Darstellung und Berechnung des Cylinders

Autor(en): **Pünchera, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Jahresbericht des Bündnerischen Lehrervereins**

Band (Jahr): **17 (1899)**

Heft: **Der Geometrie-Unterricht in der I. und II. Klasse der Kantonsschule und in Realschulen**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-145637

$\triangle$ C D O kann also durch Drehung mit $\triangle$ A B O zur Deckung gebracht werden; daraus folgt, dass $AO = OC$, und $BO = OD$ ist, d. h. jede Diagonale halbiert die andere.

Beweise auch, dass $\triangle$ A D O $\cong$ C B O.

Je zwei einander gegenüberliegende Dreiecke sind kongruent.

Wie verhält es sich mit den Inhalten von zwei anstossenden Dreiecken? $\triangle$ D O C und $\triangle$ B O C haben gleiche Grundlinie, da O D = O B ist, und auch gleiche Höhe, nämlich das Perpendikel von C auf die Verlängerung der Diagonale D B; sie haben daher gleichen Inhalt. Es sind also die 4 Dreiecke, in welche das Parallelogramm A B C D durch die beiden Diagonalen zerlegt wird, inhaltsgleich.

Wiederhole diese Ausführungen bei einem zweiten Parallelogramm.

Satz 18. Bei einem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen gegenseitig und zerlegen es in 4 inhaltsgleiche Dreiecke, wovon je zwei einander gegenüberliegende kongruent sind.

Der Schnittpunkt O der Diagonalen heisst *Mittelpunkt* des Parallelogramms. Denken wir uns O als Spiegel, so ist C das Spiegelbild von A, D das Spiegelbild von B, D C das Spiegelbild von A B, und B C das Spiegelbild von A D. Gib das Spiegelbild eines anderen Punktes des Umfangs an; es liegt auf dem Strahl durch O da, wo dieser die Gegenseite schneidet.

Beweise folgende Sätze:

Die Diagonalen des Rechtecks sind einander gleich.

„ „ „ Rhombus schneiden sich rechtwinklig.

„ „ „ Quadrats sind einander gleich und schneiden sich rechtwinklig.

E. Darstellung und Berechnung des Cylinders.

I. Grund- und Aufriss des Cylinders. Ergänzung zur Kreisberechnung.

a) *Zeichnet den Grund- und den Aufriss des Cylinderkörpers, den ihr früher aus Karton konstruiert habt. Wählt die einfachste Lage.*

Grund- und Aufriss des Cylinders.

Stellt man den Cylinder mit seiner Grundfläche auf die Grundrissebene, so ist der Grundriss ein Kreis (seine Grundfläche), und der Aufriss ein Rechteck. (Repetiere die Konstruktion und die Berechnung des Cylinders.)

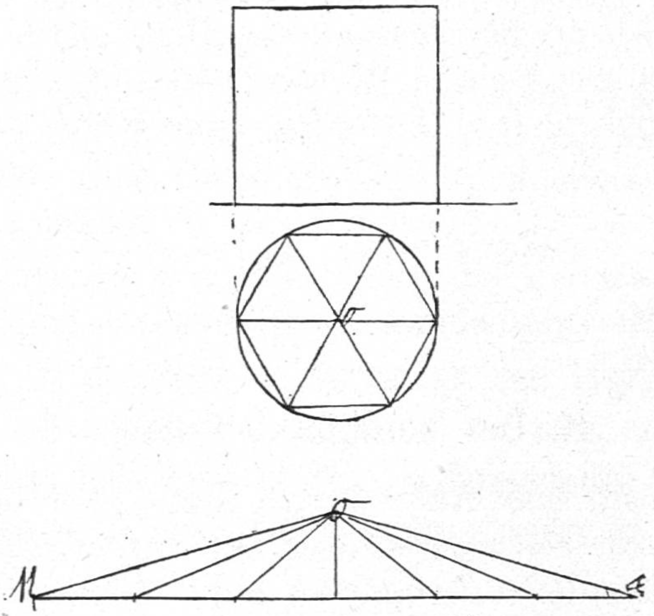


Fig. 38 (a u. b).

Berechnung des Sechsecks.

b) Wir wollen auf die Inhaltsberechnung des Kreises nochmals eintreten und gehen wiederum vom eingeschriebenen regelmässigen Sechseck aus. Beweise nun auf geometrischem Wege, dass das Sechseck inhaltsgleich einem Dreiecke M N O ist, dessen Grundlinie M N gleich dem Umfang des Sechsecks, dessen Höhe gleich der Höhe eines seiner Dreiecke ist. Verbinden wir die Teilpunkte auf M N, worauf der Radius (die Sechseckseite) 6 mal abgetragen wurde, mit O, so entstehen 6 Dreiecke, die mit den Dreiecken des Sechsecks inhaltsgleich sind, weil sie in Grundlinie und Höhe übereinstimmen; folglich ist das Dreieck M N O dem Sechseck inhaltsgleich.

Führe dieselbe Betrachtung auch für das eingeschriebene Zwölfeck durch.

Berechnung des Kreises.

Übergang zum Kreis: wir denken uns nun die Kreislinie in unzählig viele gleiche Teile eingeteilt und die Teilpunkte mit dem Mittelpunkt verbunden; dann erscheint der Kreis als Summe von Dreiecken, die alle als Höhe den Radius haben, und deren Grundlinien zusammen die Peripherie bilden.

Die Peripherie denken wir uns nun auf einer Geraden abgewickelt, den Radius etwa im Mittelpunkte senkrecht zur Geraden abgetragen und seinen Endpunkt mit den Teilpunkten der abgewickelten Peripherie verbunden. Es entsteht dann ein Dreieck, das aus kleinen Dreiecken zusammengesetzt ist, die mit den Kreisdreiecken inhaltsgleich sind, weil sie in Grundlinie und Höhe übereinstimmen. So gelangen wir wieder zum frühern Ergebnis: der Kreis ist inhaltsgleich einem Dreiecke, dessen Grundlinie gleich der Peripherie, dessen Höhe gleich dem Kreisradius ist, oder gleich einem Rechteck, dessen Grundlinie gleich der halben Peripherie ($r\,\pi$), dessen Höhe gleich dem Radius (r) ist.

$$\text{Inhalt des Kreises } f = r\,.\,r\,.\,\pi = r^2\pi,$$

$$\text{oder } f = \left(\frac{d}{2}\right)\,.\,\left(\frac{d}{2}\right).\,\pi = \frac{d^2\,.\,\pi}{4}$$

Zeichne das Dreieck und das Rechteck genau.

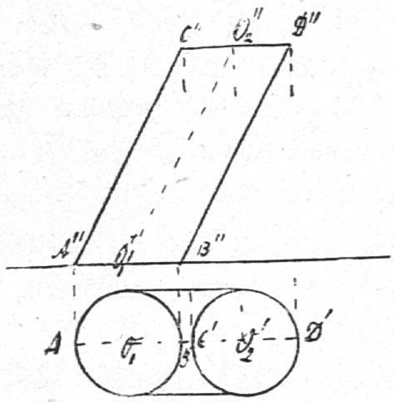
II. Der schiefe Cylinder.

a) *Betrachte eine Röhre, deren Achse (Verbindungslinie der Mittelpunkte von Grund- und Deckfläche) schief zu den zu einander parallelen Endflächen steht. Zeichne den Grund- und den Aufriss.*

Darstellung des schiefen Cylinders.

Der Durchmesser der Röhre betrage 50 cm, ihre Höhe (d. i. der senkrechte Abstand zwischen Grund- und Deckfläche) 1,10 m; die Deckfläche sei gegen die Grundfläche um 60 cm parallel verschoben.

Fig. 39.



Grund- und Aufriss sind in Fig. 39 dargestellt.

Man nennt diese Röhre einen *schiefen* Cylinder, weil die Achse ($O_1\,O_2$) schief zur Grundfläche steht. Die bisher behandelten Cylinder heissen *gerade* oder *senkrechte* Cylinder, weil bei ihnen die Achse senkrecht zur Grundfläche steht.

b) Wie berechnet man den Rauminhalt dieses schiefen Cylinders? Denkt man sich ihn parallel zur Grundfläche in dünne Platten eingeteilt und diese parallel verschoben, bis sie senkrecht über der Grundfläche stehen, so geht der schiefe Cylinder in einen inhaltsgleichen geraden Cylinder von gleicher Grundfläche und Höhe über. Der Inhalt des schiefen Cylinders wird somit $= G \,.\, H = 2{,}5^2 \,.\, 3{,}14 \,.\, 11\ dm^3 = 215{,}87\ dm^3$ sein. Inhalt des schiefen Cylinders.

(Weise einen geraden und einen schiefen Blechcylinder von gleicher Grundfläche und Höhe vor, falls die Modellsammlung solche besitzt; fülle sie mit Wasser, und weise nach, dass sie gleich viel halten.)

Verallgemeinerung. Vergleiche die Merkmale und die Inhaltsberechnung der behandelten geraden und schiefen Cylinder.

Satz 19. a) Ein Cylinder ist begrenzt von zwei kongruenten Kreisen, die parallel liegen, als Grund- und Deckfläche und von einem runden Mantel. Der Abstand der beiden Kreise heisst die Höhe, die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte die Achse des Cylinders. Der Inhalt eines Cylinders ist gleich Grundfläche mal Höhe.

b) Steht die Achse senkrecht zur Grundfläche, so heisst der Cylinder ein gerader, sonst ein schiefer.

III. Der Hohlcylinder und der Kreisring.

1) *Zeichne den Grund- und den Aufriss eines cylindrischen Wasserbehälters von 4 m innerm Durchmesser, 50 cm Wanddicke und 3 m Höhe. Berechne das Volumen der Wandmauer (aus Cement) und deren Erstellungskosten à 25 Fr. pro m^3, sowie das Quantum Wasser, das der Behälter fasst.*

Berechne auch die Kosten für das Ausgraben und Wegführen der Erde à $2^1/_2$ Fr. pro m^3.

a) Die Grundfläche der Wandmauer ist begrenzt von zwei konzentrischen Kreisen und heisst *Kreisring.* Die Breite des Ringes ist der Unterschied zwischen dem grossen und kleinen Radius. Der Kreisring.

Kreisring = grosser Kreis — kleiner Kreis.

Flächeninhalt des grossen Kreises $= R^2\pi = 2{,}5^2 \,.\, \pi\ m^2 = 6{,}25 \,.\, \pi\ m^2$

„ „ kleinen Kreises $= r\ \pi = 2^2 \,.\, \pi\ m = 4 \,.\, \pi\ m^2$

Kreisring $= R^2\pi - r^2\pi = (6{,}25 \,.\, \pi - 4 \,.\, \pi)\ m^2 = 2{,}25 \,.\, \pi\ m^2$

$= 2{,}25 \,.\, 3{,}1416\ m^2 = 7{,}068\ m^2.$

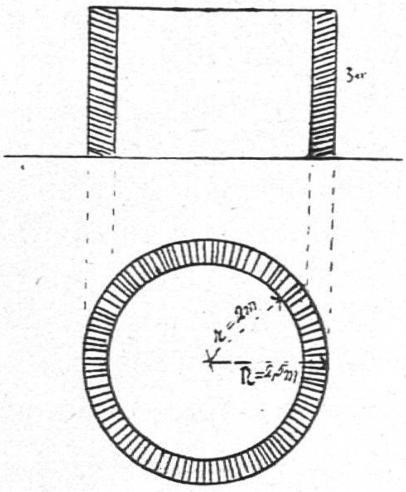


Fig. 40

1:200

Berechnung der Wandmauer.

b) Diesen Körper nennt man einen *Hohlcylinder*. Sein Volumen werden wir erhalten, indem wir vom Inhalt des Cylinders mit Radius R den Inhalt des Cylinders mit Radius r abziehen, oder kürzer, indem wir die Masszahl des Kreisringes mit derjenigen der Höhe multiplizieren; denn grosser Kreis $\times$ Höhe — kleiner Kreis $\times$ Höhe $=$ (grosser Kr. — kl. Kr.) $\times$ Höhe $=$ Kreisring $\times$ Höhe.

Bestätige dies durch die Ausrechnung.

Somit: Volumen der Mauer $=$ Grundfläche $\times$ Höhe

$= 7{,}068 \cdot 3\,m^3 = 21{,}204\,m^3$ u. s. f.

2) Führe dieselbe Berechnung durch für ein Wasserreservoir von 4,6 m äusserem Durchmesser, 70 cm Wanddicke und 2,7 m Höhe.

3) Ein Mühlenrad hat einen äussern Durchmesser von 1,2 m und einen innern von 50 cm, ferner eine Dicke von 40 cm. Zeichne den Grund- und den Aufriss des Rades, und berechne sein Gewicht, wenn sein spezifisches Gewicht 2,8 beträgt.

4) Betrachte ein Wagenrad, und zeichne es.

5) Zu einer Hydrantenleitung brauchte man Steingutröhren von 15 cm Lichtweite (d. h. innerm Durchmesser) und 2 cm Wanddicke. Man zahlt 4,6 Fr. den laufenden Meter. Berechne den Preis von 1 m^3 Steingut.

6) Ein Blecheimer ist 60 cm hoch, hat einen äussern Durchmesser von 24 cm und eine Wanddicke von 2 mm. Wie viele cm^3 Blech enthält der Eimer?

IV. Parallelprojektion des Cylinders. Die Ellipse.

1) *Wir wollen zeigen, wie man eine Parallelprojektion der Cylinderkörper, die wir behandelt haben, zeichnet.*

a) Zu diesem Zwecke benutzen wir zunächst einen Drahtcylinder, stellen ihn vor eine vertikale Fläche (ein Brett), welche von der Sonne direkt von vorn beschienen wird, und betrachten das Schattenbild des Cylinders. Grund- und Deckfläche erscheinen im Schatten als Ovale, die man *Ellipsen* nennt; die Mantelfläche projiziert sich als Rechteck, wenn der Cylinder senkrecht gestellt wird. Die zur Bildfläche senkrechten Sehnen erscheinen im Schatten alle im gleichen Verhältnisse verändert, verkürzt oder verlängert, je nachdem die Sonnenhöhe kleiner oder grösser als 45° ist.

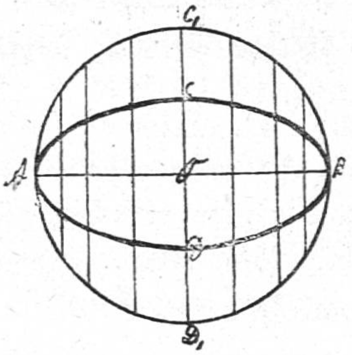
Das Schattenbild des Drahtcylinders.

b) Nimm auch einen Halbkreis (z. B. einen Holztransporteur); halte ihn wagerecht mit dem Durchmesser an das vertikale Brett, und betrachte sein Schattenbild. Markiere mit Stäbchen die zum Durchmesser senkrechten Halbsehnen, und vergleiche ihre Schatten mit den Originalen. Es zeigt sich wieder, dass alle im gleichen Verhältnisse verändert erscheinen. Ist z. B. der Radius im Schatten auf die Hälfte reduziert, so gilt das nämliche von allen zur Tafel senkrechten Halbsehnen, und wir könnten dieses Schattenbild konstruieren, indem wir den Halbkreis in die Bildfläche umlegen und darin die zum Durchmesser senkrechten Halbsehnen halbieren.

Das Schattenbild des grossen Transporteurs.

Führe diese Konstruktion aus. Der Radius des Transporteurs sei 30 cm; zeichne ihn im verkleinerten Massstabe (hier 1 : 20); ergänze ihn zum ganzen Kreis, und halbiere die genannten Halbsehnen.

Fig. 41



Diese Ellipse hat zwei Symmetrieachsen, A B und C D, (Fig. 41). Man nennt A B die grosse Achse der Ellipse und bezeichnet sie mit 2a; CD heisst die kleine Achse; sie wird mit 2b bezeichnet. O A (= a) und O C (= b) heissen Halbachsen. O heisst Mittelpunkt der Ellipse. A und B heissen Scheitel der grossen Achse, C und D Scheitel der kleinen Achse.

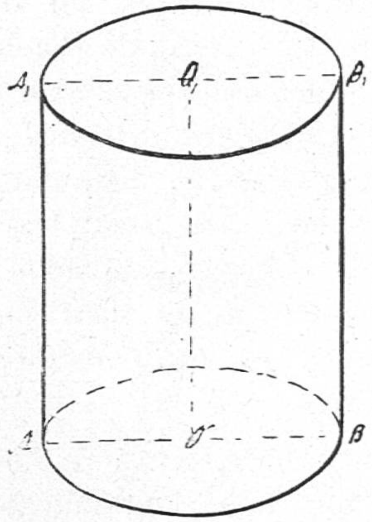


Fig. 42.

Darstellung des Drahtcylinders.

c) Das Schattenbild des Drahtcylinders und dasjenige des Halbkreises ändern sich mit der Höhe der Sonne. Zeichne das Schattenbild des Drahtcylinders, bei welchem ebenfalls die zur Bildfläche senkrechten Sehnen auf die Hälfte reduziert erscheinen. (Fig. 42.) Wir können uns jenes Bild auch folgendermassen entstanden denken: das Zeichnungsblatt werde durch die Achse des Cylinders gelegt; dann schneidet es aus dem Cylinder das Rechteck A B A_1 B_1 heraus. Dann denken wir uns die Strahlen von vorn unter solcher Neigung einfallend, dass die Verkürzung $^1/_2$ eintritt.

d) Zeichne nochmals den Kreis von Fig. 41, und verkürze 1) die Sehnen auf den dritten Teil; mache 2) alle 2 mal länger.

Wie haben wir in diesen Fällen Ellipsen konstruiert?

Satz 20. Wenn man die Sehnen eines Kreises, die zu einem seiner Durchmesser senkrecht stehen, in gleichem Verhältnis verkürzt oder verlängert, so entsteht eine Ellipse.

2) *Wie berechnet man den Inhalt einer Ellipse?*

Inhalt der Ellipse.

a) Indem wir bei Fig. 41 alle zum Durchmesser A B senkrechten Sehnen auf die Hälfte reduzierten, haben wir auch die zum Durchmesser A B senkrechten Streifen und damit die ganze Kreisfläche halbiert.

Inhalt des Kreises

$$= a \,.\, a \,.\, \pi = 1{,}5 \,.\, 1{,}5 \,.\, 3{,}14 \text{ cm}^2 = 7{,}065 \text{ cm}^2.$$

Inhalt der Ellipse

$$= \frac{1}{2} a \cdot a \cdot \pi = b \cdot a \cdot \pi = 3{,}532 \text{ cm}^2.$$

Wir erhalten demnach den Inhalt dieser Ellipse, indem wir die halbe grosse Achse mal die halbe kleine Achse mal π nehmen.

b) Berechne auch den Inhalt der Ellipse, die aus dem Kreis durch die Verkürzung der Sehnen auf den dritten Teil hervorgegangen ist. Ihr Inhalt wird der dritte Teil vom Kreisinhalte sein.

Inhalt dieser Ellipse $= \frac{1}{3}$ Kreis $= \frac{1}{3} \cdot a \cdot a \cdot \pi = b \cdot a \cdot \pi$,

weil hier $b = \frac{1}{3}$ a ist.

3) Würde man die Kreissehnen auf das Doppelte verlängern, so wäre die entstehende Ellipse doppelt so gross wie der Kreis und $b = 2a$.

Inhalt der Ellipse $= 2 \cdot a \cdot a \cdot \pi = b \cdot a \cdot \pi$.

Wie hat sich in diesen 3 Fällen der Inhalt der Ellipse aus ihren Achsen berechnen lassen?

Satz 21. Man erhält demnach den Inhalt einer Ellipse, indem man grosse Halbachse mal kleine Halbachse mal π nimmt. $f = a \cdot b \cdot \pi$.

Übungen.

1) Eine elliptische Wanne ist 1 m lang, 60 cm breit und 50 cm hoch; wieviel Wasser hält sie?

Diese Wanne wird das gleiche Volumen wie ein rechtwinkliges Prisma von gleicher Grundfläche und Höhe haben und wird nach der Regel $J = G \cdot H$ berechnet werden.

Flächeninhalt des Bodens $= 5 \cdot 3 \cdot \pi$ dm^2.

Volumen der Wanne $= 5 \cdot 3 \cdot \pi \cdot 5$ dm^3 $= 235{,}5$ Liter.

Wie wäre der Boden genau zu zeichnen?

Aus welchem Kreise und durch welche Verkürzung können wir diese Ellipse entstehen lassen? Wir müssten die Sehnen des Kreises vom Radius 1 m so verkürzen, dass die Breite 60 cm wird, d. h. im Verhältnis $100 : 60 = 5 : 3$.

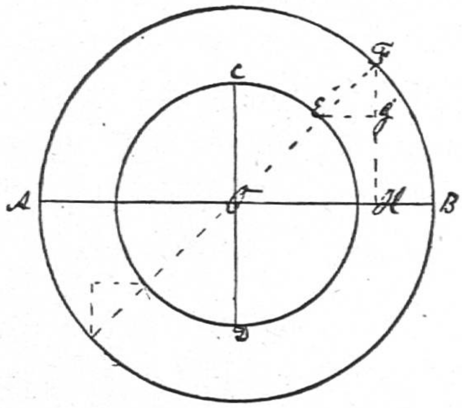
Zeichne diese Ellipse im verkleinerten Massstabe.

2) Ein elliptisches Fass ist 2,10 m hoch und 1,4 m breit. Berechne seinen Boden.

3) *Wir wollen zeigen, wie man die berechnete Wanne auf einfache Weise (z. B. im Massstabe 1 : 25) zeichnet.* Bequeme Konstruktion der Ellipse.

Wir erhalten eine Ellipse, deren grosse Achse 4 cm, deren kleine Achse 2,4 cm misst.

Fig. 43.



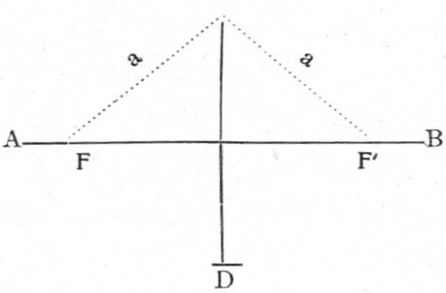
Wir zeichnen über beiden Achsen einen Kreis, ziehen durch O einen beliebigen Radius, errichten in seinem Schnittpunkt mit dem grossen Kreis eine Senkrechte zur grossen Achse (A B) und in seinem Schnittpunkte mit dem kleinen Kreis eine Senkrechte zur kleinen Achse; dann ist der Schnittpunkt der ersten Senkrechten mit der Verlängerung der zweiten ein Ellipsenpunkt. Die Sehne F H ist in gleichem Verhältnis (5 : 3) verkürzt worden wie die zu A B in O senkrecht stehende Kreissehne, die gleich O F ist. (Den genauen Beweis hiefür können wir hier nicht behandeln.)

Indem wir andere Radien oder Durchmesser ziehen und die gleiche Konstruktion wiederholen, erhalten wir weitere Ellipsenpunkte.

Konstruiere auch den Boden des genannten Fasses auf diese Art.

4) *Es gibt auch noch eine mechanische Konstruktion der Ellipse, die wir zeigen wollen.*

Fig. 44.



Fadenkonstruktion. Beschreibe um den Scheitel der kleinen Achse C (Fig. 44) einen Kreisbogen mit Radius a; er schneidet die grosse Achse in zwei Punkten F und F', welche Brennpunkte der Ellipse heissen, während die Entfernung eines Brennpunktes vom Mittelpunkt Excentrizität genannt wird.

Nimmt man einen Faden von der Länge 2a, befestigt seine Endpunkte bei F und F', hält dann den Faden mit einem Stift bei C gespannt, so erhält man eine Ellipse, wenn man mit dem Stift herumfährt.

Prüfe die Richtigkeit dieser Konstruktion bei den schon gezeichneten Ellipsen.

Übungen.

1) Stelle einige der früher behandelten Cylinderkörper in Parallelprojektion dar.

2) Ein Erdmeridian ist eine Ellipse, bei welcher die kleine Achse $\frac{299}{300}$ der grossen Achse beträgt. Zeichne sie. Sie ist fast ein Kreis.

3) Die Bahn der Erde um die Sonne ist eine Ellipse, bei welcher $\frac{OF}{OA} = \frac{1}{60}$ ist; zeichne sie auf einem sehr grossen Blatte.

F. Regelmässige Prismen und Vielecke.

I. Konstruktion regelmässiger Vielecke aus ihren Seiten.

1) Ein sechsseitiger Brunnen hat eine innere Seitenlänge von 1,5 m, eine Tiefe von 90 cm und eine Wanddicke von 30 cm.

Zeichne den Grund- und den Aufriss dieses Brunnens, und berechne, wieviel Liter Wasser er hält, sowie den Rauminhalt der Wandung.

Der Grund- und der Aufriss des Brunnens.

a) Der Grundriss des Innenraums ist ein regelmässiges Sechseck mit der Seitenlänge 1,5 m; der Grundriss der äusseren Wand ist ebenfalls ein regelmässiges Sechseck, dessen Seiten von den Seiten des inneren Sechsecks einen Abstand von 30 cm haben. Der Umriss des Aufrisses ist ein Rechteck.

Wir wählen hier den Massstab 1 : 100.

Wie wird das innere Sechseck gezeichnet?

Wir beschreiben einen Kreis mit Radius 1,5 cm und tragen den Radius sechsmal als Sehne ein. Warum geht das? Dreieck