

Das Ausziehen der Quadratwurzel

Autor(en): **Pünchera, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Jahresbericht des Bündnerischen Lehrervereins**

Band (Jahr): **17 (1899)**

Heft: **Der Geometrie-Unterricht in der I. und II. Klasse der Kantonsschule und in Realschulen**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-145644>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

5) Was wiegt eine Gewehrku­gel aus Blei, die einen Durch­messer von 9 mm hat, wenn das spezifische Gewicht des Bleis 11,3 beträgt? Welches Gewicht hätte eine Kugel von doppeltem, eine solche von zehnfachem Durchmesser?

6) Ein Kessel von der Form einer Halbkugel hat einen Durchmesser von 1,10 m. Wieviel Liter hält er? Wie gross ist sein Deckel, wie gross seine Wandung?

7) Ein Kalkofen hat einen äussern Umfang von 20 m; die Wanddicke beträgt 40 cm; er wird halbkugelförmig über­füllt. Welches Volumen hat diese Halbkugel?

M. Das Ausziehen der Quadratwurzel.

I. Die Quadratwurzel aus drei- und vierstelligen Quadratzahlen.

1) Der Kanton Baselstadt hat ein Gesamtareal von ungefähr 36 km².

Welches Quadrat hat denselben Flächeninhalt?

Bezeichnen wir die Seite mit x , so muss: Seite \times Seite = x km² = 36 km² sein. $x = 6$; denn $6^2 = 36$.

Ein Quadrat von 6 km Seite ist so gross wie der Kanton Baselstadt.

Man nennt 6 die Quadratwurzel aus 36 und schreibt $\sqrt{36} = 6$.

2) Der Kanton Graubünden hat einen Flächeninhalt von 7185 km².

Wie lang ist die Seite des Quadrates, das denselben Flächeninhalt hat?

Wir wollen diese Seite mit x bezeichnen. Dann muss sein: Seite \times Seite = $x^2 = 7185$ km².

Wir haben demnach die Zahl zu suchen, die mit sich selbst multipliziert 7185 gibt, oder deren Quadrat = 7185 ist. Man nennt diese Zahl die Quadratwurzel aus 7185. Wie gross ist sie ungefähr? Sie liegt zwischen 80 und 90, denn $80^2 = 6400$; $90^2 = 8100$. Durch Probieren finden wir genauer, dass sie zwischen 84 und 85 liegt.

$$84^2 = 7056; 85^2 = 7225.$$

$$\sqrt{7056} = 84; \sqrt{7225} = 85; \sqrt{7185} = 84, \dots$$

3) Wir wollen eine Regel kennen lernen, nach welcher wir diese Quadratseite direkt genau berechnen können.

Definition
der
Quadrat-
wurzel.

Zu diesem Zwecke wollen wir zunächst von bequemen Zahlen ausgehen.

Wie gross ist $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{16}$... $\sqrt{100}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{900}$, $\sqrt{1600}$ u. s. f.? Wie gross ist $\sqrt{0,04}$, $\sqrt{0,16}$, $\sqrt{1,21}$...?

Satz 30. Unter der Quadratwurzel aus einer Zahl versteht man diejenige Zahl, die mit sich selbst multipliziert oder ins Quadrat erhoben, die gegebene Zahl gibt. Die gegebene Zahl nennt man Radikand.

Der Kürze halber wollen wir statt Quadratwurzel nur Wurzel sagen.

Quadrat-
zahlen.

Bildet Zahlen, deren Wurzeln ganzzahlig sind. $1^2 = 1$; $2^2 = 4$, ... $10^2 = 100$; $11^2 = 121$; ... diese Zahlen nennt man *Quadratzahlen*. Was lässt sich über ihre Stellenzahl aussagen?

Die Quadrate der einstelligen Zahlen (1—9) liegen zwischen 1 und 100; sie sind also ein- oder zweistellig.

Die Quadrate der zweistelligen Zahlen (10—99) liegen zwischen 100 und 10000; sie sind also drei- oder vierstellig.

Die Quadrate der dreistelligen Zahlen (100—999) liegen zwischen 10000 und 1000000; sie sind also fünf- oder sechsstellig.

Umgekehrt wird die Wurzel aus ein- und zweistelligen Quadratzahlen einstellig sein, die Wurzel aus drei- und vierstelligen zweistellig, die Wurzel aus fünf- und sechsstelligen wird dreistellig sein u. s. f.

Klassen-
einteilung.

Daraus ergibt sich, dass man durch folgende Einteilung des Radikanden die Stellenzahl der Wurzel sofort angeben kann.

Wir teilen die Zahl von den Einern aus nach links in Klassen von je zwei Stellen ein.

Z. B. $\sqrt{1'21} = 11$; $\sqrt{3'24} = 18$; $\sqrt{64'00} = 80$; $\sqrt{9'00'00} = 300$; $\sqrt{49'00'00} = 700$.

Die Wurzel hat so viele Stellen wie der Radikand Klassen.

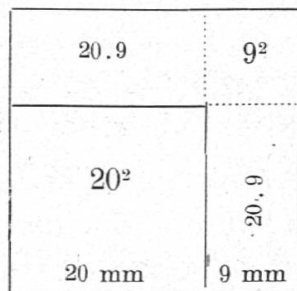
Zeiget, dass bei Dezimalbrüchen die Einteilung vom Komma aus nach rechts geschehen muss. Z. B. $\sqrt{1,21} = 1,1$; $\sqrt{0,0064} = 0,08$.

4) a) Um nun herauszufinden, wie man die Wurzel einer beliebigen Quadratzahl direkt findet, müssen wir zuerst genau

zusehen, wie die Quadratzahl entstanden ist, welche Bestandteile sie enthält. Wir fragen uns zunächst: welchen Inhalt hat das Quadrat von der Seite $2\text{ cm } 9\text{ mm} = 29\text{ mm}$? Wir zeichnen das Quadrat, konstruieren darin über 20 mm das Quadrat und verlängern zwei seiner Seiten so, dass das ganze Quadrat zerlegt wird: in das Quadrat über 20 mm , in das doppelte Rechteck aus den Seiten 20 mm und 9 mm und in das Quadrat über 9 mm .

Bestandteile des Quadrats.

Fig. 68.



$$\begin{array}{r}
 \text{Zahl der mm}^2 \text{ dieses Quadrates} = 29^2 = (20 + 9)^2 = \\
 20^2 + 2 \cdot 20 \cdot 9 + 9^2 = 400 \\
 \quad \quad \quad + 360 \\
 \quad \quad \quad + 81 \\
 \hline
 841
 \end{array}$$

Aus welchen Bestandteilen können wir uns daher 1) das Quadrat über 29 mm , 2) das Quadrat der Zahl 29 (841) zusammengesetzt denken? Das Quadrat der Zahl 29 ist zusammengesetzt aus dem Quadrat von 20 , aus dem doppelten Produkt von 20 und 9 (360) und aus dem Quadrat von 9 (81).

b) Nun werden wir sehen, wie wir aus 841 leicht die Wurzel ziehen können.

Ausziehen der Wurzel aus der gebildeten Quadratzahl.

$$\begin{array}{r}
 \sqrt{841} = 20 + 9 = 29 \\
 \underline{400} \\
 441 : 40 \\
 \underline{360} \\
 81
 \end{array}$$

” ” ”

Die Wurzel liegt offenbar zwischen 20 und 30 . Sie wird gleich sein $20 +$ einige Einer. Wir bilden $20^2 = 400$ und ziehen es von 841 ab. Der Rest 441 enthält noch das doppelte Produkt aus 20 und den Einern und das Quadrat der Einer. Die Einer mal $2 \cdot 20$ und das Quadrat der Einer müssen 441 ausmachen. Demnach erhalten wir die Einer, indem wir 40 in 441 dividieren und dafür Sorge tragen, dass wir auch noch das Quadrat der Einer

abziehen können. Es kann höchstens 9 Einer geben, da die Wurzel kleiner als 30 ist. Um zu sehen, ob 9 die richtige Einerzahl ist, haben wir das doppelte Produkt aus 20 und 9 (d. h. $9 \cdot 40 = 360$) und das Quadrat von 9 ($= 81$) zu bilden. Ihre Summe muss 441 geben, oder ziehen wir ihre Summe von 441 ab, so muss es aufgehen.

c) Entwickle auf gleiche Weise z. B. 37^2 , und ziehe die Wurzel daraus.

Kürzere
Dar-
stellung.

5) a) Wir wollen uns eine kürzere Darstellung merken, die uns namentlich später grosse Vorteile bieten wird. Wir zeichnen nochmals das Quadrat über 29 mm und drücken seinen Inhalt auf zweifache Art aus.

Es ist $29 \text{ mm} = 2 \text{ cm} + 9 \text{ mm}$; $29 = 2 \text{ Zehner} + 9 \text{ Einer} = 2^Z + 9^E$.

$$(2^Z + 9^E)^2 = (2^Z)^2 + 2 \cdot (2^Z \cdot 9^E) + (9^E)^2 = \begin{array}{r} 4 \dots \text{HZE} \\ 36 \dots \\ 81 \dots \\ \hline 841 \end{array}$$

Fig. 69.

$2^Z \cdot 9^E$	$(9^E)^2$
$(2^Z)^2$	$2^Z \cdot 9^E$
Z 2	E 9

Das Quadrat der zweistelligen Zahl 29 enthält 1) das Quadrat der 2 Zehner ($= 4$ Hunderter), 2) das doppelte Produkt der 2 Zehner und 9 Einer ($= 36$ Zehner) und das Quadrat der 9 Einer ($= 81$ Einer). Achte auf die Ziffernstellung dieser 3 Bestandteile 4, 36, 81; jeder folgende reicht eine Stelle weiter rechts (ausführlich!).

b) Nun wollen wir wiederum die Wurzel aus 841 suchen.

$$\begin{array}{r} \text{ZE} \\ \sqrt{8'41} = 29 \\ \underline{4} \\ 44'1 : 4 \\ \underline{36} \\ 81 \\ \underline{\quad} \\ \quad \end{array}$$

Teile 841 in Klassen ein. Wieviel Stellen bekommt die Wurzel? Sie besitzt Zehner und Einer. Wie setzt sich 841 aus diesen

zusammen? Was enthält 8 in erster Linie? (Das Quadrat der Zehner.) Wir nehmen auf eine Einheit genau die Wurzel aus 8 Hundertern; sie ist 2 Zehner. Ziehen wir das Quadrat dieser 2 Zehner (d. i. 4 Hunderter) von 8 H. ab und nehmen die zweite Klasse (41) herunter, so enthält der Rest noch das doppelte Produkt der Zehner und Einer und das Quadrat der Einer; und zwar muss ersteres in 44 enthalten sein, da es nur eine Stelle weiter nach rechts reicht als das Quadrat der Zehner. $2 \cdot 2^Z = (4 Z)$ mal die unbekanntes Einer gibt eine Zahl, die in 44 enthalten ist. Um die Einer zu erhalten, dividieren wir 44 durch die doppelte erste Stelle der Wurzel, bedenken aber, dass in 44 auch die Zehner enthalten sind, die vom Quadrat der Einer herrühren. Wir versuchen, ob die höchste Einerzahl, 9, passt. Zur Prüfung haben wir das doppelte Produkt der Zehner und Einer, $9 \cdot 4^Z = 36^Z$, und das Quadrat der Einer, $9^2 = 81^E$, zu bilden; die Summe dieser beiden Ausdrücke muss 441 sein; ziehen wir beide von 441 ab, so muss es aufgehen. Wir nehmen also $9 \times 4^Z = 36^Z$ und schreiben 36 unter 44, — eine Stelle weiter rechts als das vorhergehende Quadrat — ferner $9^2 = 81^E$ und rücken damit um eine Stelle weiter rechts, so dass 8^Z unter die Zehner, 1 Einer unter 1 Einer zu stehen kommt. Die Subtraktion ergibt den Rest 0. 29 ist die richtige Wurzel. Wo steht die Probe für die Richtigkeit?

c) Bilde auf gleiche Weise wie 29^2 auch 37^2 , und suche zur Quadratzahl wieder die Wurzel.

Hat die Zahl a Zehner und b Einer, so ist $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ und $\sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b$.

Verallgemeinerung. Vergleiche das nackte Verfahren bei beiden Beispielen.

Satz 31. Um aus einer drei- oder vierstelligen Quadratzahl die Wurzel zu ziehen, teilt man sie, von den Einern ausgehend, in zweistellige Klassen ein, nimmt die Wurzel aus der ersten Klasse auf eine Einheit genau und erhält die Zehnerstelle der Wurzel; ihr Quadrat zieht man von der ersten Klasse ab und nimmt die folgende Klasse herunter. Den Rest mit Ausnahme der letzten Stelle dividiert man durch die doppelte erste Stelle der Wurzel und erhält die zweite Stelle (Einerstelle) der Wurzel. Die gefundene zweite Stelle wird mit dem Divisor (doppelte erste Stelle) multipliziert und das Ergebnis so unter den Rest geschrieben, dass es eine Stelle weiter rechts als

das Quadrat der ersten Wurzelstelle reicht. Dann bildet man das Quadrat der zweiten Stelle und setzt es so unter das hingeschriebene doppelte Produkt, dass es eine Stelle weiter rechts als dieses reicht. Ergibt die Subtraktion den Rest 0, so hat man die richtige Wurzel gefunden.

d) Wende das gleiche Verfahren auf $\sqrt{8,41}$; $\sqrt{0,0841}$ an. Es gilt auch für Dezimalbrüche. Die Klasseneinteilung geschieht hier vom Komma aus nach beiden Seiten.

Übungen.

1) Eine rechteckige Wiese ist 54 m lang und 24 m breit; welche Seite hat eine quadratische Wiese von gleichem Inhalt?

2) Ein rechtwinkliges gleichschenkliges Giebdreieck hat einen Flächeninhalt von $5,12 \text{ m}^2$. Wie viel misst eine seiner Katheten.

3) Berechne $\sqrt{5041}$, $\sqrt{27,04}$ und $\sqrt{0,0361}$.

II. Die Quadratwurzel aus beliebigen Zahlen.

1) Indem man genau zusehen würde, wie das Quadrat einer mehrstelligen Zahl entsteht, würde man das Verfahren finden, um aus beliebigen Quadratzahlen die Wurzel zu ziehen. Wir beschränken uns darauf, das Verfahren an einigen Beispielen zu erläutern.

$$1) \sqrt{6872,41} = 82,9$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \hline 47'2 : 16 \\ 32 \\ \hline 4 \\ 1484'1 : 164 \\ 1476 \\ \hline 81 \\ \hline - \end{array}$$

$$2) \sqrt{94864} = 308$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ \hline 48 : 6 \\ \hline 486'4 : 60 \\ 480 \\ \hline 64 \\ \hline - \end{array}$$

$$3) \sqrt{0,054756} = 0,234$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 14'7 : 4 \\ 12 \\ \hline 9 \\ 185'6 : 46 \\ 184 \\ \hline 16 \\ \hline - \end{array}$$

$$4) \sqrt{5} = \sqrt{5,000000} = 2,236$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 10'0 : 4 \\ 84 \\ \hline 160'0 : 44 \\ 132 \\ \hline 9 \\ 2710'0 : 446 \\ 2676 \\ \hline 36 \\ \hline 304 \end{array}$$

Prüfe die Richtigkeit durch Quadrieren der Wurzel.

Um die Wurzel aus einer Zahl (6872,41) zu ziehen, teilt man sie vom Komma aus nach links und rechts in Klassen von je zwei Stellen ein; dann zieht man auf eine Einheit genau die Wurzel aus der ersten Klasse (68) links und erhält die erste Stelle der Wurzel (8); ihr Quadrat wird von der ersten Klasse abgezogen und die folgende Klasse (72) wird herunter genommen und angeschlossen; dieser Teil des Restes mit Ausnahme der letzten Stelle wird durch die doppelte erste Stelle der Wurzel dividiert, (wobei zu beachten ist, dass man den Quotienten nicht zu hoch wählt, weil auch sein Quadrat abzuziehen ist), ($47 : 16 = 2$), wodurch man die zweite Stelle (2) der Wurzel erhält. Diese wird mit dem Divisor (16) multipliziert und dann quadriert. Das erste Produkt (32) wird unter den Dividenden (47) gestellt, während man das Quadrat eine Stelle weiter rechts schreibt; nachdem man diese Ausdrücke subtrahiert hat, nimmt man die folgende Klasse (41) herunter und dividiert den erhaltenen Rest (14841) mit Ausnahme der letzten Stelle durch das Doppelte des gefundenen Teils der Wurzel ($1484 : 164 = 9$) und erhält die dritte Stelle derselben; diese wird 1) mit dem letzten Divisor multipliziert und 2) quadriert. Das erste Produkt (1476) wird unter den letzten Dividenden (1484), das Quadrat eine Stelle weiter rechts gestellt, und beides wird subtrahiert. Geht es auf, und hat der Radikand keine Klassen mehr, so ist die genaue Wurzel gefunden. Bleibt ein Rest übrig, so nimmt man die folgende Klasse herunter, falls der Radikand noch eine solche besitzt; andernfalls hängt man zwei Nullen an und dividiert den Rest mit Ausnahme der letzten Stelle durch das Doppelte des gefundenen Teiles der Wurzel u. s. f. Die Stellung des Komma ergibt sich unmittelbar.

2) Eine einfachere Darstellung ergibt sich, wenn man jeweilen das Quadrat vor dem doppelten Produkte hinschreibt und die zweite Stelle des Quadrats, falls es eine solche besitzt, sofort zum doppelten Produkte schlägt; siehe folgende Beispiele:

$$\sqrt{68'72'41} = 829$$

64	:	16
47'2	:	16
32'4	:	164
1484'1	:	164
1484 1	:	164
—		—

Die bequemste Darstellung ist folgende:

$$\sqrt{68'72'41} = 829$$

64	:	16 ₂	←	
472	:	16 ₂	←	
324	:	164 ₉	←	
14841	:	164 ₉	←	
14841	:	164 ₉	←	
—		—		

Übungen.

1) Gib die vollständige Lösung von Aufgabe 2.

$$\sqrt{7185} = ? \text{ auf 2 Dezimalstellen genau.}$$

2) Wieviel misst der Radius des Kreises, der gleichen Inhalt hat wie der Boden des Schulzimmers?

Es sei $l = 8$ cm, $b = 5,5$; dann muss $r^2 \pi = 8 \cdot 5,5 = 44$ sein.

$$r^2 = 44 : 3^{1/7} = 14$$

$$r = \sqrt{14} = ?$$

Vergleiche den Umfang des Zimmers mit demjenigen des Kreises.

3) Welchen Durchmesser hat ein cylindrisches Litergefäß, welches 20 cm hoch ist? $r^2 \pi \cdot 20$ (cm³) = 1000 (cm³)

$$r^2 = 1000 : 62,8 \text{ u. s. f.}$$

4) Welchen Radius hat die Kugel, welche dem Schulzimmer inhaltsgleich ist?

5) Bezeichne G den Inhalt der Grundfläche, g denjenigen der Deckfläche, H die Höhe eines Pyramidenstumpfs, so lautet die genaue Regel für die Berechnung seines Inhalts:

$$V = \frac{H}{3} (G + \sqrt{Gg} + g)$$

Bei Beispiel 1) Kap. J war $G = 49$ dm²; $g = 9$ dm²; $H = 5$ dm.

$$V = \frac{5}{3} (49 + \sqrt{49 \cdot 9} + 9) \text{ dm}^3 = \frac{5}{3} \cdot (49 + 21 + 9) \text{ dm}^3 = 131^{2/3} \text{ dm}^3.$$

Berechne auf gleiche Weise die Inhalte der andern Pyramidenstumpfe, die betrachtet wurden.

N. Der pythagoräische Lehrsatz.

I.

Wie haben wir in Kap. B, I. Teil, die schrägen Dachflächen berechnet? Die Breite der Dachflächen wurde nicht am Dache selbst gemessen; wir haben sie der Zeichnung der Giebelflächen entnommen.