Zeitschrift: Jahresbericht des Bündnerischen Lehrervereins

Herausgeber: Bündnerischer Lehrerverein

Band: 17 (1899)

Heft: : Der Geometrie-Unterricht in der I. und II. Klasse der Kantonsschule und in Realschulen

Artikel: Der Kegel

Autor: Pünchera, J.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-145640

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 17.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Inhalt der Grundfläche $= 6 \cdot \frac{2 \cdot 1{,}7}{2} = 10{,}2\ m^2$.

Volumen der Pyramide $= \frac{G \cdot H}{3} = \frac{10{,}2 \cdot 1{,}5}{3} = 5{,}1\ m^3$.

Wie wird eine fünfseitige, eine achtseitige, eine zwölfseitige Pyramide aussehen?

(Weise auch das Modell einer schiefen Pyramide vor, und lass ihren Grund- und ihren Aufriss zeichnen, sowie ihren Inhalt nach der Regel $J = \frac{G \cdot H}{3}$ berechnen, wobei H die Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche bedeutet.)

Was für Dreiecke sind die Seitenflächen dieser *schiefen* Pyramide? Wie sind die Seitenkanten?

Die behandelten vier-, drei-, sechsseitigen Pyramiden, bei welchen alle Seitenkanten gleich waren, wollen wir zur Unterscheidung von dieser schiefen Pyramide *gerade Pyramiden* nennen. Sie heissen zudem noch *regelmässig,* weil ihre Grundflächen regelmässige Vielecke sind.

Verallgemeinerung. Vergleiche die Merkmale, sowie die Berechnungsart der behandelten Pyramiden, und entwickle:

Satz 25. a) Eine Pyramide ist begrenzt von Dreiecken als Seitenflächen und von einem beliebigen Vieleck als Grundfläche. Der gemeinsame Punkt der Seitenflächen heisst die Spitze; die Senkrechte von ihr auf die Grundfläche heisst die Höhe der Pyramide.

b) Nach der Zahl der Seiten der Grundfläche unterscheidet man drei-, vier-, fünf-, sechs- u. s. f. seitige Pyramiden. Sind alle Seitenkanten gleich lang, so heisst die Pyramide gerade, sonst schief.

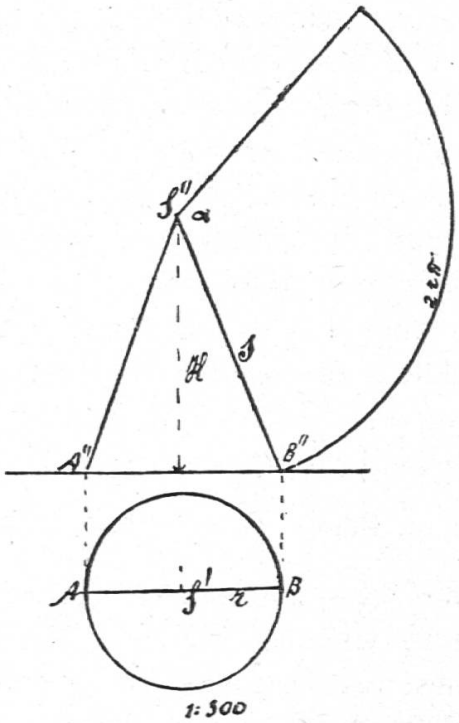
c) Für alle Pyramiden gilt die Regel: $J = \frac{G \cdot H}{3}$

H. Der Kegel.

1) Besichtigt einen Turm mit Kegeldach. Schätzt den Radius der Grundfläche des Daches (3 m) und seine Höhe (8 m).

Beschreibe dieses Dach; zeichne seinen Grund- und seinen Aufriss, sowie sein Netz, und konstruiere das Kartonmodell.

Fig. 53 (a)



a) Diese Dachfläche ist unten durch eine Kreislinie begrenzt. Wir können sie uns zusammengesetzt denken aus unzählig vielen Linien, welche den Kreis mit der Turmspitze verbinden. Wir nennen diese Fläche eine *Kegelfläche* und den Körper, den sie umschliesst, *Kegel*. Die Dachfläche heisst Mantel des Kegels; die Linien, aus denen sie zusammengesetzt ist, heissen *Seitenlinien*. Was nennt man Grundfläche, was Spitze des Kegels? Der senkrechte Abstand der Spitze von der Grundfläche, den wir abgeschätzt haben, heisst Höhe; sie fällt in die Linie hinein, welche die Spitze mit dem Mittelpunkt der Grundfläche verbindet und Achse des Kegels genannt wird. Beschreibung.

b) Zeichne den Grund- und den Aufriss. Ersterer ist ein Kreis; sein Mittelpunkt ist der Grundriss der Spitze. Der Aufriss ist ein gleichschenkliges Dreieck; wir zeichnen zuerst seine Grundlinie und dann die Höhe. Die Seitenlinien A S und B S erscheinen im Aufriss unverkürzt (immerhin im Massstabe 1 : 300). Ihre Länge können wir der Zeichnung entnehmen (8,5 m natürl. Grösse.) Grund- und Aufriss.

c) Wie konstruiert man das Kartonmodell? Schneide einen Kartonkegel nach einer Seitenlinie auf, und wickle den Mantel ab; dann erhältst du einen Kreissektor; die Seitenlinien des Kegels sind Radien des Sektors geworden, und die Peripherie der Grundfläche erscheint als Bogen des Sektors. Das Netz.

Um das Netz des Turmmodells zu zeichnen, brauchen wir daher bloss um S″ mit Radius S″ B″ einen Bogen zu beschreiben und auf diesen die Peripherie des Grundkreises abzutragen. Lässt sich das ganz genau machen? Wir haben früher den Kreisumfang auf eine Gerade abgetragen, indem wir den Radius $6^2/_7$ mal abtrugen; auf einem zweiten Bogen können wir aber die Peripherie nicht genau abmessen.

Es lässt sich aber leicht der Centriwinkel α des Sektors berechnen. Er verhält sich zu 360° wie der Bogen des Sektors zum ganzen Umfang des Kreises mit Radius s.

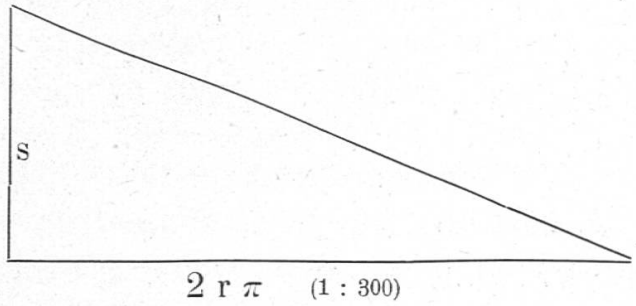
$$\alpha : 360^0 = 2\,r\,\pi : 2\,s\,\pi$$

$$\alpha = 360^0 \cdot \frac{r}{s} = 360^0 \cdot \frac{3}{8{,}5} = 127^0$$

Berechnung des Mantels.

d) *Wie berechnet man den Mantel?* (Siehe Kreisberechnung). Zeichne das Dreieck, welches gleichen Inhalt wie der Sektor hat. Die Grundlinie des Dreiecks ist gleich dem Bogen des Sektors und die Höhe gleich seinem Radius. Warum?

Fig. 53 (b)



$$\text{Inhalt des Dreiecks} = \frac{g \cdot h}{2} = r\,\pi\,s.$$

Somit: Mantel des Kegels $= r \cdot \pi \cdot s = 3 \cdot 3{,}14 \cdot 8{,}5\ m^2 = 80{,}07\ m^2$.

Was kostet die Herstellung dieses Daches à 8 Fr. pro m^2?

Erkundige dich nach dem Unterschiede der Kosten bei Holz- und bei Blechkonstruktion.

Berechnung des Inhalts.

e) *Welchen Rauminhalt hat dieser Kegel?* Wir können den Kegel als eine Pyramide mit unzählig vielen Seitenflächen ansehen. Es wird daher beim Kegel dieselbe Inhaltsregel gelten wie bei der Pyramide.

$$\text{Volumen} = \frac{G \cdot H}{3} = \frac{r^2\pi \cdot H}{3} = \frac{3^2 \cdot 3{,}14 \cdot 8\ m^3}{3} = 75{,}36\ m^3.$$

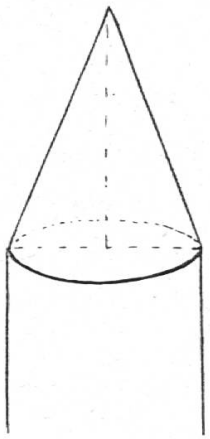
Wie hoch kommt 1 m^3 zu stehen?

Parallel-

f) *Parallelprojektion des Kegels. Wir wollen unsern Turm auch in Parallelprojektion darstellen.*

Wir zeichnen die Parallelprojektion des Unterbaus, der ein Cylinder ist, und zeichnen dann die Achse des Kegels ein.

Fig. 54.



2) *Konstruiere in Karton einen Trichter von 10 cm Weite und 10 cm Seitenlänge.* Zweites Beispiel.

Zeichne seinen Grund- und seinen Aufriss. Entnimm der Zeichnung die Höhe des Trichters. Berechne den Centriwinkel des abgewickelten Mantels, ebenso die Mantelfläche, sowie das Quantum Wasser, das der Trichter hält, wenn man seine kleine Öffnung mit dem Finger schliesst. (Letztere soll bei der Zeichnung als Punkt angenommen werden.)

3) *Der schiefe Kegel.*

a) Die beiden behandelten Kegel können wir uns dadurch entstanden denken, dass man alle Punkte eines Kreises (der Grundfläche) mit allen Punkten eines senkrecht über dem Kreismittelpunkte befindlichen Punkt (der Spitze) verbindet. Nun können wir uns einen Kreis auch verbunden denken mit einem Raumpunkte, der nicht senkrecht über dem Mittelpunkte des Kreises steht. Entstehung.

Wir wollen den Körper, der so entsteht, betrachten.

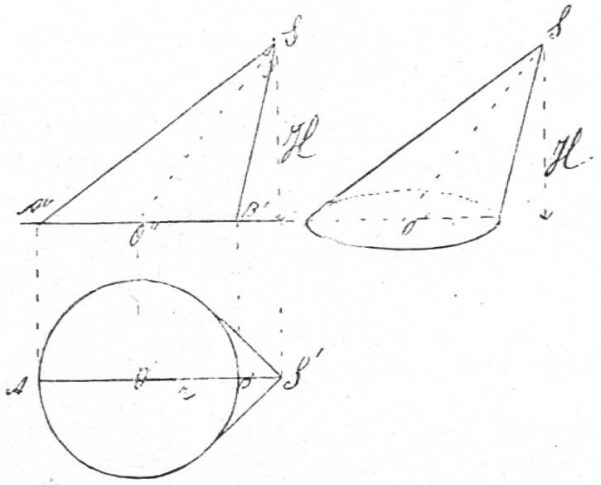
Die Seitenlinien erhalten dann ungleiche Länge; die Verbindungslinie des Kreismittelpunktes mit der Spitze (die Achse des Kegels) steht schief zur Ebene des Kreises. Man nennt diesen Körper einen *schiefen Kegel.* (Weise ein Modell vor.)

Im Gegensatz hiezu nennt man die zwei früheren Kegel, bei welchen die Achse senkrecht zur Grundfläche stand, *gerade Kegel.*

b) *Zeichne den Grund- und den Aufriss, sowie die Parallelprojektion eines schiefen Kegels* (z. B. des Modells der Sammlung).

Darstellung. Die Höhe, (d. i. die Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche, trifft letztere nicht in ihrem Mittelpunkte.

Fig. 55 (a) (b)



c) *Wie wird der schiefe Kegel berechnet?*

Berechnung. Der Mantel des schiefen Kegels lässt sich nicht auf elementare Weise berechnen, wohl aber sein Inhalt. Wie das schiefe Dreieck A″ B″ S″ gleichen Inhalt hat wie ein gleichschenkliges mit gleicher Grundlinie und Höhe, ist auch der schiefe Kegel einem geraden von gleicher Grundfläche und Höhe inhaltsgleich und würde nach der Regel berechnet $J = \frac{G \cdot H}{3}$

Berechne den Inhalt des Modells.

Verallgemeinerung. Vergleiche die Merkmale, sowie die Berechnungsart der behandelten Kegel.

Satz 26. a) Ein Kegel ist begrenzt von einem Kreis als Grundfläche und von einem runden Mantel, der aus unzählig vielen Seitenlinien besteht, welche die Kreislinie mit der Spitze verbinden.

Die Verbindungslinie der Spitze mit dem Mittelpunkt der Grundfläche heisst die Achse, und das Perpendikel von der Spitze auf die Grundfläche heisst die Höhe des Kegels.

b) Steht die Achse senkrecht zur Grundfläche, fällt sie also mit der Höhe zusammen, so heisst der Kegel ein gerader; steht die Achse schief zur Grundfläche, so heisst der Kegel ein schiefer.

c) Die Abwicklung der Mantelfläche eines geraden Kegels ist ein Kreissektor, dessen Radius gleich der Seitenlinie, dessen Bogen gleich der Peripherie der Grundfläche ist.

Die Mantelfläche ist gleich Radius mal Seitenlinie mal $\pi = r \cdot \pi \cdot s$.

d) Der Inhalt des Kegels ist gleich $\frac{\text{Grundfläche} \times \text{Höhe}}{3} = \frac{G \cdot H}{3}$.

Übungen.

1) Es soll die Holzmasse annähernd berechnet werden, die eine Staublawine niedergerissen hat.

Welche Form hat ein Baumstamm? Er kann als Kegel angesehen werden. Wie erhalten wir die Zahl der m³ (Festmeter) eines solchen Stammes? Wir messen mit der Kluppe (weise eine solche vor) den Durchmesser der Grundfläche und mit einem Messband die Höhe; dann ist $J = \frac{G \cdot H}{3}$

Es sei $d = 60$ cm, $H = 12$ m; dann ist:

$$J = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot \pi}{3} \cdot 12 \text{ m}^3 = 1{,}13 \text{ m}^3.$$

So misst man jeden niedergerissenen Stamm aus.

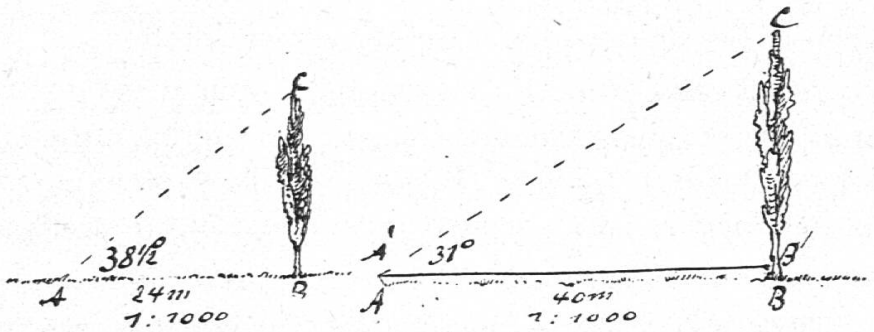
Es sei $d = 23$ cm, $H = 15{,}6$ m; $d_2 = 41$ cm, $H_2 = 28{,}3$ m; $d_3 = 65$ cm, $H_3 = 34{,}5$ m.

Berechne diese Bäume.

2) a) Es soll ein stehender Baumstamm berechnet werden.

Wie können wir die Höhe indirekt bestimmen? Wir messen eine wagerechte Standlinie A B bis zum Fusse B des Baumes, richten in A eine Latte nach der Baumspitze C und messen mit einem Holztransporteur ihren Neigungswinkel. Dann lässt sich das rechtwinklige Dreieck A B C in verkleinertem Massstab zeichnen, und wir können die Baumhöhe aus der Zeichnung entnehmen. Es sei gemessen worden A B = 24 m und W. C A B = $38^1/_2{}^0$, dann ist die Baumhöhe = 19 m.

Fig 56. Fig 57.



In welcher Beziehung stehen das Dreieck A B C in der Zeichnung und dasjenige in der Natur? Jede Seite des Bilddreiecks ist $^1/_{1000}$ von der entsprechenden Seite des Originaldreiecks; ihre Winkel sind paarweise gleich. Wie bezeichnet man diese Beziehung?

b) Der Neigungswinkel würde sich genauer mit einem Winkelinstrument (dem Theodolit) messen lassen. Sein Fernrohr lässt sich aber nicht in A aufstellen. Es bezeichne A′ den Drehpunkt des Fernrohrs; er befinde sich z. B. 1 m 30 cm über dem Fusspunkt A; dann können wir den Winkel messen, welchen das nach der Baumspitze C gerichtete Fernrohr mit der Horizontalen durch A′ bildet. Aus der Länge der Standlinie und dem Winkel C A′ B′ lässt sich das Dreieck A′ B′ C konstruieren, welchem wir die Höhe C B′ entnehmen, wozu noch die Höhe des Instruments (1 m 30 cm) zu addieren ist.

Die Basis A B messe 40 m, der Neigungswinkel C A′ B′ betrage 31°; wie hoch ist der Baum, wenn der Drehpunkt des Fernrohrs 1 m 30 cm über dem Boden steht? Welchen Kubikinhalt hat der Baum, wenn sein Umfang unten 1 m 80 cm misst?

3) Wieviel dm² Blech enthält eine kegelförmige Kaminkappe von 1 m Weite und 80 cm Seitenlänge?

4) Ein Zuckerhut hat eine Grundfläche, deren Durchmesser 30 cm misst, und eine Seitenlinie von 80 cm. Wieviel Zucker enthält er? Entnimm die Höhe aus der Aufrisszeichnung.

Dieser Zuckerhut soll gut verpackt werden. Mit was für einem Kartonstück kann man ihn einwickeln?

J. Der Pyramidenstumpf.*)

1) Wir betrachten den Trichter einer Mühle.

Beschreibung.

a) *Beschreibe ihn.* Er ist begrenzt von 4 symmetrischen Trapezen, deren obere Seiten ein grosses, deren untere Seiten ein kleines Quadrat bilden. Wenn wir die Seitenkanten verlängern, sehen wir, dass sie sich in einem Punkte treffen. Der

*) Bei Zeitmangel kann dieses Kapitel kürzer gefasst werden.