

Der pythagoräische Lehrsatz

Autor(en): **Pünchera, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Jahresbericht des Bündnerischen Lehrervereins**

Band (Jahr): **17 (1899)**

Heft: **Der Geometrie-Unterricht in der I. und II. Klasse der Kantonsschule und in Realschulen**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-145645>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Übungen.

1) Gib die vollständige Lösung von Aufgabe 2.

$$\sqrt{7185} = ? \text{ auf 2 Dezimalstellen genau.}$$

2) Wieviel misst der Radius des Kreises, der gleichen Inhalt hat wie der Boden des Schulzimmers?

Es sei $l = 8$ cm, $b = 5,5$; dann muss $r^2 \pi = 8 \cdot 5,5 = 44$ sein.

$$r^2 = 44 : 3^{1/7} = 14$$

$$r = \sqrt{14} = ?$$

Vergleiche den Umfang des Zimmers mit demjenigen des Kreises.

3) Welchen Durchmesser hat ein cylindrisches Litergefäß, welches 20 cm hoch ist? $r^2 \pi \cdot 20 \text{ (cm}^3\text{)} = 1000 \text{ (cm}^3\text{)}$

$$r^2 = 1000 : 62,8 \text{ u. s. f.}$$

4) Welchen Radius hat die Kugel, welche dem Schulzimmer inhaltsgleich ist?

5) Bezeichne G den Inhalt der Grundfläche, g denjenigen der Deckfläche, H die Höhe eines Pyramidenstumpfs, so lautet die genaue Regel für die Berechnung seines Inhalts:

$$V = \frac{H}{3} (G + \sqrt{Gg} + g)$$

Bei Beispiel 1) Kap. J war $G = 49 \text{ dm}^2$; $g = 9 \text{ dm}^2$; $H = 5 \text{ dm}$.

$$V = \frac{5}{3} (49 + \sqrt{49 \cdot 9} + 9) \text{ dm}^3 = \frac{5}{3} \cdot (49 + 21 + 9) \text{ dm}^3 = 131^{2/3} \text{ dm}^3.$$

Berechne auf gleiche Weise die Inhalte der andern Pyramidenstumpfe, die betrachtet wurden.

N. Der pythagoräische Lehrsatz.

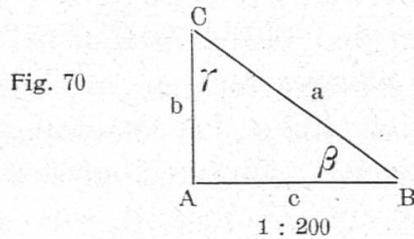
I.

Wie haben wir in Kap. B, I. Teil, die schrägen Dachflächen berechnet? Die Breite der Dachflächen wurde nicht am Dache selbst gemessen; wir haben sie der Zeichnung der Giebelflächen entnommen.

Wir wollen nun zeigen, wie man diese Breite genau durch Rechnung finden kann.

1) a) Fig. 70 stellt uns die Giebelfläche eines Pultdachs im Massstabe 1 : 200 dar.

Erstes Beispiel.



Es wurde gemessen: $AB = c = 4 \text{ m}$; $AC = b = 3 \text{ m}$.
 Der Zeichnung entnehmen wir: $BC = a = 5 \text{ m}$; $W. \beta = 37^\circ$;
 $W. \gamma = 53^\circ$. Die Seite a ist also durch die Seiten b und c bestimmt.

Wir wollen zeigen, wie sich a aus b und c durch Rechnung ergibt.

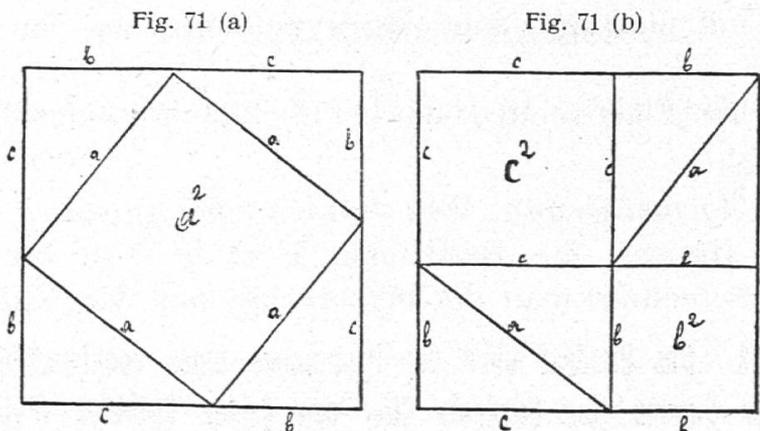
$$\text{Es ist } 5^2 = 4^2 + 3^2 = 25, \text{ somit: } a^2 = b^2 + c^2 = 25$$

$$\text{und } a = \sqrt{25} = 5$$

Wie erhält man also hier a aus b und c ? Man bildet die Summe der Quadrate von b und c und zieht daraus die Wurzel.

b) Wir wollen die Beziehung $a^2 = b^2 + c^2$ begründen.

Zu diesem Zwecke zeichnen wir zweimal das Quadrat von der Seite $(b + c)$. Fig. 71 a; Fig. 71 b.



In das Quadrat Fig. 71 a legen wir das rechtwinklige Dreieck $A B C$ viermal ein; dann entsteht in der Mitte ein gleichseitiges Viereck, dessen Seite die Hypotenuse a unseres rechtw. Dreiecks ist. Jeder seiner Winkel wird durch die Dreieckswinkel β und γ zu 180° ergänzt; da letztere zusammen 90° betragen, sind die Winkel dieses Vierecks rechte; letzteres ist also

ein Quadrat; sein Inhalt ist gleich a^2 ($=25 \text{ m}^2$). Fig. 71 b zeigt uns, dass das Quadrat über der Seite $(b + c)$ auch zusammengesetzt werden kann, 1) aus dem Quadrat über der Kathete b (b^2), 2) aus dem Quadrat über der Kathete c (c^2) und aus vier Dreiecken, die dem gegebenen Dreiecke $A B C$ kongruent sind. Denken wir uns nun von den beiden gleichen Figuren 71 a und 71 b dieselben 4 Dreiecke weggeschnitten, so bleibt links dasselbe übrig wie rechts, nämlich links das Quadrat über der Hypotenuse a , rechts die beiden Quadrate über den zwei Katheten b und c .

Es folgt also: *Das Quadrat über der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks $A B C$ hat gleichen Inhalt wie die beiden Quadrate über den zwei Katheten zusammen.*

$$\text{Kurz: } a^2 = b^2 + c^2.$$

Bemerkung. Um den rechtwinkligen Grundriss eines Hauses abzustecken, bilden die Bauarbeiter mit drei Schnüren, die bezw. 3 m, 4 m, 5 m messen in jeder Ecke ein rechth. Dreieck.

Zweites
Beispiel.

2) Beim Pultdach, das wir in Karton nachgebildet haben, war $b = 2 \text{ m}$, $c = 3 \text{ m}$. Zeichne die Giebelfläche, sowie die beiden Quadrate über $(b + c)$, und beweise, dass $a^2 = b^2 + c^2$.

$$\text{Hier ist also } a^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

$$a = \sqrt{13} = 3,60 \text{ m.}$$

Wie hat man also hier die Hypotenuse aus den Katheten berechnet?

Welchen Flächeninhalt hat die Deckfläche, wenn ihre Länge 4 m beträgt?

Verallgemeinerung. Wie wird man bei irgend einem rechtwinkligen Dreieck die Beziehung $a^2 = b^2 + c^2$ nachweisen?

Wie berechnet man die Hypotenuse aus den Katheten?

Satz 32. Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten (Pythagoräischer Lehrsatz). Man berechnet die Hypotenuse aus den beiden Katheten, indem man die Summe ihrer Quadrate bildet und daraus die Wurzel zieht.

Übungen.

1) Die Basis einer gleichschenkligen Giebelfläche, die wir früher berechnet hatten, misst 12 m, ihre Höhe 4 m, die Länge

des Estrichs 20 m. Berechne die schrägen Dachkanten, sowie die Dachflächen.

2) Die Höhe einer ungleichseitigen Giebelfläche, die wir früher ausgemessen hatten, beträgt 4 m; die Abschnitte, welche sie auf der Basis macht, messen 5 m und 4 m. Berechne die Länge der schrägen Giebelkanten.

3) Wie haben wir den Mantel des geraden Kegels (Turms) berechnet, dessen Radius = 3 m, dessen Höhe = 8 m betrug?

Wir haben nach der Regel: Mantel = $r \cdot \pi \cdot s$ gerechnet und die Länge der Seitenlinie (8,5 m) der Aufrisszeichnung entnommen. Bestimme die Länge der Seitenlinie durch Rechnung. Prüfe die Genauigkeit der früheren Berechnung.

4) Wir haben in Fig. 48 eine quadratische Pyramide dargestellt und berechnet, deren Grundkante 6 m, deren Höhe 10 m betrug. Aus Fig. 48a ersieht man leicht, wie man die Höhe einer Seitenfläche berechnen kann, welche zur Berechnung der Seitenflächen bekannt sein muss.

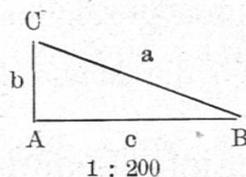
Um das Netz genau zu zeichnen, mussten wir die Länge einer Seitenkante der Zeichnung entnehmen. Benutze Fig. 48b, um sie genau zu berechnen.

Verbinde mit diesen Aufgaben eine Repetition.

II. Berechnung einer Kathete aus der Hypotenuse und der andern Kathete.

Eine Rampe von 4 m Länge ist 1,6 m hoch. Wie lang ist ihre Basis?

Fig. 72.



$$a = 4 \text{ m}; b = 1,6 \text{ m.}$$

Nach Satz 32 ist: $c^2 + b^2 = a^2$, oder $c^2 + 1,6^2 = 4^2$.

$$\text{Also } c^2 = a^2 - b^2; c^2 = 16 - 2,56 = 13,44.$$

$$\text{Somit } c = \sqrt{a^2 - b^2}; c = \sqrt{13,44} = 3,66 \text{ m.}$$

Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Quadrate über der Hypotenuse weniger

dem Quadrate über der anderen Kathete. Man berechnet eine Kathete, indem man vom Quadrat der Hypotenuse das Quadrat der anderen Kathete subtrahiert und aus der Differenz die Wurzel zieht.

Übungen.

1) Die Seitenlinie eines Trichters, den man als Kegel ansehen darf, misst 23 cm, seine grösste Weite 18 cm. Berechne die Höhe des Trichters und das Quantum Wasser, das er hält, wenn man die kleine Öffnung schliesst.

2) Zeichne den Grund- und den Aufriss eines Turmdaches mit Kegelform, dessen Grundfläche einen Durchmesser von 9 m hat, und dessen Seitenlinie 12 m misst. Berechne genau die Höhe dieses Turmdaches.

3) Eine Leiter von 7 m Länge ist so aufgestellt, dass ihr Grundriss 3,2 m misst. Wie hoch ist der höchste Punkt der Leiter?

O. Ergänzung zur Ausmessung von Grundstücken.

I. Horizontale Grundstücke.

Messet mehrere horizontale Grundstücke von unregelmässiger Form aus, indem ihr sie auf passende Weise in Dreiecke und rechtwinklige Trapeze zerlegt.

Fig. 73, Fig. 74, Fig. 75 stellen Beispiele für diese Zerlegung dar. Berechne diese gezeichneten Grundstücke.

Entnimm bei Fig. 75 die Masse aus der Zeichnung.

II. Schiefe Grundstücke.

1) Vor uns liegt eine Böschungfläche, welche die Form eines Rechtecks hat, dessen Grundlinie horizontal läuft.

Es soll der Nutzungswert dieser Fläche à 20 Rp. per m² berechnet werden.

Man berechnet nicht die Böschungfläche selbst, sondern ihren Grundriss, weil der Ertrag von diesem abhängt.