

Das dreiseitige Prisma und das Dreieck

Autor(en): **Pünchera, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Jahresbericht des Bündnerischen Lehrervereins**

Band (Jahr): **17 (1899)**

Heft: **Der Geometrie-Unterricht in der I. und II. Klasse der Kantonsschule und in Realschulen**

PDF erstellt am: **23.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-145622>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

in gleichem Masse das Spiegelbild immer so, dass z. B. das rechte Auge und sein Bild sich auf derselben Senkrechten zum Spiegel befinden und zwar in gleichem Abstände davon. Wie liegen stets die rechte Hand und ihr Bild? etc. . . .

Satz 12. Ein Punkt und sein Spiegelbild liegen in gleichem Abstände vom Spiegel auf einer Senkrechten zu diesem.

Um-
klappen.

d) Führe einen Schnitt durch das Bild der Wandfläche längs der Symmetrieachse und klappe die beiden Teile zusammen. Die beiden Teile decken sich genau. Welche Punkte fallen zusammen? A kommt auf A', B auf B'. Durch Umklappung um die Symmetrieachse kommen zwei symmetrische Punkte zur Deckung.

e) Man sagt, die Symmetrieachse M N teilt das Rechteck in zwei symmetrische Teile; das Rechteck ist eine symmetrische Figur.

Kann man das Rechteck noch auf eine zweite Art in zwei symmetrische Teile zerlegen? Hat es noch eine zweite Symmetrieachse? Die zweite Symmetrieachse verbindet die Mitte der zwei andern Gegenseiten. Zeichne das Rechteck nochmals; konstruiere diese zweite Symmetrieachse und symmetrische Punktpaare.

Übungen.

- 1) Stelle zwei gleiche Blumenvasen, eine Lampe und zwei gleiche Becher auf der Kommode symmetrisch auf.
- 2) Weise die Symmetrie des menschlichen Körpers nach.
- 3) Betrachte ein symmetrisches Blatt einer bekannten Pflanze. Zeichne ein solches.
- 4) Wie viele Symmetrieachsen besitzt das Quadrat?

B. Das dreiseitige Prisma und das Dreieck.

I. Der Estrichraum mit rechtwinkligen Giebeln.

1) Die meisten Räumlichkeiten unseres Hauses sind rechtwinklige Körper. Sie unterscheiden sich im wesentlichen nur in den Ausdehnungen.

Eine ganz andere Form hat der Estrichraum. Wir wollen diesen besichtigen. Die Dachflächen sind nicht senkrecht wie die Zimmerwände; sie sind geneigt und laufen in der Firstkante zusammen. Warum gibt man ihm diese Lage? Welche Vorteile

bieten schräge Dächer gegenüber ebenen Holzcementdächern? Wozu verwendet man den Estrichraum?

Wir wollen diese Raumform genau studieren. Um uns dieses Studium zu erleichtern, wollen wir zuerst einen Dachraum mit einer einzigen schrägen Dachfläche betrachten. (Pultdach.) Wo habt ihr einen solchen gesehen? (Beim Anbau vieler Häuser, bei Holzschöpfen, bei Waschhäusern, bei Hütten etc.)

2) Wir wollen einen solchen Pultdachraum, der eine ähnliche Verwendung findet wie der Estrichraum, besichtigen, beschreiben und nachbilden.

a) Die Grundfläche ist ein Rechteck, dessen Länge und Breite mit der Länge und Breite des Unterbaues übereinstimmt. Die schräge rechteckige Dachfläche ruht auf zwei senkrechten Giebelflächen und auf einer senkrechten rechteckigen Wandfläche. Die beiden Giebelflächen sind keine Rechtecke; jede von ihnen hat nur drei Kanten und nur drei Ecken und heisst ein Dreieck. Diese Raumform ist begrenzt von 5 Flächen, von 3 Rechtecken und 2 Dreiecken. Sie hat 9 Kanten, 5 wagerechte, 2 senkrechte und 2 schräge Kanten. Diese Kanten treffen sich in 6 Ecken.

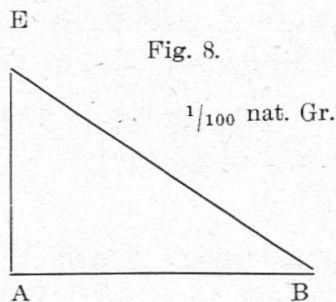
Beschreibung des Pultdachs.

b) Versucht, den Dachstuhl mit Stäben nachzubilden. Wir messen die Länge, die Breite und die Höhe ($l. = 6 \text{ m}$, $b. = 3 \text{ m}$, $h. = 2 \text{ m}$) und stellen zuerst mit 4 Stäben den Boden A B C D dar. Zwei Stäbchen, deren Länge der Höhe entspricht, stellen wir in A und C auf (Fig. 9) und können dann leicht das Dach legen.

Konstruktion aus Stäbchen.

c) Nun wollen wir die Giebelfläche, deren Form uns neu ist, genauer betrachten. Zeichne eine der dreieckigen Giebelflächen, indem du zuerst die Breite A B und senkrecht zu ihr die Höhe A E hinzeichnest.

Die Figur A B E hat 3 Seiten und drei Eckpunkte und heisst ein *Dreieck*. Weil die Seite A B rechtwinklig zur Seite A E steht, heisst sie genauer ein *rechtwinkliges Dreieck*.



Die beiden Seiten A B und A E, welche einen rechten Winkel bilden, heissen Katheten des rechtwinkligen Dreiecks A B E. Die dritte Seite B E, die dem rechten Winkel gegenüberliegt, heisst Hypotenuse. Sie ist gegen A B geneigt. Man sagt,

Das rechtwinklige Dreieck.

Das rechtwinklige Dreieck.

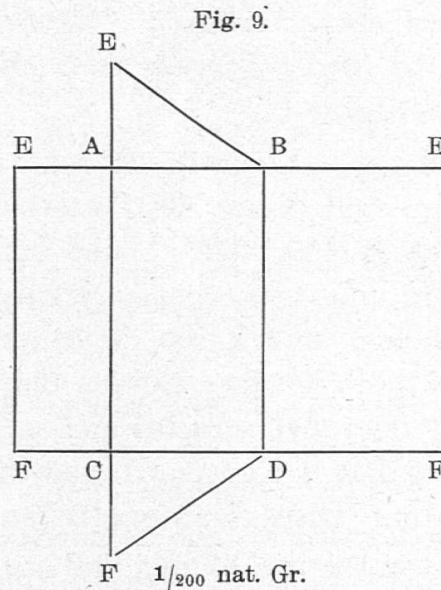
sie bildet mit A B einen spitzen Winkel; desgleichen sagt man, sie bilde mit A E einen spitzen Winkel.

Miss die Länge der Hypotenuse in der Zeichnung und am Dache, und vergleiche die Masszahlen.

d) Versuche nun, diesen Dachkörper in Karton nachzubilden. Zeichne zuerst das Netz.

Wie erhält man die Länge von B E und D F?

Das Netz.

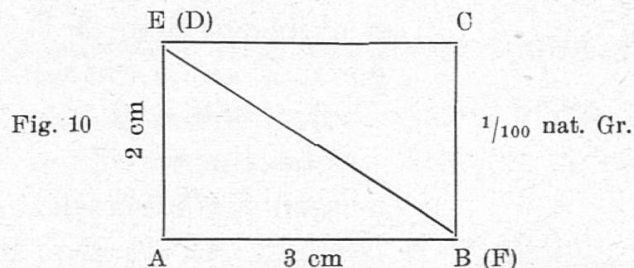


Vergleiche die beiden Giebelflächen A B E und C D F. Wir können sie aufeinanderlegen, dass sie sich decken. Wir sagen darum, sie sind kongruent (sich deckend).

3) Berechnung der Oberfläche des Dachraums.

Aufgabe 1. *Wieviel m² Bretter braucht man zur Konstruktion dieser Räumlichkeit? Wieviel kosten diese Bretter à 3¹/₂ Fr. pro m²?*

a) Die 3 rechteckigen Flächen können wir berechnen. Wie bestimmen wir die Anzahl m², welche die Giebelflächen enthalten? Wir schneiden das Dreieck C F D aus und legen es so



an A B E, dass D auf E und F auf B zu stehen kommt. Dann bilden sie das Rechteck A B C E, dessen Grundlinie A B = 3 cm,

dessen Höhe $A E = 2$ cm misst. Dieses enthält also $3 \cdot 2$ cm² = 6 cm².

Wie gross ist der Inhalt einer Giebelfläche?

Inhalt des
rechtw.
Dreiecks.

$$\text{Inhalt von } A B E = \frac{1}{2} \text{ Inhalt des Rechtecks } A B C E = \frac{3 \cdot 2 \text{ cm}^2}{2} = 3 \text{ cm}^2.$$

Wir erhalten den Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks $A B E$, indem wir seine 2 Katheten messen, die Masszahlen multiplizieren und das Produkt durch 2 dividieren.

Nun können wir die gesamte Oberfläche berechnen.

| | | | | | |
|--------------------------|-------------------------|--------------------|--------------|------|----------------|
| Inhalt des Bodens | $A B C D = 6 \cdot 3$ | $\text{cm}^2 = 18$ | in der Natur | 18 | m ² |
| „ der Wandfläche | $A C F E = 6 \cdot 2$ | „ = 12 | „ „ „ | 12 | „ |
| „ „ Dachfläche | $B D F E = 6 \cdot 3,6$ | „ = 21,6 | „ „ „ | 21,6 | „ |
| „ „ beiden Giebelflächen | $= 3 \cdot 2$ | „ = 6 | „ „ „ | 6 | „ |
| Ganze Oberfläche | | $= 57,6$ | „ | 57,6 | „ |

Fasse 2) die drei rechtwinkligen Flächen als ein einziges Rechteck auf.

$$\text{Preis der Bretter} = 57,6 \cdot 3\frac{1}{2} \text{ Fr.} = 201,6 \text{ Fr.}$$

b) Wieviel m² Bretter braucht man, 1) wenn die Wandfläche $A C E F$ durch die Hausmauer gebildet würde, 2) wenn die Giebelfläche $C D F$ frei wäre? Berücksichtige auch, dass die Dachfläche über den besprochenen Raum hinausragt.

4. Berechnung des Inhalts des Dachraums.

Womit kann man diesen Dachraum ausfüllen? Mit Holz, mit Getreide, mit Heu etc.

Aufgabe 1. *Wieviel m³ Holz hält dieser Dachraum?*

a) Leget 2 eurer Dachräume aus Karton so aneinander, dass die Dachflächen sich decken, und je 2 zusammenstossende Giebelflächen sich zu einem Rechteck ergänzen. Was für einen Körper bilden dann die beiden gleichen Dachkörper? Einen rechtwinkligen Körper. Wie könnte man den wirklichen Dachkörper zu einem rechtwinkligen Dachkörper ausbauen?

Inhalt
des Dach-
raums

$$\left. \begin{array}{l} \text{Der Rauminhalt des rechtw. Körpers} \\ \text{oder des doppelten Dachkörpers} \end{array} \right\} = \text{l. b. h.} = \text{Boden} \times \text{Höhe} \\ = 6 \cdot 3 \cdot 2 \text{ m}^3 = 36 \text{ m}^3.$$

Somit Inhalt des einfachen Körpers

$$= \frac{\text{l. b. h.}}{2} = \frac{\text{Boden} \times \text{Höhe}}{2} = 18 \text{ m}^3.$$

Zweites
Verfahren.

b) Wir wollen den Kartonkörper auf eine Giebelfläche legen. Dann ist seine Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck; desgleichen seine Deckfläche; seine Seitenflächen sind Rechtecke. Die 3 Seitenkanten stehen zur Grundfläche senkrecht; deshalb wollen wir den Körper ein senkrecht dreiseitiges Prisma nennen. Legen wir daran auf gleiche Weise wie vorher einen gleichen Kartonkörper, so entsteht das rechtwinklige Prisma, dessen Inhalt = Grundlinie \times Höhe ist.

Inhalt des Dachkörpers = $\frac{1}{2}$. Grundfläche des rechtwinkligen Prismas \times Höhe. Nun ist aber die halbe Grundfläche des Doppelkörpers nichts anderes als die Grundfläche des senkrecht gestellten Dachkörpers.

$$\begin{aligned} \text{Somit Inhalt unseres dreiseitigen Prismas} \\ &= \text{Seine Grundfläche} \times \text{seine Höhe} \\ &= \frac{3 \cdot 2}{2} \cdot 6 \text{ m}^3 = 18 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Dieses senkrechte dreiseitige Prisma wird daher berechnet, indem man die Anzahl m^2 seiner Grundfläche bestimmt und diese Zahl mit der Zahl m der Höhe multipliziert.

Der Inhalt unseres Dachkörpers ist also auch gleich Giebelfläche \times Firstkante.

5) Besichtige einen zweiten Estrichraum mit Pultdach; zeichne das Netz, und wiederhole die gleichen Betrachtungen und Berechnungen.

6) Betrachte auch ein zerlegbares Säulenmodell, oder durchschneide ein rechtwinkliges Prisma aus Schnee oder aus Lehm, so dass 2 dreiseitige Prismen entstehen. Ein solcher Schnitt heisst Diagonalschnitt. Zeichne die Grundfläche eines dieser rechtwinkligen Prismen, sowie die Schnittlinie. Sie heisst eine Diagonale dieses Rechtecks; sie teilt es in 2 kongruente Dreiecke, die durch Drehung zur Deckung gebracht werden können.

Verallgemeinerung. Vergleiche vorläufig die Merkmale und die Berechnungsart der betrachteten Giebelflächen. Die Merkmale und die Berechnungsart der Prismen wollen wir später verallgemeinern.

Satz 13. Bei einem rechtwinkligen Dreiecke schneiden sich zwei Seiten rechtwinklig. Sie heissen Katheten. Die dritte Seite heisst Hypotenuse.

Satz 14. Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks wird gefunden, indem man die Katheten misst, die Masszahlen multipliziert und das Produkt durch 2 dividiert.

Übungen.

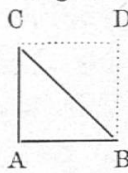
1) Beschreibe die 2 Körper, in welche ein Kubikdecimeter durch einen Diagonalschnitt zerlegt würde. Zeichne das Netz eines solchen Körpers, und berechne seine Oberfläche und seinen Inhalt.

Betrachte eines der Grundfläche des dm^3 zer- sind einander gleich. Wir *schenkliges rechtwink-*

Schneide das zweite welche Art kann es auf

Masstab 1 : 100

Fig. 11.



Dreiecke, in welche die legt wird. Seine Katheten nennen es ein *gleich-* *liges Dreieck.*

Dreieck B D C aus. Auf A B C gelegt werden?

1) Durch Drehung und 2) durch Umlegung.

2) Beschreibe das Dreieck aus Holz, das wir gebrauchen, um Linien zu zeichnen, die sich rechtwinklig schneiden, und das wir bisher kurzweg „Winkel“ nannten. Seine Katheten sind gleich. Es ist ein gleichschenkliges rechtwinkliges Dreieck. Ergänze es zum Quadrat.

II. Der Estrichraum mit gleichschenkligen Giebeln.

1) *Nun wollen wir den Estrichraum unseres Hauses beschreiben und versuchen, ihn nachzubilden.*

a) Wie viele und was für Flächen begrenzen den Estrich? Der Boden, zwei gleiche Giebelflächen und zwei gleiche Dachflächen. Der Boden ist ein Rechteck, das so lang und so breit wie das Haus ist. Die Dachflächen sind Rechtecke, deren Grundlinien gleich der Längskante des Hauses sind; sie haben die Firstkante gemein, die sich in der Mitte des Hauses zu befinden scheint. Darum erscheinen die Dachflächen gleich breit und gleich geneigt.

Beschreibung.

Jede Giebelfläche hat drei Kanten, wovon die eine, die Grundlinie, mit der Breitenkante des Hauses zusammenfällt. Die beiden andern sind augenscheinlich gleich geneigt und gleich lang. Diese Giebelflächen nennt man *gleichschenklige Dreiecke.*

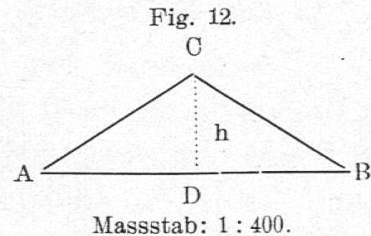
Die 5 Flächen des Estrichkörpers schneiden sich in 9 Kanten, wovon 5 wagerecht laufen, während 4 geneigt sind. Diese Kanten treffen sich in 6 Ecken.

Konstruktion aus Stäbchen.

b) Wie könnte man mit Holzstäbchen ein Modell des Dachstuhls herstellen? Welche Masse müssen wir zuerst nehmen? Die Länge und die Breite des Estrichbodens kennen wir schon: $l. = 20 \text{ m}$, $b. = 12 \text{ m}$. Die Firstkante ruht auf beiden Seiten auf einer vertikalen Stützsäule. Von ihrem Fusspunkt bis zu den Dachflächen sind es je 6 m ; die Stützsäule halbiert die Grundkante des Giebels und die Giebelfläche selbst. Ihre Höhe misst 4 m . Stellen wir nun mit 4 Stäbchen den Estrichboden dar, und stellen wir in der Mitte der Breitenkanten die Stäbchen auf, die den Stützsäulen entsprechen, so lässt sich die Firstkante legen, auf welche sich die Dachflächen stützen.

c) Es soll das Netz des Estrichkörpers (im Massstabe $1 : 400$) gezeichnet werden. Wir wollen zuerst eine Giebelfläche einzeln zeichnen, weil sie eine neue Form zeigt. Wir zeichnen zuerst die Grundkante $A B = 3 \text{ cm}$ und dann in ihrer Mitte senkrecht zu ihr die Stützsäule $D C = 1 \text{ cm}$. Die Giebelfläche $A B C$ setzt sich aus den zwei kongruenten rechtwinkligen Dreiecken, $A D C$ und $D B C$, zusammen, die durch Umklappung zur Deckung kommen. Daraus sehen wir, dass die Seite $C B =$ der Seite $C A$ ist, und dass sie gegen $A B$ gleich geneigt sind, was man auch ausdrückt, indem man sagt: $C B$ und $C A$ bilden mit $A B$ gleiche Winkel.

Die gleichschenklige Giebelfläche.



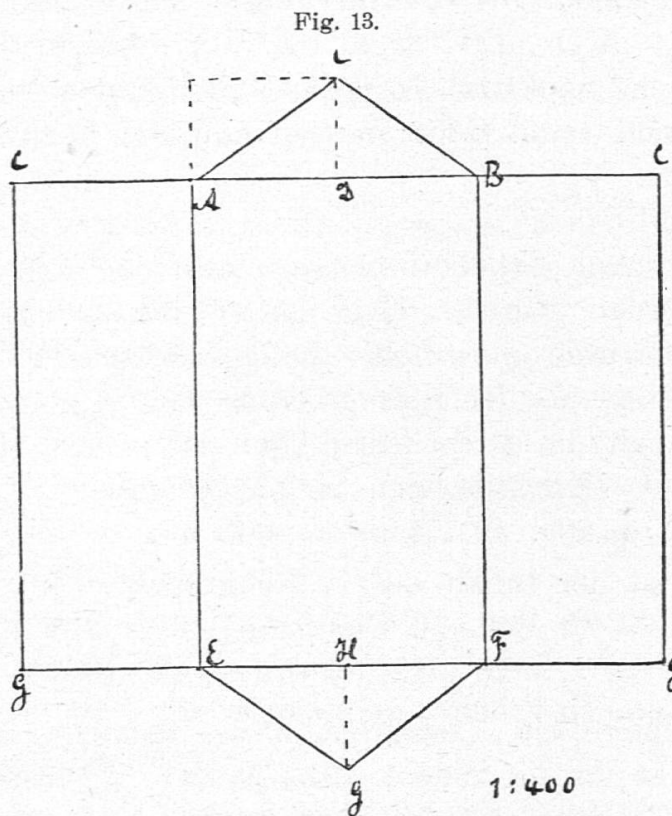
Spitzer und stumpfer Winkel.

Die Figur $A B C$ heisst gleichschenkliges Dreieck. $A B$ heisst Grundlinie; die gleichen Seiten $C A$ und $C B$ heissen Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks; $C D$ heisst Höhe desselben. Sie halbiert die Grundlinie und teilt das Dreieck $A B C$ in 2 kongruente rechtwinklige Dreiecke. D heisst Fusspunkt der Höhe. Achte auf die Neigung der Seiten $A C$ und $C B$. Wenn wir unsern „Winkel“ in die Ecke C hineinlegen, sehen wir, dass die beiden Schenkel $A C$ und $B C$ stärker gegeneinander geneigt sind oder einen grösseren Winkel bilden als zwei Linien, die sich rechtwinklig schneiden, während $C B$ und $C A$ gegen die Grundlinie eine kleinere Neigung haben als zwei sich rechtwinklig schneidende Linien. Man sagt, die Seite $A C$ und $B C$ schneiden sich unter stumpfem Winkel, oder sie bilden einen stumpfen Winkel, während die Schenkel mit der Grundlinie spitze Winkel bilden. Die Giebelfläche $A B C$ heisst eine stumpfwinklige Giebelfläche, weil die Dachflächen einen stumpfen Winkel bilden.

Miss die Schenkel A C und C B. $A C = 1,8 \text{ cm} = C B$.
In der Natur ist $A C = 7,2 \text{ m} = C B$. Wir brauchen diese
Kanten also nicht am Dache selbst zu messen.

Zeichne nun das ganze Netz im Massstabe 1 : 100 (in Fig. 13, Netz.
M. = 1 : 400). Beginne mit dem Boden A B E F, und zeichne
in D und H die Stützsäulen. Die Seite C A gibt dann die Breite
einer Dachfläche an.

d) Konstruiere das Estrichmodell im Massstab 1 : 50.



2) *Wieviel m^2 Bretter braucht man zur Konstruktion
der einzelnen Flächen, wieviel für die gesamte Oberfläche?
Was kostet die ganze Konstruktion à 4 Fr. pro m^2 ?*

a) Solche Giebelflächen haben wir bisher nicht berechnet.
Aber jede Giebelfläche setzt sich aus 2 rechtwinkligen Dreiecken
zusammen, die wir berechnen können.

Flächeninhalt von A D C = $\frac{6 \cdot 4}{2} m^2$ (natürliche Grösse)

$$A B C = \frac{2 \cdot 6 \cdot 4}{2} m^2 = 6 \cdot 4 m^2 = 24 m^2 =$$

$$E G F = \frac{2 \cdot 6 \cdot 4}{2} m^2 = 6 \cdot 4 m^2 = 24 m^2.$$

2

Berechnung der Oberfläche.

$$\begin{aligned} \text{Beide Giebelflächen} &= 2 \cdot 24 \text{ m}^2 = 48 \text{ m}^2 \\ \text{„ Dachflächen} &= 2 \cdot 20 \cdot 72 \text{ „} = 288 \text{ „} \\ \text{Bodenfläche} &= 20 \cdot 12 \text{ „} = 240 \text{ „} \\ \hline \text{Gesamte Oberfläche} &= 576 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Zweite Erklärung.

b) Die Regel für die Berechnung des Giebels A B C können wir noch auf eine anschaulichere Art zeigen.

Schneide das Dreieck D B C aus, klappe es um, und lege es an A C an; dann bildet es mit A D C ein Rechteck. Der Inhalt der beiden Dreiecke ist dann gleich dem Inhalt des Rechtecks $= A D \cdot D C = 6 \cdot 4$. Wir erhalten daher den Inhalt des gleichschenkligen Dreiecks A B C, indem wir seine halbe Grundlinie und seine Höhe messen und die beiden Masszahlen multiplizieren.

Inhalt des Estrichraums.

3) Berechne das Volumen des Estrichs.

a) Würden wir die Hausmauern bis zur Firsthöhe verlängern, so würde ein rechtwinkliger Körper entstehen, der doppelt so gross als der Estrichkörper wäre.

$$\begin{aligned} \text{Der Inhalt dieses rechtwinkligen Körpers wäre} \\ &= \text{Estrichboden} \times \text{Firsthöhe} \\ &= 20 \cdot 12 \cdot 4 \text{ m}^3 = 960 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Somit ist der Inhalt des Estrichkörpers} \\ &= \frac{1}{2} \text{ Boden} \cdot \text{Firsthöhe} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 12 \cdot 4 \text{ m}^3 = 480 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Zweite Erklärung.

b) Halbiere ein Kartonmodell des Estrichs, und lege die eine Hälfte so an die andere, dass je zwei anstossende Giebelflächen ein Rechteck bilden. In dieser Zusammenstellung bilden die beiden Estrichhälften ein rechtwinkliges Prisma. Wir wollen es senkrecht auf die Giebelfläche stellen; dann hat seine Grundfläche gleichen Inhalt wie die Giebelfläche, und seine Höhe ist die Firstkante. Sein Inhalt ist $= \text{Grundfläche} \times \text{Höhe}$, somit

$$\begin{aligned} &= \text{Giebelfläche} \times \text{Höhe} \\ &= \frac{12 \cdot 4}{2} \cdot 20 \text{ m}^3 = 480 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

Der Estrichkörper kann also auch berechnet werden, indem man seine Giebelfläche und die Länge der Firstkante misst und die Masszahlen multipliziert.

Beschreibe das Kartonmodell in senkrechter Lage. Grund- und Deckfläche sind kongruente Dreiecke. Die Seitenflächen

sind Rechtecke; die Seitenkanten stehen zur Grundfläche senkrecht. Wir nennen ihn deshalb wie den frühern Dachkörper ein senkrechtes dreiseitiges Prisma.

Sein Inhalt = Grundfläche \times Höhe.

4) *Der Estrichraum werde vom Giebel weg in einer Länge von 4 m mit Getreide gefüllt. Wieviel m³ können hineingelegt werden?* Denken wir uns diesen Teil des Estrichs auf den Giebel senkrecht aufgestellt, so ist er ein senkrechtes Prisma mit dem Giebel als Grundfläche und mit der Höhe von 4 m.

$$\text{Inhalt} = 6 \cdot 4 \cdot 4 \text{ m}^3 = 96 \text{ m}^3.$$

5) *Miss eine gleichschenklige Giebelmauer aus, beschreibe die Giebelfläche, und berechne ihr Volumen, sowie die Erstellungskosten à 15 Fr. per m².*

Zweites
Beispiel.

Grundkante = 12 m, Firsthöhe = 4 m, Mauerdicke = 40 cm.

Man denke sich wieder die Giebelmauer umgelegt, so dass die Giebelfläche wagerecht zu liegen kommt; dann kann man wieder die 2 Hälften so aneinander legen, dass sie ein rechtwinkliges Prisma bilden, dessen Grundfläche = der Giebelfläche, dessen Höhe = der Mauerdicke ist.

$$\begin{aligned} \text{Somit Volumen der Mauer} &= \text{Giebelfläche} \times \text{Dicke,} \\ &= 6 \cdot 4 \cdot 0,4 \text{ m}^3 = 9,6 \text{ m}^3. \end{aligned}$$

$$\text{Erstellungskosten} = 144 \text{ Fr.}$$

Verallgemeinerung. Vergleiche die Merkmale und die Berechnungsart der Giebelflächen, die wir gezeichnet haben. Die Merkmale und die Berechnung der Prismen wollen wir später verallgemeinern.

Satz 15. Ein gleichschenkliges Dreieck hat zwei gleich lange Seiten, welche Schenkel heißen. Die dritte Seite heisst Grundlinie, die ihr gegenüberliegende Ecke Spitze und der senkrechte Abstand der Spitze von der Grundlinie Höhe des Dreiecks.

Satz 16. Für die Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks gilt die Regel:

$$\text{Inhalt} = \text{halbe Grundlinie} \times \text{Höhe} = \frac{\text{Grundlinie} \times \text{Höhe}}{2} = \frac{\text{g. h.}}{2}$$

Übung.

Betrachte die Giebelmauer einer Kirche. Alle Kanten schneiden sich unter spitzen Winkeln. Diese Giebelfläche heisst spitzwinklig. Miss die Breite, und schätze die Höhe. Zeichne die Giebelfläche, und berechne sie. Wieviel m³ Mauerwerk enthält der Giebel, wenn die Dicke der Mauer 50 cm beträgt?

III. Der Estrichraum mit ungleichseitigen Giebeln.

Es gibt auch Häuser, deren zwei Dachflächen nicht gleich breit sind und deshalb verschiedene Neigung haben.

1) *Besichtige den Estrich eines solchen Hauses, und bilde ihn nach.*

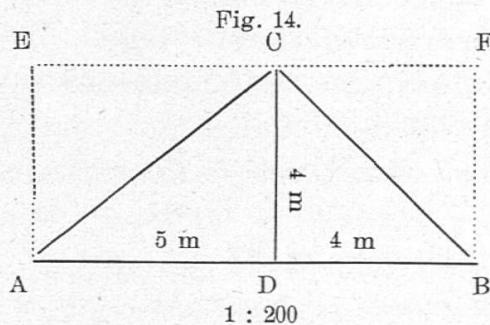
Beschreibung.

Wie liegt hier die Firstkante? Wie teilt die Stützsäule der Firstkante (oder eine Stange, die wir vertikal darunter halten) die Giebelfläche? Wie steht es mit der Länge und der Neigung der schrägen Kanten der Giebelfläche? Diese Giebelfläche heisst ein ungleichseitiges Dreieck.

Welche Masse musst du nehmen, um diese Giebelfläche A B C im verkleinerten Massstab zeichnen zu können?

Zeichnung der Giebelfläche.

Wir messen die Abschnitte A D und D B, welche die Stützsäule auf der Grundkante des Giebels macht, sowie die Länge der Stützsäule. A D = 5 m, D B = 4 m, Firsthöhe = 4 m.



Die Figur A B C heisst ein *ungleichseitiges Dreieck*. A B ist seine Grundlinie, C D seine Höhe, C seine Spitze; D heisst der Fusspunkt der Höhe. Die kürzere von den schrägen Seiten, B C, ist gegen die Grundlinie stärker geneigt als die längere. Beide bilden mit A B spitze Winkel. Die beiden Kanten A C und C B bilden einen stumpfen Winkel. Die Giebelfläche A B C heisst deshalb eine stumpfwinklige Giebelfläche.

2) *Wieviel m² misst die Giebelfläche, wieviel cm² das Dreieck A B C?*

Wir denken uns das Dreieck A B C zum Rechteck A B F E ergänzt, indem wir links ein gleiches Dreieck wie A D C, rechts ein gleiches wie D B C anlegen.

Inhalt der Giebelfläche.

Das Dreieck A B C ist die Hälfte dieses Rechtecks.

$$\text{Inhalt des Rechtecks} = A B \cdot C D = 4\frac{1}{2} \cdot 2 \text{ cm}^2$$

$$\text{„ „ Dreiecks A B C} = \frac{1}{2} A B \cdot C D = \frac{1}{2} \cdot 4\frac{1}{2} \cdot 2 \text{ cm}^2 =$$

$$4\frac{1}{2} \text{ cm}^2 = \frac{\text{Grundlinie} \times \text{Höhe}}{2}$$

$$\text{Inhalt der Giebelfläche} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 4 \text{ m}^2 = 18 \text{ m}^2.$$

Man berechnet den Inhalt des Dreiecks A B C, indem man seine Grundlinie und ihren Abstand von der Spitze, die Höhe, misst, die 2 Masszahlen multipliziert und das Produkt durch 2 dividiert.

3) *Berechne den Inhalt des Estrichkörpers.* (Länge = 12 m).

a) Wir denken uns wieder die Mauer bis zur Firsthöhe fortgesetzt und ein wagerechtes Dach gelegt; dann wäre der Inhalt dieses Körpers = Boden \times Firsthöhe = $9 \cdot 12 \cdot 4 \text{ m}^3 = 432 \text{ m}^3$. Dieser Raum würde auch ausgefüllt, wenn man zu den beiden Estrichteilen links und rechts von der Stützsäule zwei ihnen gleiche Körper anlegen würde. Der Inhalt des Estrichraums ist daher die Hälfte vom Inhalt des genannten rechtwinkligen Prismas, somit Inhalt des Estrichraums

$$= \frac{\text{Boden} \times \text{Firsthöhe}}{2} = \frac{9 \cdot 12 \cdot 4}{2} = 216 \text{ m}^3.$$

b) Wir wollen uns auch diesen Körper aufrecht gestellt denken, so dass die Giebelfläche seine Grundfläche, die Firstkante seine Höhe wird. Seine 3 Seitenflächen sind Rechtecke, seine Seitenkanten stehen zur Grundfläche senkrecht und geben uns den Abstand von Grund- und Deckfläche an. In dieser Stellung heisst der Körper dreiseitiges senkrechtiges Prisma.

Wir denken uns diesen Körper zum rechtwinkligen Prisma von doppeltem Inhalt ergänzt. Dann ist der Inhalt des rechtwinkligen Prismas = doppelte Giebelfläche \times Firstkante.

Inhalt des dreiseitigen Prismas

$$\begin{aligned} &= \text{Giebelfläche} \times \text{Firstkante} = 18 \cdot 12 = 216 \text{ m}^3 \\ &= \text{Grundfläche} \times \text{Höhe}. \end{aligned}$$

Auch dieser Körper soll in Karton nachgebildet werden.

4) *Miss eine ungleichseitige Giebelmauer aus, zeichne sie, und berechne sie.*

Verallgemeinerung. 1) Wie wurde das ungleichseitige Dreieck in diesen Fällen berechnet? Wir konnten es als die Hälfte eines Rechtecks über der gleichen Grundlinie von gleicher Höhe auffassen. Um es zu berechnen, haben wir seine Grundlinie und seine Höhe (d. i. der Abstand der Grundlinie von der Spitze) gemessen, diese Masszahlen multipliziert und das Produkt durch 2 dividiert. Ebenso sind wir bei gleichschenkligen und rechtwinkligen Dreiecken verfahren.

Satz 17. Für die Berechnung eines Dreiecks haben wir daher die Regel:

$$\text{Inhalt} = \frac{\text{Grundlinie} \times \text{Höhe}}{2}$$

2) Vergleiche die Modelle der 3 Dachkörper, die wir berechnet haben, in aufrechter Stellung. Sie haben ein Dreieck als Grundfläche und ein kongruentes Dreieck als Deckfläche, ferner drei Rechtecke als Seitenflächen; ihre Seitenkanten stehen zur Grundfläche senkrecht und geben die Höhe an; wir haben diese Körper senkrechte dreiseitige Prismen genannt. Jeder dieser Körper konnte nach der Regel: $\text{Inhalt} = \text{Grundfläche} \times \text{Höhe}$ berechnet werden.

Satz 18. Ein senkrecht dreiseitiges Prisma ist begrenzt von 2 kongruenten Dreiecken als Grund- und Deckfläche, von 3 Rechtecken als Seitenflächen. Seine Seitenkanten stehen zur Grundfläche senkrecht und geben seine Höhe an.

Für die Berechnung seines Inhalts gilt die Regel: $\text{Inhalt} = \text{Grundfläche} \times \text{Höhe}$.

Übungen.

1) Beschreibe einen Holz- oder Eisenkeil. Stelle ihn so, dass ein Dreieck seine Grundfläche ist. Was für ein Körper ist der Keil? Mit welchen Dachkörpern hat er gleiche Form? Miss seine Ausdehnungen, und bestimme sein Volumen, sowie mit einer Wage sein Gewicht. Berechne sein spezifisches Gewicht.

Z. B. Der Keilkopf sei ein Quadrat von 10 cm Seite; eine Dreieckshöhe messe 25 cm.

$$\text{Dreiseitige Grundfläche} = \frac{10 \cdot 25}{2} \text{ cm}^2 = 125 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Abstand der beiden Dreiecke} = 10 \text{ cm.}$$

$$\text{Volumen} = 1,25 \text{ dm}^3.$$

$$\text{Das Gewicht beträgt} = 8,75 \text{ kg.}$$

$$1,25 \text{ dm}^3 = 8,75 \text{ kg.}$$

$$1 \text{ dm}^3 = 8,75 \text{ kg} : 1,25 = 7 \text{ kg.}$$

$$\text{Spezifisches Gewicht} = 7.$$

2) Betrachte eine Rampe von der Form eines senkrechten dreiseitigen Prismas, die sich etwa vor einem Heustall befindet. Beschreibe sie, miss ihre Ausdehnungen, und berechne die Anzahl m^3 Mauerwerk, die sie enthält, sowie die Erstellungskosten à 10 Fr. pro m^3 .

Z. B. Wagerechte Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks = 3 m 60 cm, senkrechte Kathete = 1 m 10 cm.

Breite der Rampe = 3 m 80 cm. Zeichne auch das Netz.

3) Viele Schubkarren haben die Form eines umgelegten Giebeldaches. Der Trog eines solchen Karrens sei 60 cm lang, 40 cm breit und 27 cm tief.

Zeichne sein Netz. Wieviel dm^3 hält er, wenn er eben voll gemacht wird? Mit einem solchen Karren werde die Erde des Fundaments eines Kellers, der 4 m lang, 3,2 m breit und 2,2 m tief ist, weggeführt. Wie oft muss man fahren, wenn der Trog immer eben voll gemacht wird?

C. Das vierseitige senkrechte Prisma mit schiefwinkliger Grundfläche.

Das schiefwinklige Zimmer.

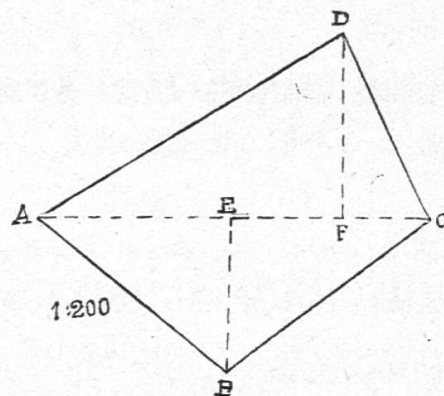
1) In alten Häusern trifft man vielfach Zimmer an, die nicht rechtwinklig sind.

a) Besichtige ein schiefwinkliges Zimmer. Wir nennen diese Bodenfläche ein schiefwinkliges Viereck. *Wie könnte man diesen Boden zeichnen und berechnen?* Wir spannen eine Schnur von einer Ecke zur gegenüberliegenden; diese zerlegt den Boden in zwei Dreiecke, für welche sie die gemeinschaftliche Grundlinie ist. Die Höhen der beiden Dreiecke lassen sich durch zwei Messlatten markieren und messen. Miss auch die Abschnitte, die jede Höhe auf der Grundlinie macht.

Der Boden des schiefwinkligen Zimmers.

$AC = 8 \text{ m}$, $AE = 4 \text{ m}$, $EF = 2,2 \text{ m}$, $FC = 1,8 \text{ m}$,
 $BE = 3,2 \text{ m}$, $DF = 3,9 \text{ m}$.

Fig. 15.



Wir zeichnen zuerst die Grundlinie AC, messen auf ihr die Strecken AE und EF ab und ziehen von diesen 2 Fusspunkten aus die Höhen.

Die Verbindungslinie AC heisst eine Diagonale des Vierecks.