalt folgender Bretter:

1) Länge 5,45 m,	obere Breite 47 cm,	untere Breite 38 cm.
2) „ 6,12 m,	„ „ 53 cm,	„ „ 41 cm.
3) „ 4,78 m,	„ „ 32 cm,	„ „ 27 cm.

L. Allgemeines über Vierecke. Das Vieleck.

I. Einteilung und allgemeine Eigenschaften der Vierecke.

1) Welche Figuren heissen Vierecke?

2) *Einteilung der Vierecke.*

Der Boden des schiefwinkligen Zimmers, den wir in Kapitel C besprochen haben, ist ein Viereck, in welchem keine Seiten parallel laufen. Man nennt ein solches Viereck ein Trapezoid. Vierecke mit einem Paar paralleler Gegenseiten haben wir Trapeze, und Vierecke, bei welchen beide Gegenseitenpaare parallel sind, haben wir Parallelogramme genannt.

Bezüglich der gegenseitigen Lage der Seiten teilt man also die Vierecke in *Trapezoide, Trapeze* und *Parallelogramme* ein.

3) Was versteht man unter einer Diagonale eines Vierecks? Wie viele Diagonalen hat das Viereck?

4) Welche Eigenschaft bezüglich der Winkel ist allen Vierecken gemeinsam?

Satz 47. Die Summe aller vier Winkel eines Vierecks beträgt 360°.

Gib den Beweis dafür. (Durch Zerlegung in 2 Dreiecke.)

II. Das Ausmessen vierseitiger Grundstücke.

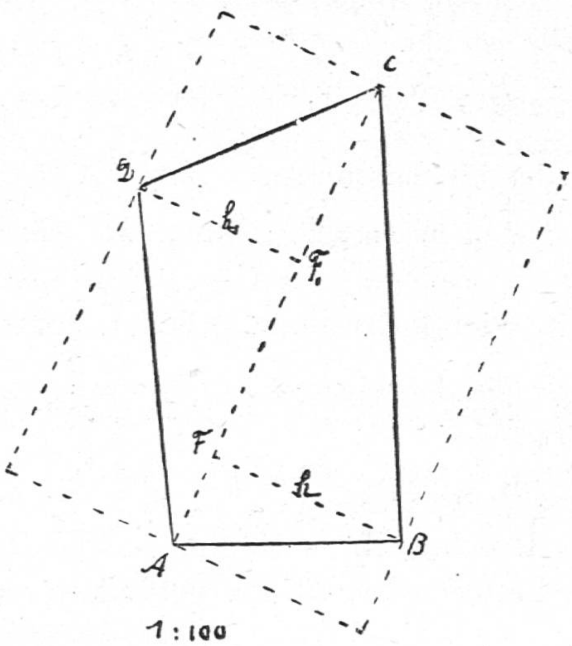
1) Wir haben früher Grundstücke ausgemessen, welche die Form eines Rechtecks hatten. Nun wollen wir zeigen, wie man beliebige vierseitige Grundstücke aussmisst.

Das Ausmessen eines vierseitigen Ackers.

Aufgabe. *Wir befinden uns auf einem vierseitigen Acker A B C D. Es soll sein Wert à 1 Fr. 25 Rp. pro m² berechnet werden.*

a) Bei den Marksteinen A, B, C und D stecken wir Stöcke ein (man bezeichnet diese 4 Punkte). Dann zerlegen wir das Vierek A B C D durch die Diagonale A C in zwei Dreiecke A B C und A C D. Um die Diagonale auf dem Acker zu bezeichnen, stecken wir zwischen A und C noch einige Stöcke ein, achten aber genau darauf, dass alle Stöcke in gerader Linie liegen. Um zunächst das Dreieck A B C zu berechnen, müssen wir die Grundlinie A C und die zugehörige Höhe F B messen. Die Höhe muss zunächst bezeichnet werden; wir müssen ihren Fusspunkt F bestimmen. Stelle dich zu diesem Zwecke mit seitwärts ausgestreckten Armen in der Richtung von A C auf, und bewege dich in dieser Richtung hin und her, bis dein Gesicht nach B sieht. Dann befindest du dich auf F. Um F genau zu bestimmen, bedient man sich dor Kreuzscheibe (Winkelkreuz). Hat man F gefunden, so steckt man nach Bedarf zwischen F und B noch einen oder mehrere Punkte ab und misst die Höhe F B (h). Es sei A C = 51,2 m, F B = h. = 22,4 m.

Fig. 44.



Dann ist der Inhalt von Dreieck A B C

$$= \frac{g\ .\ h}{2} = \frac{51{,}2\ .\ 22{,}4}{2}\ m^2 = 573{,}44\ m^2.$$

Dann bestimmen wir auf gleiche Weise den Fusspunkt F_1 der Höhe von D auf A C und messen D F_1 = h_1 = 17,6 m.

Der Inhalt des Dreiecks

$$A\ C\ D = \frac{g\,.\,h_1}{2} = \frac{51{,}2\ .\ 17{,}6}{2}\ m^2 = 450{,}56\ m^2.$$

Inhalt des Vierecks

$$A\,B\,C\,D = \frac{g\ .\ h}{2} + \frac{g\,.\,h_1}{2} = 1024\ m^2 = 10{,}24\ \text{Ar}.$$

b) Wir können diese Rechnung etwas vereinfachen. Statt die halbe Grundlinie $\left(\frac{51{,}2}{2}\right)$ zuerst mit h, dann mit h_1 zu multiplizieren und dann die Produkte zu addieren, können wir $\frac{g}{2}$ mit der Summe der beiden Höhen ($h + h_1$) multiplizieren.

$$f. = \frac{g}{2}\ (h + h_1) = \frac{51{,}2}{2}\ (22{,}4 + 17{,}6)\ m^2 = 25{,}6\ .\ 40\ m^2$$
$$= 1024\ m^2.$$

Die Richtigkeit dieser Berechnung lässt sich auch geometrisch leicht beweisen. Zeichne zu A B C und zu A C D das Rechteck von gleicher Grundlinie (A C) und gleicher Höhe. Beide Rechtecke zusammen haben doppelt so viel Inhalt wie die beiden Dreiecke oder wie das Viereck; sie bilden zusammen ein Rechteck, dessen Grundlinie gleich g, dessen Höhe gleich der Summe der beiden Höhen h und h_1 ist. Der Inhalt dieses grossen Rechtecks ist also = g ($h + h_1$); der Inhalt des Vierecks A B C D somit $= \frac{g\ .\ (h + h_1)}{2}$

Kaufpreis des Grundstücks = 1024 . 1,25 Fr. = 1280 Fr.

c) Was müssten wir noch messen, um den Plan der Wiese genau zeichnen zu können? A F = 10 m und C F_1 = 20 m (siehe Kapitel C), oder auch die sämtlichen Seiten des Vierecks.

2) Miss verschiedene vierseitige und dreiseitige Grundstücke aus, und berechne sie.

3) Bei einer Wiese messe A C = 87,2 m, h = 37,5 m und h_1. = 43,6 m. Berechne ihren Kaufpreis à 80 Rp. pro m^2. Wie gross wäre ihr Kaufpreis zu 2,5 Fr. per Klafter (1,8 m Seite)?

4) a) Ein Bauplatz A B C D wird à 12 Fr. pro m² gekauft. Seine Diagonale B D misst 24,5 m, die Höhe von A aus 14,2 m, diejenige von C aus 13 m. Der erste Fusspunkt ist von B um 11 m, der zweite von D um 9 m entfernt. Zeichne den Plan, und berechne den Kaufpreis.

b) Ein Weinberg hat die Form eines rechtwinkligen Trapezes. Seine parallelen Seiten messen bezw. 54 m und 47,8 m; seine Höhe misst 29,2 m. Welchen Wert hat er à 3,25 Fr. per m²? Wieviel zahlt man jährlich für die Bearbeitung dieses Weinbergs, wenn man durchschnittlich 70 Fr. für 250 Klafter (à 2,1 m Seite) zahlt?

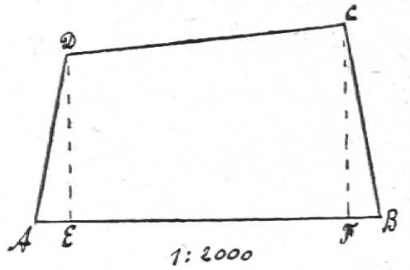
Ausmessung durch Zerlegung in Trapeze und Dreiecke.

5) Ein Weinberg von der Form von Fig. 45 soll ausgemessen werden. Die Rebstickelreihen mögen annähernd senkrecht zu A B stehen.

Die Diagonale A C wäre nicht leicht zu messen; deshalb zerlegt man das Viereck A B C D in das Trapez E F C D und in die beiden Dreiecke A E D und F B C. Man sucht mit Hilfe der Kreuzscheibe die Fusspunkte E und F und misst die Strecken: A E, E F, F B, D E und C F.

A E = 7,9 m, E F = 56,3 m, F B = 5,8 m, D E = 34,2 m, C F = 40,3 m.

Fig. 45.



Wieviel Ar misst dieser Weinberg?

Er ist für 2850 Fr. gekauft worden. Wieviel hat man per m² bezahlt?

Was kostet das zweimalige Bespritzen dieser Reben à 60 Rp. pro Ar?

6) Miss mehrere solcher Grundstücke aus.

III. Das Ausmessen von Grundstücken, die mehr als vier Ecken besitzen. Das Vieleck.

1) Es soll eine fünfeckige Wiese ausgemessen werden. Wir zerlegen sie durch Diagonalen in Dreiecke und messen jedes einzelne Dreieck aus.

2) Skizziere eine sechs- und eine siebeneckige Wiese, und gib an, wie diese zu berechnen sind.

Verallgemeinerung. Grundstücke können Drei-, Vier-, Fünf-, Sechsecke u. s. f. sein. Man bezeichnet diese Figuren mit dem gemeinsamen Namen *Vieleck* oder *Polygon.* Zählt die verschiedenen Arten von Vielecken auf, die behandelt worden sind. Durch welche Zerlegung konnten wir diese Vielecke berechnen?

Satz 48. Ein Vieleck kann berechnet werden, indem man es durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt und letztere einzeln berechnet.

M. Konstruktion der Symmetrieachse und Anwendungen.

1) Welche der bisher behandelten Figuren zeigen Symmetrie? (Das Quadrat, das Rechteck, das gleichschenklige Dreieck, der Kreis, das regelmässige Sechseck, der Rhombus und das gleichschenklige Trapez.) Zeichnet solche Figuren an die Wandtafel, und konstruiert ihre Symmetrieachsen.

Wie viele Symmetrieachsen hat jede dieser Flächen?

Wie haben wir die Symmetrieachsen gezeichnet?

In jedem Fall kam diese Konstruktion darauf hinaus, eine Strecke zu halbieren und in ihrer Mitte die Senkrechte zu errichten.

2) *Wir wollen nun zeigen, wie man eine Strecke halbiert oder die Senkrechte in ihrer Mitte, d. h. die Symmetrieachse der Strecke zeichnet, ohne den Massstab zu gebrauchen.*

Eigenschaften der Punkte auf der Symmetrieachse einer Strecke.

a) Zunächst wollen wir nochmals die Symmetrieachse der Strecke A B zeichnen, indem wir sie messen und im Mittelpunkt mit Benutzung des rechtwinkligen Dreiecks die Senkrechte errichten. Welche Eigenschaft haben ihre Punkte?

Verbinden wir irgend einen davon, etwa P, mit den Endpunkten A und B der Strecke, so entstehen zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke, die durch Umklappung um die Symmetrieachse zur Deckung kommen, weil M A = M B und W. A M P = W. B M P = 90° ist. Folglich ist *A P = B P.* P hat also