

Beweis der Sätze über die Konstruktion und die Eigenschaften des Parallelogramms

Autor(en): **Pünchera, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Jahresbericht des Bündnerischen Lehrervereins**

Band (Jahr): **17 (1899)**

Heft: **Der Geometrie-Unterricht in der I. und II. Klasse der Kantonsschule und in Realschulen**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-145636>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

3) Berechne die Kosten für den Aushub eines Grabens von folgenden Ausdehnungen: seine Breite beträgt durchwegs 80 cm; seine Länge misst 200 m. Zu unterst ist er 1,5 m tief; seine Tiefe beträgt Ende des 10. Längenmeter 1,2 m, Ende des 35. 1,4 m, Ende des 60. 1,80 m, Ende des 75. 1,5 m; er behält diese Tiefe bei bis Ende des 160. Meter; Ende des 185. Meter ist die Tiefe 1,7 m und Ende des 200. 1,5 m. Man zahlt 90 Rp. pro m^3 . Zeichne Grund- und Aufriss des Grabens.

4) Eine Wuhrmauer von 2,3 m Dicke und 56 m Länge ist zu unterst 1,3 m hoch, beim 20. Längenmeter 1,6 m hoch; beim 45. Meter ist die Höhe 1,8 m und zuletzt 1,4 m. Berechne die Erstellungskosten à 10 Fr. pro m^3 . Zeichne den Grund- und den Aufriss.

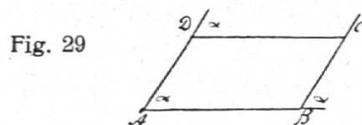
D. Beweis der Sätze über die Konstruktion und die Eigenschaften des Parallelogramms.

I. Die Winkel an einer Transversalen zwischen zwei Parallelen.

1) *Wir wollen die Konstruktion und die Eigenschaften der behandelten Parallelogramme genauer besprechen.*

Konstruktion der Parallelogramme.

Wie haben wir früher das Geländer A B C D herausgezeichnet? Wir haben zuerst den Winkel $B A D = \alpha$ gezeichnet, auf seinen Schenkeln die Seiten A B und A D abgetragen und alsdann den Winkel α auch bei B und bei D konstruiert.



Beweise, dass so D C parallel zu A B und B C parallel zu A D wird.

*) Dieses Kapitel ist nur für Schüler berechnet, die später beweisenden Geometrieunterricht erhalten.

Würden sich AB und DC verlängert, z. B. rechts, schneiden, so würden sie mit AD ein Dreieck bilden. Die der Dreiecksseite AD anliegenden Winkel BAD und ADC würden dann zusammen 180° betragen; denn Winkel ADC ist der Nebenwinkel eines Winkels, der gleich α gemacht wurde. Da die Winkelsumme eines Dreiecks aber nur 180° beträgt, muss der dritte Winkel $= 0$ sein, d. h. AB und DC haben keinen Richtungsunterschied oder sind parallel.

Beweise auf gleiche Art, dass $AD \parallel BC$ (\parallel bedeutet parallel).

Übung.

Konstruktionsaufgabe: gegeben eine Gerade (g) und ein Punkt (P) ausserhalb derselben. Konstruiere durch den Punkt eine Parallele zu dieser Geraden.

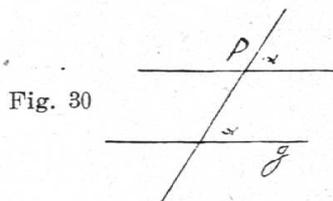


Fig. 30

Wir ziehen durch den Punkt P eine beliebige, die Gerade g schneidende Linie, die wir *Transversale* nennen wollen, und tragen den Winkel, den sie mit g bildet, bei P ab.

Wie haben wir im 1. Kurs diese Aufgabe gelöst?

Diese Konstruktion lässt sich bequem mit Hilfe eines Dreiecks und eines Lineals ausführen.

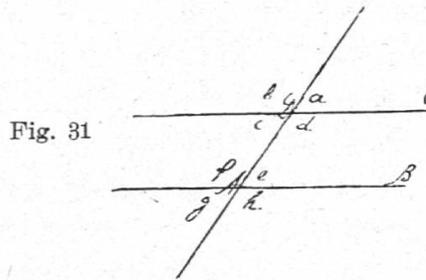
Wir legen das Dreieck an die Gerade g , setzen das Lineal an eine zweite Seite des Dreiecks an und verschieben letzteres längs des Lineals, bis die Dreiecksseite, die an g gelegt wurde, durch P geht. Dann ist sie ihrer früheren Lage parallel; denn sie bildet mit dem Lineal (der Transversalen) denselben Winkel (Dreieckswinkel).

2) Nun wollen wir auch die übrigen Winkel ins Auge fassen, welche zwei der parallelen Geraden der Fig. 29 mit der sie durchschneidenden Linie (der Transversalen) bilden.

Wie viele Winkel bildet die Transversale AD Fig. 31 mit AB und DC ?

Wir wollen diese 8 Winkel mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen. Man nennt die Winkel a, b, g und h *äussere*, Innere und äussere Winkel.

und die Winkel c, d, e und f *innere* Winkel und teilt sie folgendermassen in Paare ein.



Korrespondierende Winkel.

a) W. a und e, b und f, c und g, d und h heissen *korrespondierende (entsprechende) Winkelpaare*. Sie liegen jeweils auf gleicher Seite der Transversalen $A D$; der eine ist ein äusserer, der andere ein innerer Winkel.

Wir haben $W. a = e (= 57^\circ)$ gemacht; was folgt daraus für die andern Paare?

In welche Lage kommen je zwei korrespondierende Winkel, wenn man $A B$ parallel zu sich selbst verschiebt, bis A auf D fällt?

Wechselwinkel.

b) W. c und e, d und f, a und g, b und h heissen Paare von *Wechselwinkeln**). Zwei Wechselwinkel liegen auf verschiedener Seite der Transversalen und sind entweder beides innere oder beides äussere Winkel.

Was folgt aus der Gleichheit der $W. a$ und e für die Wechselwinkel? In welche Lage kommen je zwei Wechselwinkel durch die vorhin genannte parallele Verschiebung? (Sie werden Scheitelwinkel.

Ergänzungswinkel.

c) W. c und f, d und e, a und h, b und g heissen Paare von *Ergänzungswinkeln* (auch Anwinkel). Zwei Ergänzungswinkel liegen auf der gleichen Seite der Transversalen und sind entweder beides innere oder beides äussere Winkel.

Aus $W. a = e$ folgt: $W. d + W. e = 180^\circ$, weil d der Nebenwinkel von a ist.

Ebenso: $e + f = a + h = b + g = 180^\circ$.

In welche Lage kommen je zwei Ergänzungswinkel durch die genannte parallele Verschiebung? (Sie werden Nebenwinkel.)

d) Führe noch ein zweites Beispiel durch. Es ergibt sich:

Satz 12. Werden zwei Gerade $A B$ und $D C$ von einer Transversalen so geschnitten, dass zwei korrespondierende Winkel (a und e) gleich sind, so sind auch

*) Die äusseren Wechsel- und Ergänzungswinkel kommen selten in Betracht.

die übrigen korrespondierenden Winkel und je zwei Wechselwinkel gleich; je zwei Ergänzungswinkel betragen zusammen 180° , und die beiden Geraden $A B$ und $D C$ sind parallel.

Mache 2 Wechselwinkel gleich. Was folgt daraus für die andern Winkelpaare, für die gegenseitige Lage der geschnittenen Geraden?

Zeichne die 3 Geraden auch so, dass zwei Ergänzungswinkel zusammen 180° betragen, und ziehe die Folgerungen.

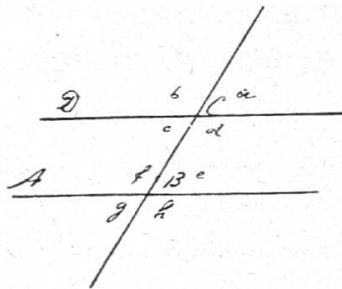
3) Umkehrung.

a) Beim Parallelogramm $A B C D$ (Fig. 29) werden die beiden Parallelen $A B$ und $D C$ auch durch eine zweite Transversale $B C$ geschnitten.

Erstes
Beispiel.

Wie sind die Winkel an dieser Transversalen? Wir lassen die Seite $A D$ weg. (Fig. 32.)

Fig. 32.



Voraussetzung: $A B \parallel D C$.

Behauptung: $W. a = W. e$.

Beweis: wir denken uns $W. e$ bei C an $B C$ abgetragen; dadurch erhalten wir in C (nach Satz 12) eine Parallele zu $A B$. Würde sie nicht mit $D C$ zusammenfallen, d. h. wäre $W. e$ nicht gleich $W. a$, so gäbe es zu $A B$ durch C zwei parallele Linien, was unmöglich ist. Es muss also $W. a = W. e$ sein; ebenso $W. e = W. c$ u. s. f.

Je zwei korrespondierende und je zwei Wechselwinkel von $B C$ sind einander gleich; je zwei Ergänzungswinkel betragen zusammen 180° .

b) Die Zeilen der linierten Hefte sind parallel. Ziehe eine beliebige Transversale, und beweise, dass die korrespondierenden Winkel und die Wechselwinkel an derselben gleich sind, und dass je zwei Ergänzungswinkel 180° betragen.

Zweites
Beispiel.

Satz 13. Werden zwei parallele Linien durch eine beliebige Transversale geschnitten, so sind je zwei korrespondierende Winkel und je zwei Wechselwinkel einander gleich, und je zwei Ergänzungswinkel betragen zusammen 180° .

Übung.

Übet euch an Parallelogrammen und Trapezen in der Unterscheidung der Winkel an einer Transversalen zwischen zwei Parallelen.

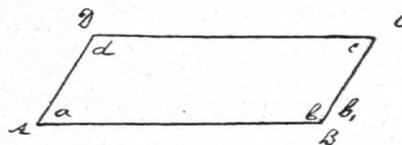
Konstruiert mehrere Trapeze und Parallelogramme nur mit Benutzung des Lineals und des „Dreiecks“.

II. Beziehung zwischen den Winkeln des Parallelogramms.

Wir können mit Hilfe der Sätze 12 und 13 mehrere Eigenschaften und Konstruktionen des Parallelogramms beweisen.

Welchen Zusammenhang zwischen den Winkeln hatten wir früher durch Messung gefunden? *Beweise ihn.*

Fig. 33.



Es sei $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$, $ABCD$ also ein Parallelogramm. $W. a = W. b_1$ als korrespondierende Winkel an der Transversalen AB zwischen den Parallelen AD und BC . $W. c = W. b$ als Wechselwinkel an der Transversalen BC zwischen den Parallelen AB und DC , folglich: $W. a = W. c$.

Beweise, dass auch $W. b = W. d$.

Ferner ist:

$W. a + W. b = 180^\circ$ als Ergänzungswinkel an der Transversalen AB zwischen AD und BC

$W. d + W. c = 180^\circ$ als Ergänzungswinkel an der Transversalen DC zwischen AD und BC .

$$W. a + W. b + W. c + W. d = 360^\circ.$$

Satz 14. Je zwei Gegenwinkel des Parallelogramms sind einander gleich; je zwei an derselben Seite liegende Winkel sind Supplementswinkel.

III. Beziehung zwischen den Seiten des Parallelogramms.

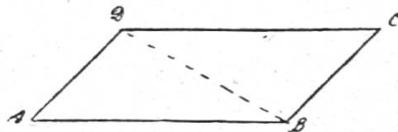
Durch Messung haben wir gefunden, dass bei Parallelogrammen die Gegenseiten gleich sind. *Begründe dies.*

Voraussetzung: $A B \parallel D C$, und $A D \parallel B C$.

Behauptung: $A B = D C$, und $A D = B C$.

Beweis: wir ziehen die Diagonale $B D$.

Fig. 34.



Sie teilt das Parallelogramm $A B C D$ in die 2 Dreiecke $A D B$ und $B C D$, deren Kongruenz wir beweisen können: $B D$ haben sie gemeinsam; $\sphericalangle A B D = \sphericalangle B D C$ als Wechselw. an der Transversalen $B D$ zwischen den Parallelen $A B$ und $D C$; $\sphericalangle A D B = \sphericalangle D B C$ als Wechselw. an der Transversalen $B D$ zwischen den Parallelen $A D$ und $B C$.

Die beiden Dreiecke stimmen also überein in einer Seite und den zwei an ihr liegenden Winkeln; sie sind also kongruent (III. Kongr.-Satz). Schneide das Dreieck $B C D$ aus; drehe es, und lege es mit $D B$ an $B D$; dann fällt $D C$ auf $A B$, $B C$ auf $A D$; folglich ist $A B = D C$ und $B C = A D$.

Beachte noch, dass je 2 Seiten der beiden Dreiecke zur Deckung kommen, welche den gleichen Winkeln gegenüber liegen.

Beweise die Gleichheit der Gegenseiten auch mit Benutzung der 2. Diagonale.

Satz 15. Sind in einem Viereck zwei Gegenseiten parallel, so sind sie auch einander gleich.

Zeichne noch ein Parallelogramm mit Lineal und Dreieck, und wiederhole den Beweis.

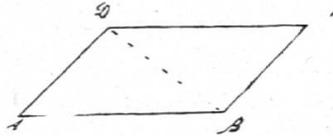
IV. Zweite Konstruktion des Parallelogramms.

Wir haben früher das Geländerparallelogramm $A B C D$ auch konstruiert, indem wir zuerst das Dreieck $A B D$ zeichneten und dann mit Benutzung des Zirkels $D C = A B$ und $B C =$

A D machten; indem wir also die Gegenseiten des Vierecks A B C D gleich machten.

Beweise, dass in diesem Viereck die Gegenseiten auch parallel sind, dass das Viereck ein Parallelogramm ist.

Fig. 35.



Voraussetzung: $AB = DC$; $AD = BC$.

Behauptung: $AB \parallel DC$; $AD \parallel BC$.

Beweis: $ABD \cong CDB$, da sie alle Seiten paarweise gleich haben (I. Kongr.-Satz).

Würden wir CBD ausschneiden und so drehen, dass seine Seiten auf die gleichen Seiten von ADB fallen, so müssten sich $W. DBC$ und $W. ADB$, ferner $W. BDC$ und $W. ABD$ decken.

Weil $W. DBC = W. ADB$, ist $AD \parallel BC$.

Weil $W. BDC \parallel W. ABD$, ist $AB \parallel DC$.

Welche Eigenschaft haben laut Konstruktion das eben gezeichnete Parallelogramm, sowie die früher auf gleiche Weise konstruierten Parallelogramme? Welche weitere Eigenschaft haben wir bewiesen?

Satz 16. Sind in einem Vierecke je zwei Gegenseiten gleich, so sind sie auch parallel; das Viereck ist ein Parallelogramm.

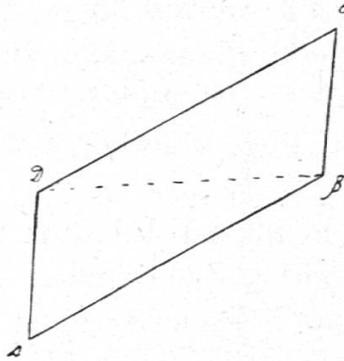
Zeichne noch ein Viereck mit gleichen Gegenseiten, und beweise, dass es ein Parallelogramm ist.

V. Dritte Konstruktion des Parallelogramms.

Wir wollen zeigen, wie man in einem linierten Heft am einfachsten ein Parallelogramm zeichnet.

Denken wir an die Konstruktion des einfachsten Treppengeländers. Man nimmt zwei gleich lange Pfosten, stellt sie vertikal und verbindet ihre Endpunkte durch Eisen- oder Holzstangen. Man hat also 2 Seiten des Vierecks gleich lang und parallel gemacht. Wir haben durch Messung gesehen, dass auch das andere Seitenpaar gleich und parallel geworden ist. Beweise dies.

Fig. 36.



Voraussetzung: $A D$ gleich und parallel $B C$.

Behauptung: $A B$ gleich und parallel $D C$.

Beweis: $A B D \cong B D C$; denn $B D$ ist gemeinsam; $A D = B C$, und $\angle A D B = \angle D B C$ als Wechselwinkel.

Folglich ist 1) $A B = D C$, und $\angle A B D = \angle C D B$, und deshalb 2) $A B \parallel D C$.

Trage in deinem linierten Heft auf zwei Zeilen die gleiche Strecke ab; verbinde die Endpunkte der beiden Strecken, und beweise, dass das entstehende Viereck ein Parallelogramm ist.

Welche Eigenschaft haben diese beiden Vierecke laut Konstruktion, und welche Eigenschaft lässt sich beweisen?

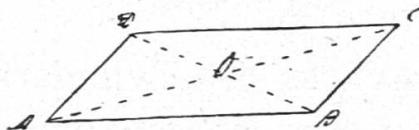
Satz 17. Sind in einem Vierecke zwei Gegenseiten gleich und parallel, so sind es auch die zwei andern Gegenseiten.

VI. Die Diagonalen des Parallelogramms.

Wir haben gesehen, dass jede Diagonale das Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke teilt.

Wie wird das Parallelogramm zerlegt, wenn man beide Diagonalen zieht?

Fig. 37.



$\triangle A B O \cong C D O$, denn: $A B = D C$, $\angle B A O = \angle D C O$, $\angle A B O = \angle C D O$.

$\triangle C D O$ kann also durch Drehung mit $\triangle A B O$ zur Deckung gebracht werden; daraus folgt, dass $A O = O C$, und $B O = O D$ ist, d. h. jede Diagonale halbiert die andere.

Beweise auch, dass $\triangle A D O \cong \triangle C B O$.

Je zwei einander gegenüberliegende Dreiecke sind kongruent.

Wie verhält es sich mit den Inhalten von zwei anstossenden Dreiecken? $\triangle D O C$ und $\triangle B O C$ haben gleiche Grundlinie, da $O D = O B$ ist, und auch gleiche Höhe, nämlich das Perpendikel von C auf die Verlängerung der Diagonale $D B$; sie haben daher gleichen Inhalt. Es sind also die 4 Dreiecke, in welche das Parallelogramm $A B C D$ durch die beiden Diagonalen zerlegt wird, inhaltsgleich.

Wiederhole diese Ausführungen bei einem zweiten Parallelogramm.

Satz 18. Bei einem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen gegenseitig und zerlegen es in 4 inhaltsgleiche Dreiecke, wovon je zwei einander gegenüberliegende kongruent sind.

Der Schnittpunkt O der Diagonalen heisst *Mittelpunkt* des Parallelogramms. Denken wir uns O als Spiegel, so ist C das Spiegelbild von A , D das Spiegelbild von B , $D C$ das Spiegelbild von $A B$, und $B C$ das Spiegelbild von $A D$. Gib das Spiegelbild eines anderen Punktes des Umfangs an; es liegt auf dem Strahl durch O da, wo dieser die Gegenseite schneidet.

Beweise folgende Sätze:

Die Diagonalen des Rechtecks sind einander gleich.

„ „ „ Rhombus schneiden sich rechtwinklig.

„ „ „ Quadrats sind einander gleich und schneiden sich rechtwinklig.

E. Darstellung und Berechnung des Cylinders.

I. Grund- und Aufriss des Cylinders. Ergänzung zur Kreisberechnung.

a) *Zeichnet den Grund- und den Aufriss des Cylinderkörpers, den ihr früher aus Karton konstruiert habt. Wählt die einfachste Lage.*