Zeitschrift: Jahresbericht des Bündnerischen Lehrervereins

Herausgeber: Bündnerischer Lehrerverein

Band: 17 (1899)

Heft: : Der Geometrie-Unterricht in der I. und II. Klasse der Kantonsschule und in Realschulen

Artikel: Darstellung rechtwinkliger Körper

Autor: Pünchera, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-145633

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

II. Teil.

A. Darstellung rechtwinkliger Körper.

I. Grund- und Aufriss rechtwinkliger Körper. (Ähnliche Rechtecke.)

Wir wollen zeigen, wie der Plan des Schulhauses zu zeichnen wäre.

Wer ein Haus bauen will, lässt zuerst durch einen Baumeister einen Plan entwerfen und an Hand desselben einen Kostenvoranschlag aufstellen. (Weise die Pläne eines Hauses, womöglich des Schulhauses, vor.)

1) *Einfachste Darstellung des Schulzimmers.*

Der Zimmerboden und sein Bild.

a) Wir beginnen mit der Darstellung des Schulzimmers und zeichnen den Boden im Massstabe 1 : 100. Diese Figur heisst der Grundriss des Schulzimmers. (Repetition der Konstruktion des Rechtecks und der Begriffe senkrecht und parallel.)

Zeichne in diesen Grundriss die Flächen hinein, auf welchen der Ofen, der Kasten, der Pult, die Bank und andere Gegenstände ruhen, also die Grundrisse dieser Körper. Welche Abstände müssen zu diesem Zwecke gemessen werden? (Repetition des Abstandes zweier Parallelen und eines Punktes von einer Geraden.)

Welche Kosten müssen für den Boden in den Voranschlag aufgenommen werden, wenn pro m² 4 Fr. berechnet werden?

(Repetition der Berechnung des Rechtecks.)

b) *Ähnlichkeit von Boden und Plan.* Vergleiche den Plan des Bodens (sein Bild) mit dem wirklichen Zimmerboden (dem

Original). Jede Seite des Bildes ist der 100. Teil der entsprechenden Seite des Originals. Die Winkel sind dieselben im Bild und im Original. Wir sagen: das Rechteck im Bilde ist dem Rechteck im Zimmer *ähnlich*. Die Grundlinie und die Höhe des einen sind dieselben Bruchteile von der Grundlinie und der Höhe des andern.

In welcher Beziehung stehen die Inhalte dieser beiden Rechtecke? Wie oft ist das kleine im grossen enthalten? Man könnte das kleine der Länge nach 100 mal im grossen aufstellen, der Breite nach auch 100 mal, in der ganzen Bodenfläche demnach 100 . 100 = 10000 mal. Der Inhalt des Bildrechtecks ist somit der 10000. Teil des Originalrechtecks.

Die Verkleinerungszahl für den Inhalt des Bodenrechtecks erhält man, indem man die Verkleinerungszahl für die Seitenlänge mit sich selbst multipliziert.

Wie verhält es sich damit, wenn man den Massstab 1 : 50 oder 1 : 200 wählt?

Die Zimmerwand und ihr Bild.

c) Konstruiere die Ansicht einer Wandfläche, und zeichne auch die Fenster ein, sowie Gegenstände, die sich an der Wand befinden. Das Bild der Wandfläche heisst ein Aufriss des Schulzimmers. Die Wandfläche und ihr Bild sind ähnliche Rechtecke. Die Seiten des Bildrechtecks sind bezw. der 100. Teil der entsprechenden Originalseiten. Der Inhalt des Bildrechtecks ist der 10000. Teil des Inhalts der Wandfläche.

Welches wäre die Beziehung zwischen Bild und Original, wenn man 1 : 25 oder 1 : 400 zeichnet?

Wieviel kostet der Anstrich der Wandfläche à 1 Fr. p. m^2?

Das Kartonmodell.

d) Nimm das Zimmermodell, und lege es auf den Grundriss, nachher mit der Wandfläche auf ihr Bild. Man sagt, das Zimmermodell sei dem Zimmerkörper ähnlich. Die 3 Ausdehnungen des Modells sind beziehungsweise der 100. Teil der entsprechenden Ausdehnungen des Zimmers. Wie oft ist das Modell im Zimmer enthalten? 100 . 100 . 100 = 1000000 mal.

Verallgemeinerung. Vergleiche die Beziehung zwischen Zimmerboden und seinem Bilde mit der Beziehung zwischen der Wandfläche und ihrem Bilde.

Es gilt allgemein:

Satz 1. a) Zeichnet man ein Rechteck in verkleinertem Massstabe, so erhält man ein Rechteck, das dem ersten ähnlich heisst. Zwei Rechtecke sind ähnlich,

wenn die Grundlinie und die Höhe des kleinen dieselben Bruchteile von der Grundlinie und der Höhe des grossen sind.

b) Man erhält die Verkleinerungszahl für den Inhalt, indem man die Verkleinerungszahl für die Seiten mit sich selbst multipliziert.

Anhang zu 1.

(Im Rechenunterricht zu behandeln.)

Proportionen.

1) *Wir wollen die Beziehungen ähnlicher Rechtecke auf eine neue Art ausdrücken und gehen vom Boden des Schulzimmers und seines Kartonmodells aus.*

Erstes Beispiel.

a) Es sollen L und B Länge und Breite des Zimmers, l und b. Länge und Breite des Modells bedeuten. Es sei also

L = 8 m; B = 5,5 m; l = 8 cm; b = 5,5 cm. Dann ist Das Verhältnis.
L : l = 8 m : 8 cm = 100, oder 100 . l = L und
B : b = 5,5 m : 5,5 cm = 100, oder 100 . b = B.

Man nennt L : l (lies l zu L) ein Verhältnis und 100 dessen Quotienten. L heisst das erste Glied (Vorderglied), l das zweite Glied (Hinterglied) des Verhältnisses.

Das Verhältnis B : l hat den gleichen Quotienten wie L : l. Diese zwei Verhältnisse heissen einander gleich. In diesem Sinne sagt man: die Länge des Zimmers und des Modells stehen im gleichen Verhältnisse zu einander wie deren Breiten.

Es ist also: 8 m : 8 cm = 5,5 m : 5 cm (= 100) oder

1) $L : l = B : b$ (lies L verhält sich zu l wie B zu b). Erste Proportion.

Diese Beziehung heisst eine Proportion; sie ist entstanden durch Gleichsetzung zweier gleichen Verhältnisse. L und b heissen die äusseren, l und B die inneren Glieder der Proportion.

b) Bilde das Verhältnis der Länge des Zimmers zur Breite, und vergleiche dieses Verhältnis mit dem entsprechenden Verhältnis beim Modell.

L : B = 8 m : 5,5 m = 8 : 5,5 = 80 : 55 = 16 : 11 = $1\,^{5}/_{11}$
l : b = 8 cm : 5,5 cm = 8 : 5,5 = 80 : 55 = 16 : 11 = $1\,^{5}/_{11}$

Zunächst sehen wir, dass diese Verhältnisse sich nicht ändern, wenn man beide Glieder mit derselben Zahl multipliziert oder dividiert.

Ferner ergibt sich, dass:

Zweite Proportion.

$$2)\ L : B = l : b \text{ ist.}$$

Die Länge des Zimmers verhält sich zu seiner Breite wie die Länge des Modells zu seiner Breite.

Man sagt auch, Länge und Breite des Zimmers und seines Modells sind proportioniert.

Das Produkt der äussern und der innern Glieder.

c) Zwischen den Gliedern der Proportion 2) besteht eine wichtige Beziehung, die wir zeigen wollen.

Wir haben schon gezeigt, dass sich der Boden des Modells 100 mal der Länge nach im Zimmerboden anlegen lässt. Dadurch entsteht auf dem Zimmerboden ein Streifen, dessen Länge gleich L, dessen Breite gleich b, dessen Inhalt also L . b ist.

Wir können aber das Modell auch 100 mal der Breite nach im Zimmer anlegen. Es entsteht dann ein Streifen mit den Ausdehnungen B und l, dessen Inhalt gleich B . l ist.

Da nun beide Streifen den Modellboden 100 mal enthalten, sind sie inhaltsgleich; somit:

$$L \,.\, b = B \,.\, l.$$

Das Produkt der äussern Glieder der Proportion 2) ist gleich dem Produkt der innern Glieder.

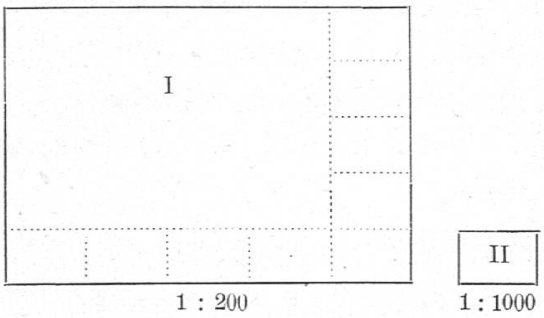
Bei Proportion 1) gilt das Gleiche.

Zweites Beispiel.

Darstellung in verschiedenen Massstäben.

Bei der Darstellung des Zimmerbodens kann der Massstab beliebig gewählt werden. Zeichne den Boden in 2 verschiedenen Massstäben, etwa 1 : 200 und 1 : 1000, und vergleiche die beiden Rechtecke I und II.

Fig. 1



a) In welcher Beziehung stehen Rechteck I und Rechteck II? Man erhält II, wenn man I im Massstabe 1 : 5 zeichnet. Sie sind also ähnlich. Bezeichnen G und g ihre Grundlinien, H und h ihre Höhen, so ist:

Erste Proportion.

$$G : g = 4 \text{ cm} : 0{,}8 \text{ cm} = 5$$
$$H : h = 2{,}7 \text{ cm} : 0{,}54 \text{ cm} = 5$$

Somit: $G : g = H : h$ (in Worten?)

$$4 : 0{,}8 = 2{,}7 : 0{,}54.$$

Zweite Proportion.

Ferner $G : H = 4 \text{ cm} : 2{,}7 \text{ cm} = 4 : 2{,}7 = 40 : 27 = 1^{13}/_{27}$

$$g : h = 0{,}8 \text{ cm} : 0{,}54 \text{ cm} = 0{,}8 : 0{,}54 = 80 : 54 = 1^{13}/_{27}$$

Somit $G : H = g : h$ (in Worten?)

Die Produkte der äussern und der innern Glieder.

b) Zeichne das Rechteck II 5 mal der Länge nach und 5 mal der Breite nach in das grössere Rechteck I ein. Dann ist

der Inhalt des ersten Streifens $= G \cdot h$,
der Inhalt des zweiten Streifens $= H \cdot g$.

Da beide Streifen das Rechteck II 5 mal enthalten, ist

$$G \cdot h = H \cdot g \text{ (in Worten?)}$$

Verallgemeinerung. Was haben uns Beispiel 1 und Beispiel 2 gelehrt?

Satz 2. a) Eine Proportion entsteht durch die Gleichsetzung zweier Verhältnisse, die denselben Quotienten haben.

b) Das Produkt der inneren Glieder einer Proportion ist gleich dem Produkt der äussern Glieder.

c) Die Grundlinien und die Höhen ähnlicher Rechtecke bilden eine Proportion.

2) Vergleiche die beiden Proportionen des Beispiels 1.

Umformung der Proportion.

1) $L : l = B : b$ 8 m : 8 cm = 5,5 m : 5,5 cm.
2) $L : B = l : b$ 8 m : 5,5 m = 8 cm : 5,5 cm.

Vertauscht man die innern Glieder der ersten Proportion miteinander, so erhält man die zweite Proportion. Stelle nun das Modell voran; dann erhältst du:

3) $l : L = b : B \left(= \frac{1}{100}\right)$.
4) $l : b = L : B \left(= \frac{11}{16}\right)$.

Beginne nun mit der Breite statt mit der Länge:

5) $B : b = L : l$.
6) $B : L = b : l$.
7) $b : B = l : L$.
8) $b : l = B : L$.

Sprich alle diese Proportionen in Worten aus. Vergleiche bei jeder das Produkt der äussern Glieder mit dem der innern.

Wie kann man aus einer dieser 8 Proportionen die 7 übrigen ableiten? 1) Durch Vertauschung der innern Glieder, 2) durch Vertauschung der äussern Glieder, 3) durch Vertauschung der zwei innern Glieder mit den zwei äussern.

Bilde auch bei Beispiel 2 die entsprechenden acht Proportionen.

Übungen.

1) Ein Zimmer ist 8,5 m lang und 6,8 m breit. Drücke das Verhältnis der Länge zur Breite in den kleinsten ganzen Zahlen aus.

2) Ein Haus ist $15^3/_4$ m hoch, ein anderes $13^1/_2$ m hoch. Wie verhalten sich diese Höhen?

3) Zu einem Photographierahmen, der 35 cm breit und 40 cm hoch ist, soll ein ähnlicher konstruiert werden, dessen Breite 10 cm misst. Wie hoch wird er?

a) Die Höhe betrage x cm; dann muss sein:

$$35 \text{ cm} : 40 \text{ cm} = 10 \text{ cm} : x \text{ cm} \quad \text{oder}$$

$$35 : 40 = 10 : x, \quad \text{und nach Satz 2 b}$$

$$35\,x = 40 \,.\, 10 \quad \text{(Wiederhole den Beweis)}$$

$$x = \frac{40 \,.\, 10}{35} = 11^3/_7.$$

Wie hat sich das vierte Glied der Proportion aus den drei übrigen berechnen lassen? Wir haben das Produkt der innern Glieder durch das andere äussere Glied dividiert.

b) Zweite Lösung: die Breite des kleinen Rahmens ist der 3,5. Teil von der Breite des grossen. Es muss auch die Höhe des kleinen der 3,5. Teil von der Höhe des grossen sein. Somit:

$$x = 40 : 3{,}5 = 11^3/_7.$$

4) Ein anderer Rahmen ist 70 cm hoch und 52 cm breit; wie hoch ist ein ähnlicher Rahmen von 27 cm Höhe?

5) Eine Wandtafel von 1,65 m Länge und 1,24 m Breite soll im Bilde auf eine Breite von 4 cm reduziert werden. Wie gross wird die Länge des Bildes?

$$1{,}65 \text{ m} : 1{,}24 \text{ m} = x \text{ cm} : 4 \text{ cm}.$$

$$1{,}65 : 1{,}24 = x : 4.$$

$$1{,}24 \,.\, x = 1{,}65 \,.\, 4 = 6{,}6.$$

$$x = 6{,}6 : 1{,}24 = 5{,}3 \text{ cm}.$$

Das unbekannte innere Glied der Proportion wurde gefunden, indem man die beiden äussern Glieder multipliziert und das Produkt durch das andere innere Glied dividiert hat.

Stelle auch die 7 Proportionen auf, welche aus 1,65 : 1,24 = x : 4 durch Vertauschung der Glieder hervorgehen, und zeige, dass man aus jeder den gleichen Wert für x erhält.

6) Der Schulzimmerboden (l = 8 m, b = 5,5 m) soll im Bilde auf eine Breite von 4 cm reduziert werden. Wie lang wird das Bild?

---

2) *Grundriss und Aufriss des Schulzimmers samt Mauern.*

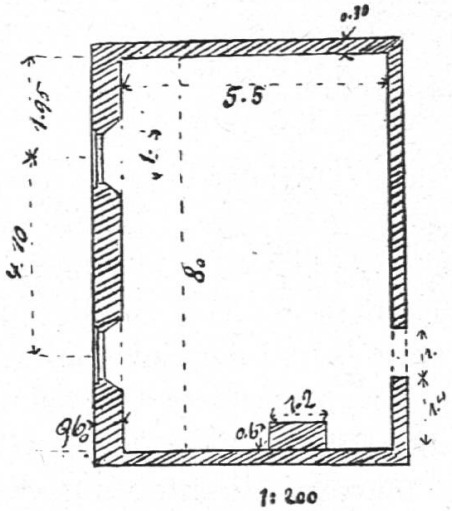
Wir wollen nun dem Grund- und dem Aufriss des Schulzimmers auch den Grund- und den Aufriss der zugehörigen Mauern anschliessen. Wir denken uns die Ebene des Zimmerbodens nach allen Seiten verlängert. Dann schneidet sie aus jeder Mauer ein Rechteck heraus. Um ein solches zu zeichnen, brauchen wir bloss die Mauerdicke zu kennen. Desgleichen denken wir uns eine Wandfläche verlängert; dann schneidet diese Ebene ebenfalls aus jeder Mauer ein Rechteck heraus, dessen Breite die Mauerdicke ist.

Berechne die Erstellungskosten der Mauern à 15 Fr. per m^3; nimm dabei die Fenster auch als Mauern an. (Repitition der Inhaltsberechnung rechtw. Körper.)

3) *Grund- und Aufriss des Schulzimmers samt Mauern, Fenstern und Thüre.*

a) Aus den bisher gezeichneten Plänen könnte der Bauführer nicht entnehmen, wie er die Fenster und die Thüre zu bauen

Fig. 2.

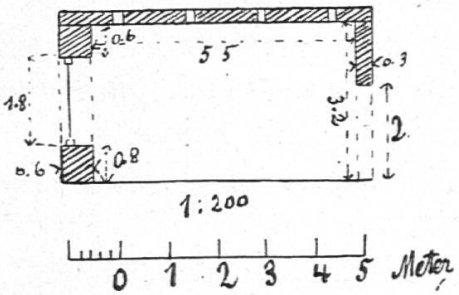


Grundriss. hätte. Um einen brauchbaren Plan zu bekommen, denken wir uns durch das Zimmer einen wagerechten Schnitt etwa 1 m 50 cm über dem Boden geführt und zeichnen die Figur, welche die Ebene herausschneidet. Sie heisst ein vollständiger Grundriss des Zimmers. Nimm die nötigen Dimensionen, und zeichne diesen Grundriss. Es kommen hier die Fenster und die Thüre hinzu. Der Grundriss des Fensters besteht aus einem symmetrischen Trapez und aus zwei kleinen Rechtecken (Fig. 2).

Man wird am vorteilhaftesten zuerst die Symmetrieachse des Trapezes einzeichnen.

Aufriss. b) Was ersehen wir aus dem Grundriss noch nicht? Wir können daraus die Höhe der Fenster und der Thüre nicht entnehmen. Um diese Grössen in der Zeichnung zu erhalten, denken wir uns einen Schnitt durch das Zimmer und die beiden Seitenwände parallel zur Breitenwandfläche und die Mitte des Fensters gelegt. Dieser Schnitt trifft hier auf die Thüre. Zeichne die Schnittfigur; sie heisst ein Aufriss des Zimmers und der beiden Längsmauern samt dem Fenster und der Thüre (Fig. 3).

Fig 3.



Berechnung. Berechne nun genau das ganze Mauerwerk (Rep. der Berechnung des Prismas mit trapezischer Grundfläche), sowie dessen Erstellungskosten.

Berechne auch genau den Anstrich sämtlicher Zimmerflächen.

Benutzung des Massstabes. Einer Grund- oder Aufrisszeichnung wird gewöhnlich noch ein Massstab beigefügt, mit dessen Hülfe man auch diejenigen Dimensionen aus der Zeichnung entnehmen kann, deren Masszahlen nicht angegeben sind. Da wir hier im Massstab 1 : 200 gezeichnet haben, wird $^1/_2$ cm der Zeichnung 1 m wahrer Grösse, 1 mm der Zeichnung 2 dm wahrer Grösse u. s. f. entsprechen. Darum bedeuten die Interwalle 0 bis 1,1 bis 2 je 1 m und die Interwalle des kleinen Massstabes links je 2 dm. Nimm

Strecken der Zeichnung in den Zirkel, und miss sie am Massstab.

Übungen.

Versuche den Grundriss des ganzen Stockwerkes zu zeichnen, auf dem sich das Schulzimmer befindet, jedoch ohne Treppenhaus, desgleichen den Aufriss des rechtwinkligen Teiles des Hauskörpers.

Bestimme zur Übung auf deiner Landkarte Distanzen mit Benutzung des am Fusse der Karte angebrachten Massstabs.

II. Die Parallelprojektion rechtwinkliger Körper.

1) Aus Grund- und Aufriss des Hauses macht ihr euch nur schwer eine Vorstellung desselben. Eine Photographie (von zwei Seiten) gibt uns eine bessere Anschauung. Wir wollen zeigen, wie ein solches Bild zu zeichnen ist.

Zunächst wollen wir ein Bild zeichnen, das nicht ganz wie eine Photographie aussieht, aber leichter zu konstruieren ist und uns auch eine gute Vorstellung des Hauskörpers gibt.

Entstehung des Schattenbildes des Drahtmodells.

2) a) Wir benutzen bei dieser Erklärung ein Karton- und ein Drahtmodell des rechtw. Teiles des Schulhauses. Von diesem Modell erhalten wir ein Bild auf folgende Weise: (Das Modell soll möglichst gross sein) wir halten im Freien das Drahtmodell an ein vertikales Brett, so dass die hintere Seitenfläche ganz aufliegt und lassen es durch die Sonne bescheinen. Das Drahtmodell wirft einen Schatten. Fahre mit einem Bleistift oder mit Kreide den Schatten der einzelnen Drähte nach; entferne dann den Körper, und betrachte das Schattenbild allein von der Sonnenseite aus. Es zeigt uns den Körper genau und zwar um so genauer, je weiter wir uns in der Sonnenrichtung vom Bilde entfernen. Dieses Bild ersetzt den Körper; es vertritt ihn. Wir nennen es eine *Parallelprojektion* des Drahtmodells. Das horizontale Brett heisst die *Projektionsebene;* die Sonnenstrahlen heissen *projizierende Strahlen,* und die Sonne selbst ist das *Projektionscentrum.*

b) Seiner Wichtigkeit wegen wollen wir das Schattenbild näher ansehen und nochmals mit dem Original (Drahtmodell) in Verbindung bringen. Stelle nochmals das Modell auf das

Schattenbild, und zeige, wo sich der Schatten eines jeden Eckpunktes, einer jeden Kante, einer jeden Fläche befindet; markiere durch Stäbe die Richtung der Sonnenstrahlen.

Der Schatten der hinteren Seitenfläche fällt mit dem Original zusammen; der Schatten der vorderen Seitenfläche ist ein ihr kongruentes Rechteck; diese beiden Flächen des Drahtmodells erscheinen im Bilde in wahrer Grösse parallel zu einander verschoben. Die zwei Seitenflächen links und rechts, sowie Grund- und Deckfläche sind im Schattenbilde schiefw. Parallelogramme.

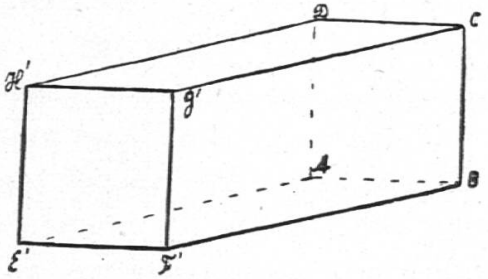
Die Kanten der vordern und hintern Seitenfläche projizieren sich in wahrer Grösse (d. h. erscheinen im Bilde in wahrer Grösse), während die Grund- und Deckkanten, welche senkrecht zum Brett stehen (oder nach hinten gehen) verändert erscheinen. Diese vier Kanten sind im Bilde gleich lang und parallel, nämlich nach der Sonne gerichtet.

Die Winkel der vordern und hintern Seitenfläche projizieren sich in ihrer wahren Grösse; ihre Schenkel laufen parallel zur Projektionsebene; je zwei Winkel von Grund- und Deckfläche und von den Seitenflächen links und rechts projizieren sich als spitze W., zwei als stumpfe Winkel.

Konstruktion des Schattenbildes.

c) Diese *Parallelprojektion* soll nun im verkleinerten Massstabe gezeichnet werden. Wir brauchen bloss die beiden kongruenten Rechtecke im richtigen Abstande voneinander hinzuzeichnen und ihre entsprechenden Eckpunkte zu verbinden.

Fig. 4.



Bezeichnung. Die Punkte A, B, C, D sind Originalpunkte. E', F', G', H' sind Schattenpunkte oder Projektionen der vorderen Modellpunkte E, F, G, H. Das deuten wir durch Striche an.

Auf welcher Seite steht die Sonne?

Fig. 4 stellt uns zunächst das Drahtmodell dar, aber zugleich auch den Hauskörper selbst.

3) Lass den Drahtkörper zu verschiedenen Stunden bescheinen, und beschreibe jedesmal das Schattenbild; es ändert sich mit dem Stand der Sonne.

Verallgemeinerung. Welche Merkmale sind allen Bildern gemeinsam? Die vordere Seitenfläche projiziert sich immer in wahrer Grösse als ein Rechteck, dessen Seiten mit den Seiten der hintern Seitenfläche A B C D parallel laufen. Die übrigen Flächen projizieren sich immer als schiefwinklige Parallelogramme.

Die vier Kanten, welche nach hinten gehen, haben parallele und gleiche Schattenbilder.

Man kann sich jedes dieser Schattenbilder durch parallele Verschiebung der hintern Fläche A B C D entstanden denken. Zeichne das Rechteck A B C D mehrmals nebeneinander, und verschiebe es durch Zeichnung parallel zu sich selbst, jedesmal um eine andere Strecke und unter anderm Winkel. Suche dir das vorteilhafteste Bild heraus.

Von den Schattenbildern irgend eines rechtwinkligen Körpers wird das Gleiche gelten wie von denjenigen des Hauskörpers.

Satz 3. a) Man nennt das Schattenbild eines rechtwinkligen Körpers, der von der Sonne beleuchtet wird, eine Parallelprojektion desselben.

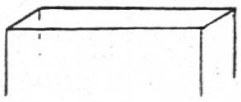
b) Man erhält eine Parallelprojektion eines rechtwinkligen Körpers, indem man eine seiner Flächen hinzeichnet und sie parallel zu sich selbst verschiebt.

Übungen.

1) Zeichne die Parallelprojektion eines dm^3 und eines cm^3, und gib die Richtung der Sonnenstrahlen an. Man erhält ein vorteilhaftes Bild, wenn man für die nach hinten gehenden Kanten die Verkürzung $^1/_3$ und die Winkel der Deckfläche $= 30^0$ und $= 150^0$ wählt.

2) Zeichne einen Tisch in Parallelprojektion. Wir denken uns die Tischbeine verbunden; dann entsteht ein rechtwinkliges Prisma, dessen Bild wir gleich wie den Hauskörper zeichnen können. Wähle für die Kanten A E, B F, C G, D H die Verkürzung $^1/_3$.

Fig. 5.



3) Zeichne noch die Parallelprojektion anderer rechtwinkliger Körper.

III. Die Centralprojektion oder das perspektivische Bild rechtwinkliger Körper.

1) *Wir wollen nun zeigen, wie man ein Bild des Hauskörpers zeichnet, das einem photographischen Bilde entspricht.*

Betrachtung des Schattenbildes.

a) Wir legen das Drahtmodell an die Wandtafel (oder an die Wand) so, dass die hintere Seitenfläche mit ihr zusammenfällt, machen das Zimmer dunkel und beleuchten den Körper durch eine Flamme (z. B. durch eine Gasflamme oder eine Lampe). Dann wirft das Drahtmodell auf die Tafel einen Schatten. Wer sein Auge nach der Flamme verlegt, sieht, dass der Körper und der Schatten sich genau decken. Markiere durch einen Stab die Richtung der Strahlen, welche von der Flamme nach den Eckpunkten gehen. Fahre mit einer Kreide dem Schatten aller Kanten nach, und zeichne so das Schattenbild. Zeichne die Kanten, welche man von der Flamme aus sehen würde, auch wenn der Körper massiv wäre, dick und diejenigen, die man dann nicht sehen könnte, punktiert. Entfernt man nun den Drahtkörper, so ersetzt ihn das Schattenbild für das bei der Flamme befindliche Auge vollständig. Es ist eine Erscheinung, die einen tiefen Eindruck hervorruft, wenn man sieht, wie das ebene Bild sich plötzlich zum Raumgebilde entwickelt. Betrachten wir das Schattenbild von einer anderen Stelle aus, so gibt es uns nicht mehr eine so deutliche Vorstellung des Drahtmodells.

Dieses Schattenbild heisst nun ein *perspektivisches Bild* oder eine *Centralprojektion* des Drahtmodells. Die Tafel heisst Projektionsebene; die Strahlen, welche von der Flamme nach dem Körper gehen, heissen projizierende Strahlen, und die Flamme selbst heisst das Centrum der Projektion.

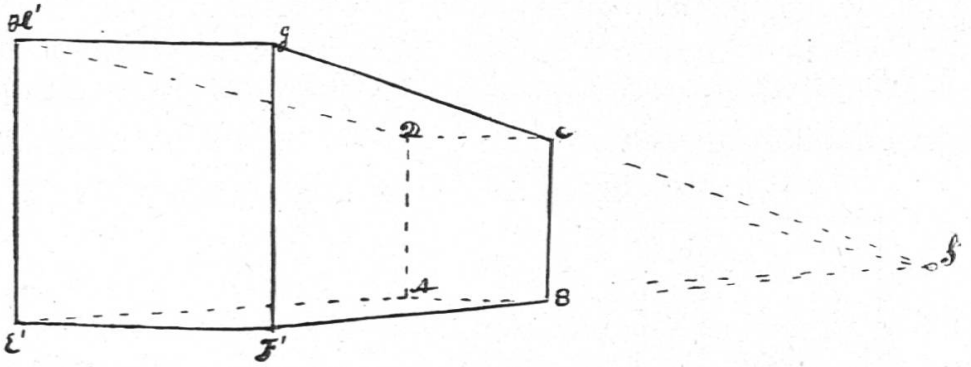
Genaue Beschreibung

b) Lege das Modell wieder auf das Bild, und untersuche wie die einzelnen Flächen, Kanten und Winkel sich projizieren.

Der Schatten der hinteren Seitenfläche A B C D fällt mit dem Original zusammen. Der Schatten der vorderen Seitenfläche E F G H ist ein vergrössertes Rechteck. Zeige durch Messung, dass Grundlinie und Höhe sich in gleichem Verhältnis vergrössert

haben (hier im Verhältnis 4 : 7). Dieses Rechteck E′ F′ G′ H, erscheint zu dem hinteren A B C D parallel verschoben und ist ihm nur ähnlich und nicht kongruent wie bei der Parallelprojektion.

Fig. 6.



Die Schattenbilder der übrigen Flächen sind Trapeze; die nach hinten gehenden Kanten sind im Schatten ungleich und gegeneinander geneigt; ihre Verlängerungen laufen nach einem Punkte hin, welcher der Flamme genau gegenüberliegt. Er ist der Fusspunkt des Perpendikels, das man von der Flamme auf die Tafel fällen kann. Wir wollen diesen Punkt den *Augpunkt* der Zeichnung nennen.

Zeichnung der Schattenbilder.

c) Zeichnet diese Centralprojektion in euerm Heft in verkleinertem Massstab. Man zeichnet zuerst die beiden Rechtecke, indem man ihre Seiten und ihre Abstände in gleichem Verhältnis verkleinert, und verbindet dann die entsprechenden Eckpunkte.

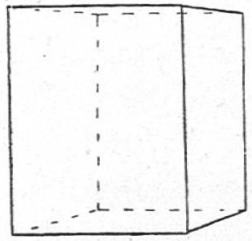
Zweite Stellung.

d) Lege den Körper nun auch an eine andere Stelle der Tafel hin, und lass ihn durch dieselbe Flamme beleuchten, oder verlege statt des Körpers die Flamme. Das Bild ist ein anderes geworden. Wir bekommen ja auch verschiedene Eindrücke vom Hause, wenn wir es von verschiedenen Standpunkten aus betrachten. Zeichne auch dieses Schattenbild, und beschreibe es genau. Konstruiere es, indem du wiederum zuerst das hintere Rechteck zeichnest, dann den Augpunkt S annimmst, die Strahlen S A, S B, S C, S D ziehst, eine der zur Tafel senkrechten Seitenkanten abträgst und das Rechteck E′ F′ G′ H′ parallel zu A B C D zeichnest. Zeichne ferner zuerst das Rechteck A B C D; wähle den Augpunkt, sowie die Länge einer der Seitenkanten A E, B F, C G, D H beliebig, jedoch so, dass ein gefälliges Bild entsteht. Betrachte das Bild mit einem Auge von der Senkrechten zur Tafel im Augpunkte aus; dann erhältst du eine sehr deutliche Vorstellung vom Körper.

2) Zeichnet das Bild eines zweiten rechtwinkligen Körpers.

Verallgemeinerung. Welche Merkmale haben alle diese Centralprojektionen gemeinsam? Sie bestehen aus 2 ähnlichen Rechtecken, deren Seiten paarweise parallel laufen, während sich die Verbindungslinien entsprechender Eckpunkte in einem Punkte treffen, welcher Augpunkt heisst. Man konstruiert ein solches Bild am bequemsten, indem man vom hinteren Rechteck und vom Augpunkte ausgeht.

Fig. 7.



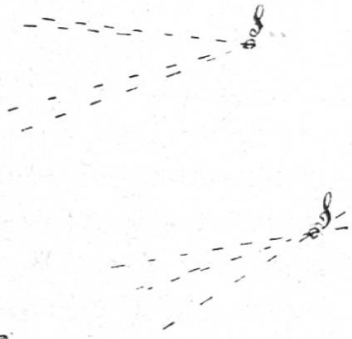
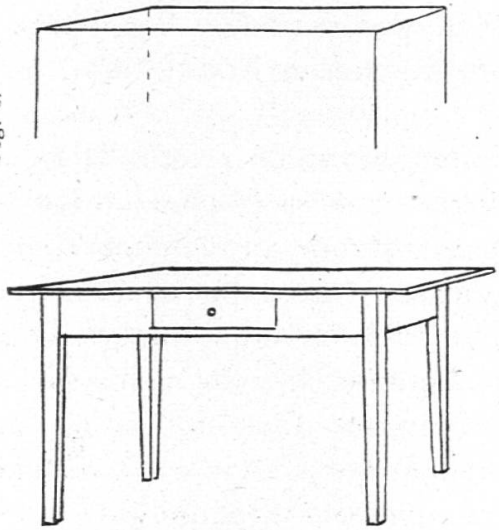


Fig. 8.



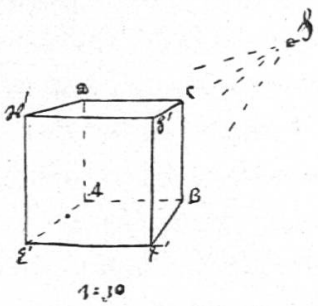


Fig. 9.

Satz 4. a) Man nennt das Schattenbild eines rechtwinkligen Körpers, der von einer in gewisser Entfernung liegenden Flamme beleuchtet wird, eine Centralprojektion desselben.

b) Man erhält eine Centralprojektion irgend eines rechtwinkligen Körpers folgendermassen: man zeichnet eines seiner Rechtecke (A B C D) im verkleinerten Massstabe, wählt den Augpunkt S, zieht die Strahlen von diesem nach A B C D und zeichnet das Rechteck, welches A B C D gegenüberliegt, so, dass seine Seiten zu den entsprechenden Seiten von A B C D parallel laufen.

Übungen.

Zeichne ein perspektivisches Bild des Kastens, des Tisches, des dm^3 und anderer rechtwinkliger Körper.

Gib bei Fig. 9 die Lage der Flamme genau an.

Stellt man in B z. B. eine Würfelkante senkrecht zum Zeichnungsblatt auf, und verbindet man F′ mit dem Endpunkte dieser Kante, so hat man die Richtung nach der Flamme.

IV. Grund- und Aufriss als Schattenbilder.

a) *Wie kann der Grundriss eines Körpers als Schattenbild aufgefasst werden?*

Wir legen unser Drahtmodell auf eine wagerechte Unterlage (Boden, Tisch) und denken uns, die Sonne würde sich vertikal über uns befinden; dann fallen ihre Strahlen vertikal ein, und das Schattenbild fällt mit der Grundfläche des Modells zusammen und stellt den Grundriss des Modells dar. Die wagerechte Unterlage heisst Grundrissebene. Die projizierenden Strahlen sind hier gleich gerichtet und stehen senkrecht zur Projektionsebene. Deshalb nennt man den Grundriss eine senkrechte Projektion. Bei der früher besprochenen Parallelprojektion waren die projizierenden Strahlen gegen die Projektionsebene geneigt, weshalb jene Projektion eine *schräge Parallelprojektion* genannt wird. Grundriss.

b) Aus dem Grundriss allein können wir uns noch keine vollständige Vorstellung vom Modell machen. Darum bringen wir mit dem Grundriss noch ein zweites Bild in Beziehung, das wir auf einer zur Grundrissebene senkrechten Aufrissebene entstehen lassen. Aufriss.

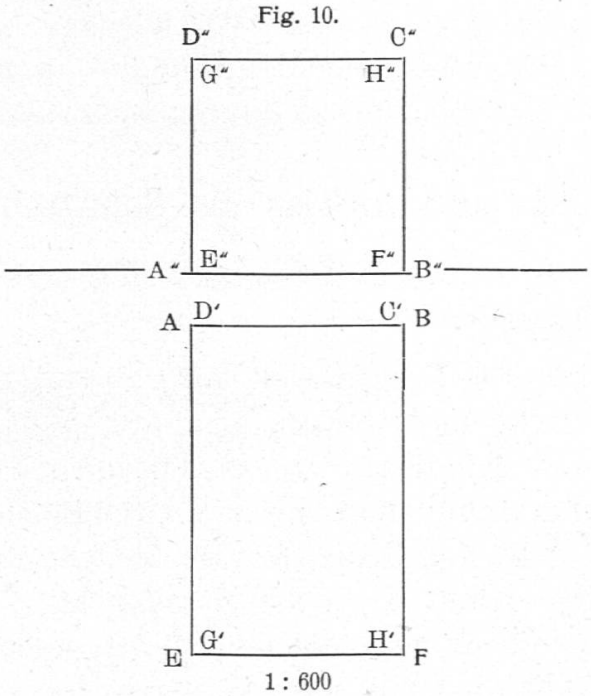
Wir denken uns, es treffen auf den Körper Sonnenstrahlen senkrecht zu dieser Aufrissebene ein. Was für ein Schattenbild entsteht? Ist das Modell so gestellt, dass eine Seitenfläche parallel zur Aufrissebene läuft, so ist das Schattenbild ein Rechteck.

Betrachtung der Projektion von Flächen und Kanten.

c) Wie projiziert sich die Deckfläche, wie die Grundfläche, wie projizieren sich die Seitenflächen, wie die Kanten und Eckpunkte 1) auf die Grundrissebene, 2) auf die Aufrissebene? Welche Flächen und Kanten erscheinen 1) im Grundriss, 2) im Aufriss in wahrer Grösse? Welche Flächen projizieren sich als Linien, welche Kanten als Punkte?

d) Zeichne den Grund- und den Aufriss; entferne dann das Modell, und versuche, es dir mit Hilfe von Grund- und Aufriss vorzustellen.

Fig. 10.



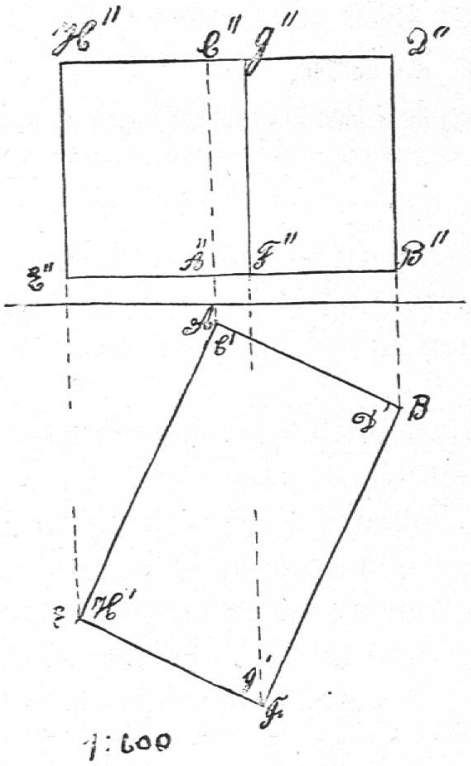
Wir wollen nun die Aufrissebene nicht abtrennen, sondern um die Linie, nach welcher sie die Grundrissebene schneidet, in die Grundrissebene umdrehen. Diese Schnittlinie nennen wir die *Achse*. Wie liegen Grund- und Aufriss eines Eckpunktes hinsichtlich der Achse? G″ (Aufriss von G) liegt senkrecht über G′ (Grundriss von G).

e) Nimm dein Zimmermodell, und zeichne in dein Heft seinen Grund- und seinen Aufriss. Halte dabei zuerst das Heft so, dass eine Heftseite wagerecht, die zweite Heftseite senkrecht zu ihr

ist; stelle das Modell in das Heft hinein, und lege, nachdem du Grundriss und Aufriss gezeichnet hast, die Aufrissebene um. Bezeichne die Eckpunkte mit grossen Buchstaben, und füge dem Grundriss als erster Projektion einen Strich, dem Aufriss als zweiter zwei Striche bei. Beachte wiederum, wie Grund- und Aufriss der einzelnen Eckpunkte bezüglich der Achse liegen. Nenne die Flächen, die 1) im Grundriss, 2) im Aufriss, 3) in wahrer Grösse, 4) als Linien erscheinen, desgleichen die Kanten, die sich 1) in wahrer Grösse, 2) als Punkte projizieren.

f) Zeichne auch Grund- und Aufriss des Drahtmodells und des Kartonmodells des Zimmers, wenn die Grundfläche über der Grundrissebene steht, und auch in der Stellung, da keine Fläche parallel zur Aufrissebene läuft. Wiederhole die früheren Betrachtungen.

Fig. 11.



Verallgemeinerung. Wie haben wir in diesen Fällen den Grundriss und den Aufriss entstehen lassen? Was für einen Grundriss hatten Kanten und Flächen, welche parallel zur Grundrissebene lagen, solche, die zu ihr senkrecht waren? Was für einen Aufriss hatten solche Kanten und Flächen? Welche Kanten und welche Flächen haben sich in wahrer Grösse projiziert? (solche, die parallel zur Projektionsebene liefen). Welche erschienen in der Projektion verkürzt? (solche, die schief zur

Projektionsebene lagen). Wie kamen Grund- und Aufriss desselben Eckpunktes bezüglich der Achse zu liegen?

Satz 5. a) Unter dem Grundriss eines Körpers versteht man sein Schattenbild auf einer wagerechten Ebene (Grundrissebene), wenn die Lichtstrahlen vertikal einfallen.

Unter dem Aufriss eines Körpers versteht man sein Schattenbild auf einer vertikalen Ebene (Aufrissebene), wenn die Lichtstrahlen senkrecht zu ihr einfallen.

Grund- und Aufriss heissen senkrechte Projektionen.

b) Eine Kante projiziert sich dabei in wahrer Grösse, wenn sie parallel zur Projektionsebene läuft; sie erscheint verkürzt, wenn sie gegen die Projektionsebene geneigt ist, und ist im Bilde ein Punkt, wenn sie senkrecht zur Projektionsebene steht. Eine Fläche, welche parallel zu einer der Projektionsebenen läuft, projiziert sich auf diese in wahrer Grösse und erscheint in der andern Projektionsebene, zu der sie senkrecht steht, als Gerade.

Grund- und Aufriss desselben Eckpunktes liegen in einer Senkrechten zur Achse.

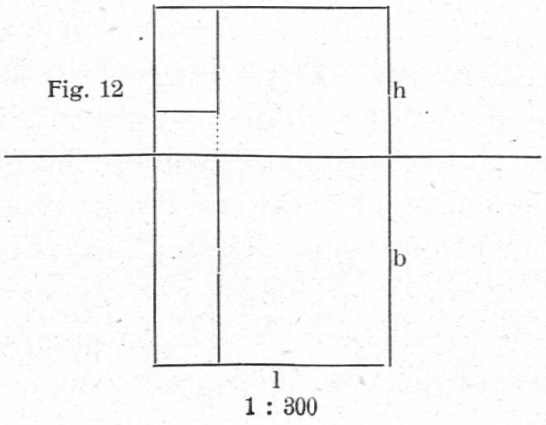
Übungen.

1) Zeichne den Grund- und den Aufriss eines rechteckigen Tisches und Schranks und anderer rechtwinkliger Gegenstände.

2) Zeichne den Grund- und den Aufriss des Treppenhauses der Schule.

3) Löse schwierigere Rechnungsaufgaben über rechtwinklige Körper. Z. B. Aus einem Heustock, der 8 m lang, 7 m breit und 5 m hoch ist, sollen 8 Klafter (à 1,8 m Kante) Heu herausgeschnitten werden, und zwar soll der Schnittt der ganzen Breite nach und in einer Länge von 2 m gemacht werden. Wie hoch wird er? Zeichne den Grund- und den Aufriss des Heustocks, und schraffiere das Stück, das herauszuschneiden ist.

Fig. 12



Bezeichnen wir die Grundfläche dieses Stückes mit G, seine Höhe mit H, so ist:

$$G \cdot H = 8 \text{ Klafter} = 8 \cdot 1{,}8 \cdot 1{,}8 \cdot 1{,}8 \text{ m}^3 = 46{,}656 \text{ m}^3$$

und $G = 7 \cdot 2 \text{ m}^2 = 14 \text{ m}^2$.

Somit $H = 46{,}656 : 14 = 3{,}33$ m.

B. Darstellung des dreiseitigen senkrechten Prismas.

1) *Zeichne den Grund- und den Aufriss eines Pultdachs.* Grund- und Aufriss.

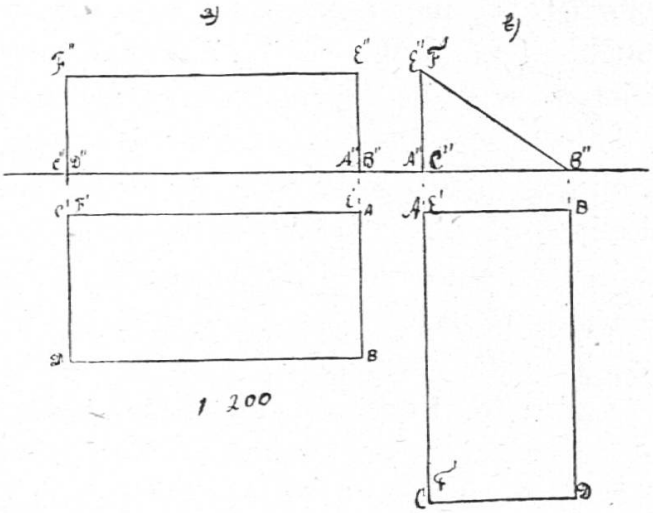
a) Wähle die Aufrissebene parallel zur rechteckigen Wandfläche.

b) Wähle die Aufrissebene parallel zu einer Giebelfläche.

c) Denke dir das Dach auf eine Giebelfläche gelegt.

Benütze zur Veranschaulichung das im I. Kurs konstruierte Modell.

Fig. 13



Repetiere die Merkmale und die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks und des senkrechten dreiseitigen Prismas, dessen Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck ist.

Ergänze in Fig. b) den Aufriss zu dem Aufriss des rechtwinkligen Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe.

Repetiere auch das Messen der Winkel und die Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks aus gegebenen Stücken.