Die Pyramide

c) Nach der Anzahl der Seiten der Grundfläche teilt man die Prismen in drei-, vier-, fünf-, sechsseitige u. s. w. ein.

d) Für jedes Prisma gilt die Regel:

Inhalt = Grundfläche mal Höhe.

G. Die Pyramide.

I. Die quadratische Pyramide.

1) Wir befinden uns vor einem Turme (oder Pfeiler), der in eine quadratische Pyramide ausläuft.

a) *Beschreibe den Turm von der Stelle an, wo seine rechtwinklige Form aufhört.* Beschreibung.

Die Grundfläche dieses Teiles des Turmes ist ein Quadrat; seine 4 Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke, die in einer Ecke, der Spitze, zusammenlaufen. Wir nennen diesen Körper eine *quadratische* Pyramide. Sie ist begrenzt von einer Grund- und 4 Seitenflächen, von 4 gleichen Grund- und 4 gleichen Seitenkanten und von 5 Ecken.

b) *Es soll dieser Körper durch Grund- und Aufriss dargestellt werden.* Grund- und Aufriss.

Welche Masse müssen wir nehmen? Eine Grundkante misst 6 m und der senkrechte Abstand der Spitze von der Grundfläche, die Höhe der Pyramide, misst 10 m.

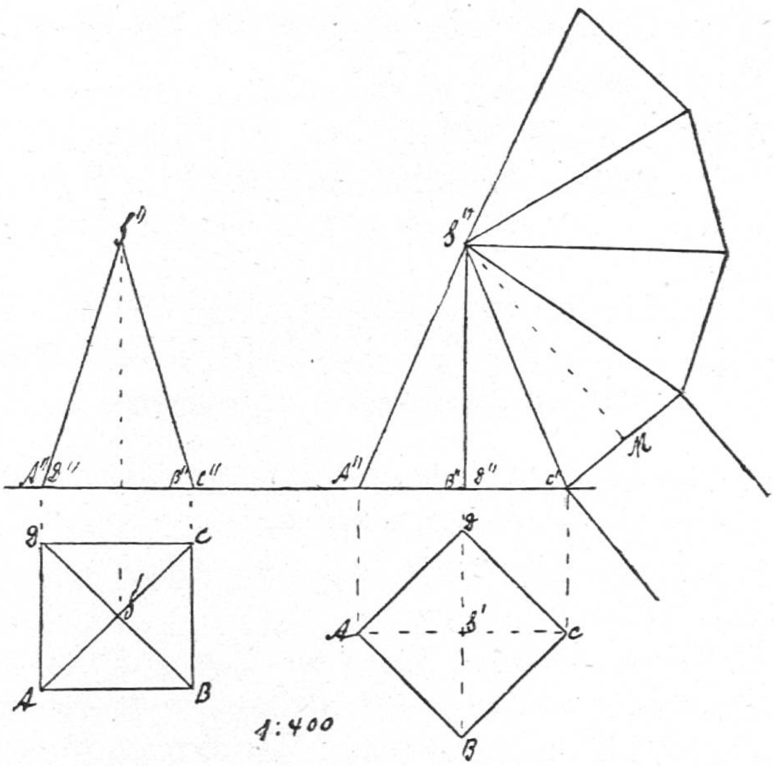
Wir zeichnen den Grund- und den Aufriss dieser Pyramide und denken sie uns einmal so auf die Grundrissebene gestellt, dass zwei Seiten ihrer Grundfläche parallel zur Aufrissebene laufen, und ein zweites Mal so, dass zwei Seitenkanten diese Lage erhalten.

In Fig. 1 erscheinen die Seitenkanten im Aufriss verkürzt. Bei der Stellung 2) laufen A S und C S parallel zur Aufrissebene und erscheinen im Aufriss in wahrer Grösse; denn die Raumfiguren A A″ S S″ und C C″ S S″ sind Rechtecke.

c) *Was kostet die Erstellung dieses Turmdachs à 7 Fr. pro m²?*

Wir zeichnen das Netz der Pyramide und berechnen ihre Seitenflächen. Das Netz lässt sich leicht der Seite S″ C″ anschliessen (siehe Fig. 48 b). Die Höhe einer Seitenfläche kann man der Zeichnung entnehmen. S″ M misst in der Zeichnung (1 : 400) 2,6 cm, in der Natur also 10,4 m.

Fig. 48 (a) Fig. 48 (b)



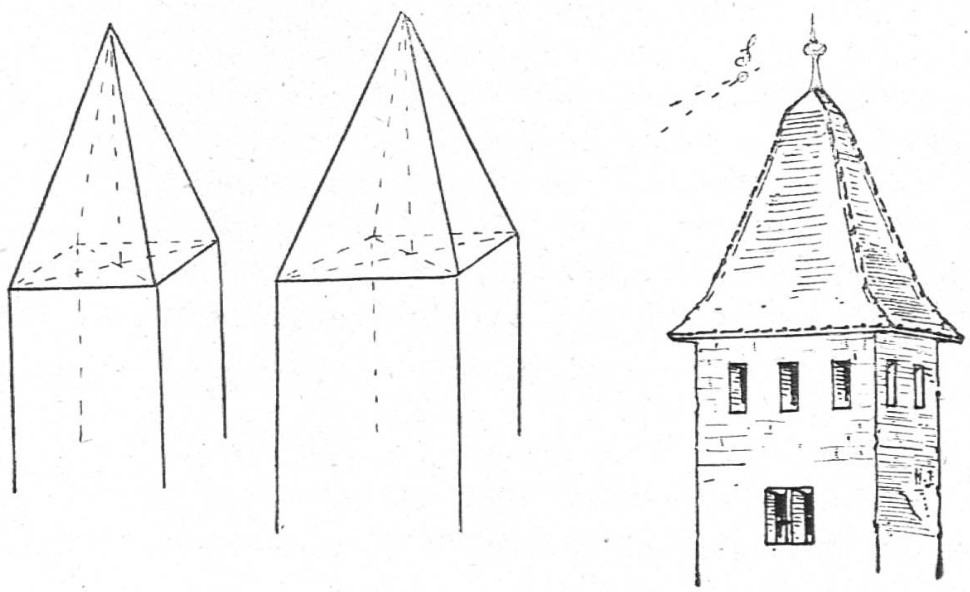
Inhalt der 4 Seitenflächen = 4 . 3 . 10,4 m² = 124,8 m²
Erstellungskosten 124,8 . 7 Fr. = 873,6 Fr.

Zeichne das Netz etwa im Massstabe 1 : 100 auf Karton, und konstruiere den Kartonkörper.

d) *Zeichne den Turm in Parallel- und Centralprojektion.*

Wir stellen zuerst den Unterbau dar und brauchen dann bloss die Höhe vom Schnittpunkt der Diagonalen der Grundfläche der Pyramide aus aufzutragen.

Fig. 49 (a) (b) (c)



e) *Wie hoch käme die Erstellung dieses Turmdaches pro m^3 nach Berechnung c) zu stehen?*

Wie berechnet man den Inhalt dieser Pyramide?

Vergleiche deinen Kartonkörper mit einem rechtwinkligen Kartonkörper von gleicher Grundlinie und gleicher Höhe, und fülle letztern mit feinem Sand. Es wird sich zeigen, dass der Innenraum der Pyramide 3 mal mit diesem Sand gefüllt werden kann. (Es empfiehlt sich für diesen Versuch 2 genau konstruierte Blechkörper zu haben, die man mit Wasser füllen kann.) Berechnung des Inhalts.

Der rechtwinklige Körper schliesst demnach einen 3 mal so grossen Raum ein als die Pyramide. Somit

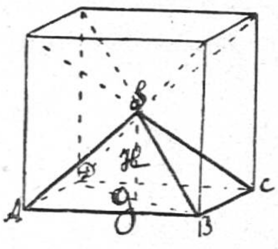
$$\text{Inhalt der Pyramide} = \frac{\text{Grundfläche . Höhe}}{3} = \frac{36 \;.\; 10}{3} = 120 \text{ m}^3$$

$$\text{Kosten pro m}^3 = 873{,}6 \text{ Fr. : } 120 = 7 \text{ Fr. } 28 \text{ Rp.}$$

2) *Die Regel für die Inhaltsberechnung lässt sich in einem besonderen Fall leicht beweisen.*

(Weise ein Würfelmodell vor, das in 6 gleiche Pyramiden zerlegbar ist.*)

Fig. 50



Dieser Würfel lässt sich in 6 kongruente Pyramiden zerlegen. Jede dieser Pyramiden hat dieselbe Grundfläche wie der Würfel und die halbe Höhe.

Wir bezeichnen die Grundfläche einer Pyramide mit G die Höhe mit H; dann ist die Würfelhöhe 2 . H, und

$$\text{der Inhalt des Würfels} = G \;.\; 2\,H$$

$$\text{„ „ der Pyramide} = \frac{G \;.\; 2\,H}{6} = \frac{G \;.\; H}{3}$$

Somit erhalten wir den Inhalt der Pyramide, indem wir Grundfläche mal Höhe nehmen und das Produkt durch 3 dividieren.

---

*) Wenn in der Sammlung kein zerlegbares Würfelmodell vorhanden ist, können die Schüler sechs quadratische Kartonpyramiden, bei welchen die Höhe gleich der halben Quadratseite ist, konstruieren und zu einem Würfel zusammenlegen.

II. Die dreiseitige Pyramide.

(Weise ein Mineral vor, welches Tetraederform zeigt [oder ein solches Modell].)

Beschreibung.

a) *Beschreibe diesen Körper.*

Seine Grundfläche ist ein Dreieck. Er hat drei Seitenflächen und 3 Seitenkanten und heisst deshalb *dreiseitige Pyramide* oder auch *Tetraeder*, weil er von 4 Flächen begrenzt ist. Miss die Seitenkanten und die Grundkanten. Sie sind alle gleich (4 cm); der Körper ist von 4 gleichseitigen Dreiecken begrenzt.

Grund- und Aufriss.

b) *Zeichne den Grund- und den Aufriss dieses Tetraeders.*

Lege den Körper mit einer Fläche auf die Grundrissebene so, dass eine Grundkante (A B, Fig. 51) senkrecht zur Achse steht; dann läuft die gegenüberliegende Seitenkante C S parallel zur Aufrissebene und erscheint im Aufriss in wahrer Grösse.

Den Grundriss der Spitze erhält man, indem man die Ecken des Dreiecks A B C mit den Mitten der gegenüberliegenden Seiten verbindet. Der Aufriss liegt in einer Senkrechten zur Achse von S′ aus. Man erhält S″, indem man die Seitenkante von C aus abträgt.

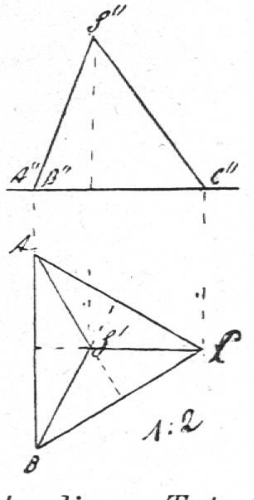


Fig. 51

c) *Zeichne das Netz dieses Tetraeders.*

Berechnung.

d) *Berechne den Körper.*

Die Oberfläche besteht aus 4 gleichseitigen Dreiecken. Die Dreieckshöhe entnehmen wir aus der Grundrisszeichnung (= 3,5 cm).

$$\text{Grundfläche} = \frac{4 \;.\; 3{,}5}{2} = 7 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Oberfläche} = 4 \;.\; \frac{4 \;.\; 3{,}5}{2} = 28 \text{ cm}^2.$$

Wie erhält man den Inhalt dieses Körpers? Wir könnten auch bei ihm nachweisen, dass er nur den 3. Teil des Raumes eines rechtwinkligen Körpers von gleicher Grundfläche und Höhe einschliesst. (Weise, wenn in der Sammlung vorhanden, ein dreiseitiges Prisma vor, das sich in 3 dreiseitige Pyramiden zerlegen lässt.)

Die Höhe des Tetraeders entnehmen wir der Aufrisszeichnung, H = 3,3 cm.

$$\text{Volumen} = \frac{7 \,.\, 3{,}3}{3} = 7{,}7 \text{ cm}^3.$$

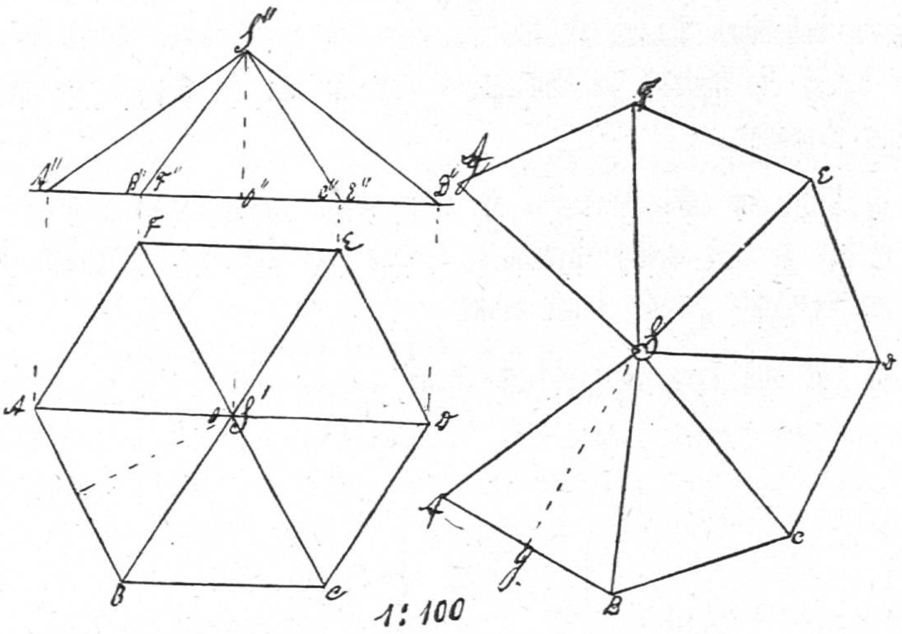
III. Die sechsseitige Pyramide.

Das Dach eines Gartenpavillons ist eine Pyramide, deren Grundfläche ein regelmässiges Sechseck von 2 m Seitenlänge ist; die Höhe dieser Pyramide misst 1 m 50 cm.

Beschreibe diese Pyramide; zeichne ihren Grund- und ihren Aufriss, sowie ihr Netz, und berechne sie.

Wir denken uns die Pyramide so auf die Grundrissebene gelegt, dass zwei Seitenkanten zur Aufrissebene parallel laufen.

Fig. 52 (a u. b)



A B = 2 m, A S = 2,5 m, S G (Höhe einer Seitenfläche) = 2,3 m, Höhe eines Dreiecks der Grundfläche = 1,7 m.

$$\text{Inhalt der Seitenflächen (Mantelfläche)} = 6 \,.\, \frac{2 \,.\, 2{,}3}{2} = 13{,}8 \text{ m}^2.$$

Inhalt der Grundfläche $= 6 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}7}{2} = 10{,}2 \text{ m}^2$.

Volumen der Pyramide $= \frac{G \cdot H}{3} = \frac{10{,}2 \cdot 1{,}5}{3} = 5{,}1 \text{ m}^3$.

Wie wird eine fünfseitige, eine achtseitige, eine zwölfseitige Pyramide aussehen?

(Weise auch das Modell einer schiefen Pyramide vor, und lass ihren Grund- und ihren Aufriss zeichnen, sowie ihren Inhalt nach der Regel $J = \frac{G \cdot H}{3}$ berechnen, wobei H die Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche bedeutet.)

Was für Dreiecke sind die Seitenflächen dieser *schiefen* Pyramide? Wie sind die Seitenkanten?

Die behandelten vier-, drei-, sechsseitigen Pyramiden, bei welchen alle Seitenkanten gleich waren, wollen wir zur Unterscheidung von dieser schiefen Pyramide *gerade Pyramiden* nennen. Sie heissen zudem noch *regelmässig,* weil ihre Grundflächen regelmässige Vielecke sind.

Verallgemeinerung. Vergleiche die Merkmale, sowie die Berechnungsart der behandelten Pyramiden, und entwickle:

Satz 25. a) Eine Pyramide ist begrenzt von Dreiecken als Seitenflächen und von einem beliebigen Vieleck als Grundfläche. Der gemeinsame Punkt der Seitenflächen heisst die Spitze; die Senkrechte von ihr auf die Grundfläche heisst die Höhe der Pyramide.

b) Nach der Zahl der Seiten der Grundfläche unterscheidet man drei-, vier-, fünf-, sechs- u. s. f. seitige Pyramiden. Sind alle Seitenkanten gleich lang, so heisst die Pyramide gerade, sonst schief.

c) Für alle Pyramiden gilt die Regel: $J = \frac{G \cdot H}{3}$

H. Der Kegel.

1) Besichtigt einen Turm mit Kegeldach. Schätzt den Radius der Grundfläche des Daches (3 m) und seine Höhe (8 m).

Beschreibe dieses Dach; zeichne seinen Grund- und seinen Aufriss, sowie sein Netz, und konstruiere das Kartonmodell.