

Produktives Üben im Geometrieunterricht

Autor(en): **Arquint, Domenic**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Bündner Schulblatt = Bollettino scolastico grigione = Fegl
scolastic grischun**

Band (Jahr): **35 (1975-1976)**

Heft 2

PDF erstellt am: **21.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-356482>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Produktives Üben im Geometrieunterricht

Domenic Arquint, Basel

«Übungen unter immer wieder neuen Gesichtspunkten, an immer wieder anderem Material, in immer wieder neuen Zusammenhängen, anderen Anwendungen, unter immer wieder neuen, grösseren Aufgaben — darin steckt das Geheimnis des Übens.» — (H. Roth, Hannover 70)

Ein Beispiel aus der Unterrichtspraxis

Im Mittelpunkt der angeführten Unterrichtsskizze steht der operative Umgang mit dem Flächeninhalt des Dreiecks. Hierbei geht es jedoch nicht um den erstmaligen Aufbau der zur Flächenbestimmung notwendigen Operation innerhalb einer einführenden Unterrichtseinheit, sondern vielmehr um das «Durcharbeiten der Operation (Aebli) mit dem Ziel, sie von zufälligen Elementen zu reinigen und sie beweglich zu machen».

Wenn nach Engelmayer «Üben ein weiterführendes, von den aufbauenden und einleitenden Akten also nicht zu trennendes Geschehen ist, dann wird es verständlich, dass der Grund zur Sicherung des Lernbesitzes schon beim Erarbeiten gelegt werden muss. In den Klärungsprozessen ist bereits über den Übungserfolg entschieden.» Hans Aebli schlägt deshalb vor, schon in den Einführungsstunden «die Assoziativität der Operationen auszunützen, indem wir die Wege ihrer Ausführung variieren. Wird eine Gesamtoperation eingeführt, die mehrere Teiloperationen einschliesst, so ist es falsch, geradewegs auf eine Normalform der Lösung hinzu-steuern». Für eine gedeihliche Übungsarbeit wäre daher zu wünschen, dass der Schüler am Ende der grundlegenden Akte zur Herleitung der Flächenbestimmung beim Dreieck über folgende variierte Figuren- und Lösungsmodelle verfügt. (Abb. 1)

Die nun folgenden Übungsaufgaben stellen Situationen dar, «in deren Verlauf der neu eingeführte geistige Akt wieder durchdacht wird, und

zwar in einer Form, die es keinem Schüler erlaubt, sich durch mechanisches Vorgehen von der Aufgabe zu drücken» (Aebli).

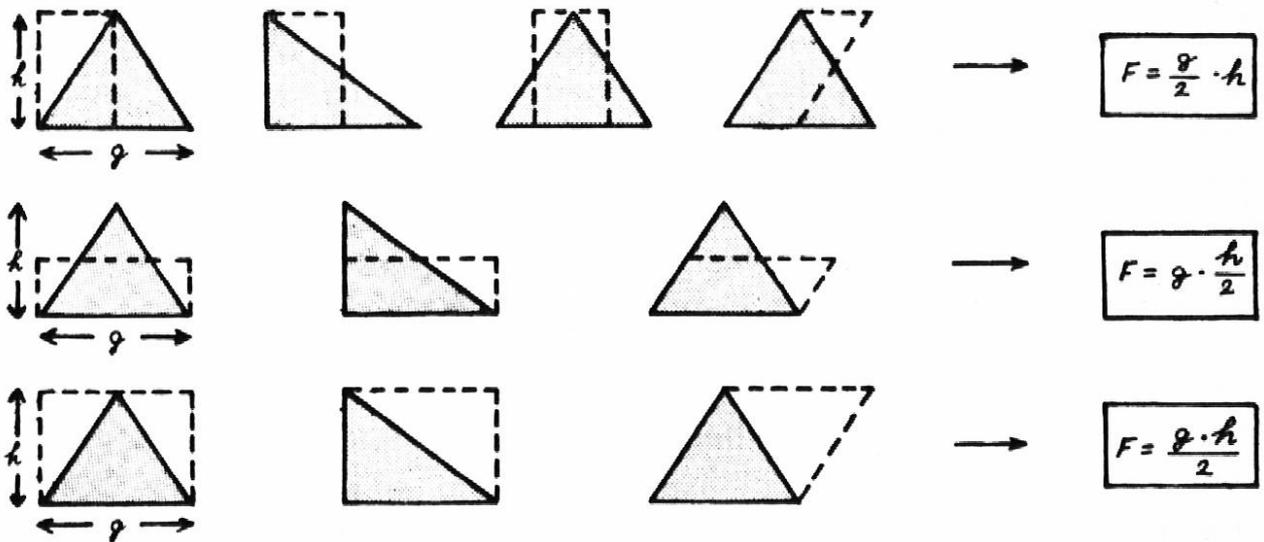


Abb. 1

I. Situation

- a) Ein Dreieck ($g = 4 \text{ cm}$; $h = 4 \text{ cm}$) soll in ein flächengleiches Dreieck verwandelt werden, deren Höhe nur die Hälfte (ein Drittel, ein Viertel) der Höhe des Ausgangsdreiecks beträgt. (Abb. 2)

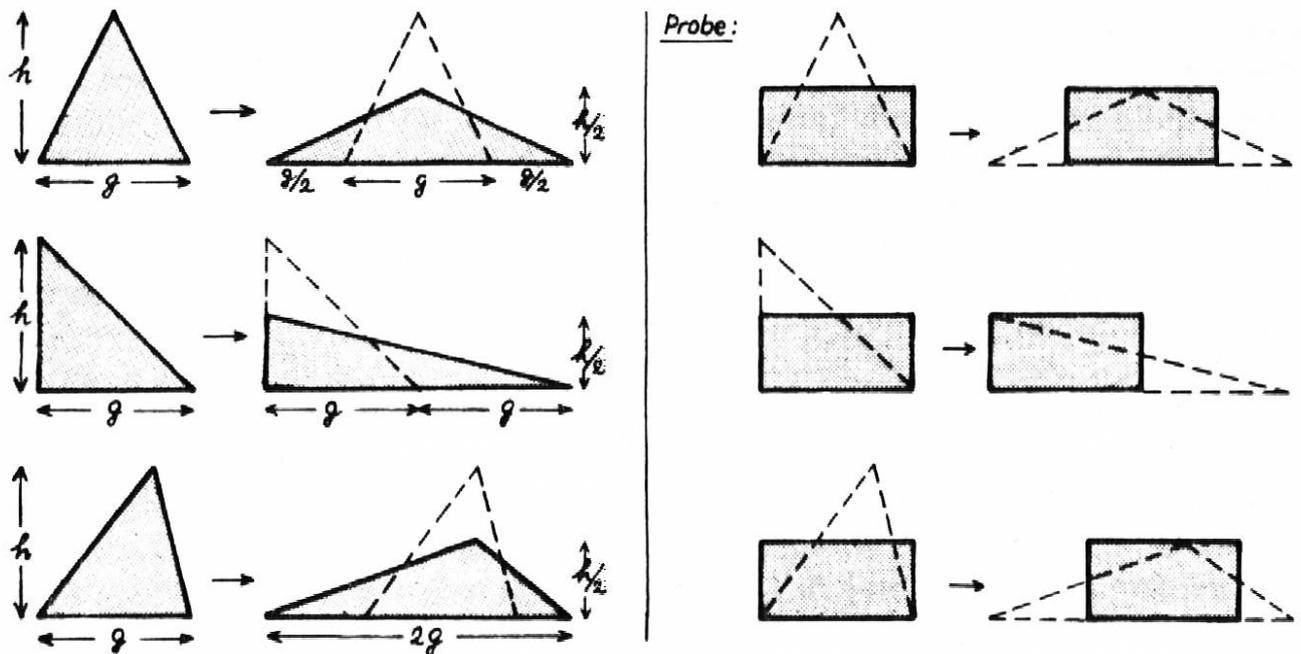


Abb. 2

- b) Verwandle auch die folgenden Dreiecke ($g = 8 \text{ cm}$; $h = 3 \text{ cm}$) in flächengleiche Dreiecke, deren Grundlinie aber jeweils nur $1/2$ ($1/3$ bzw. $1/4$) mal so lang ist wie die Grundlinie des Ausgangsdreiecks. (Abb. 3)

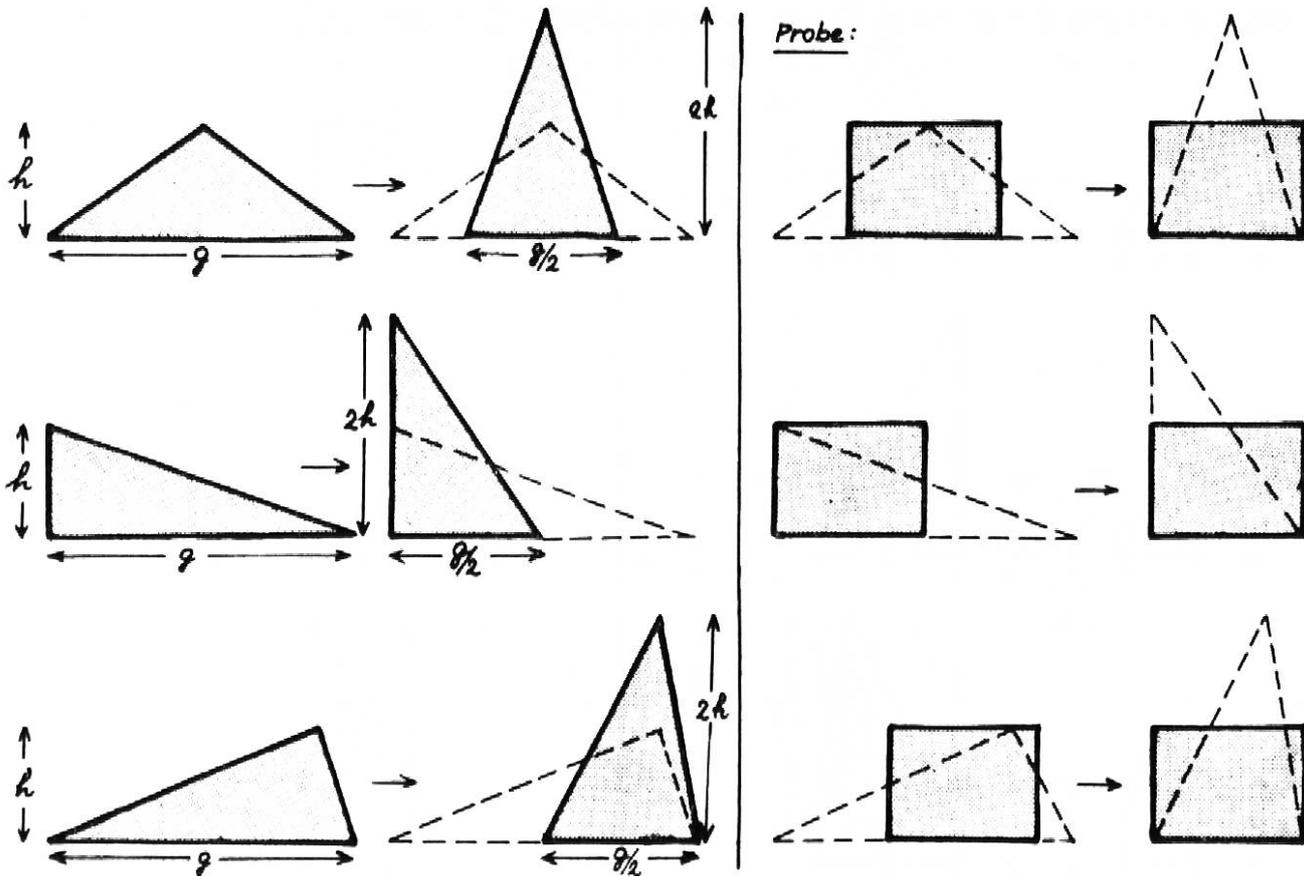


Abb. 3

II. Situation

- a) Ergänze die folgenden Dreiecke ($g = 4 \text{ cm}$; $h = 3 \text{ cm}$) jeweils zu einem doppelt so grossen Dreieck, das jedoch die gleiche Höhe wie die betreffende Ausgangsfigur besitzt. (Abb. 4)

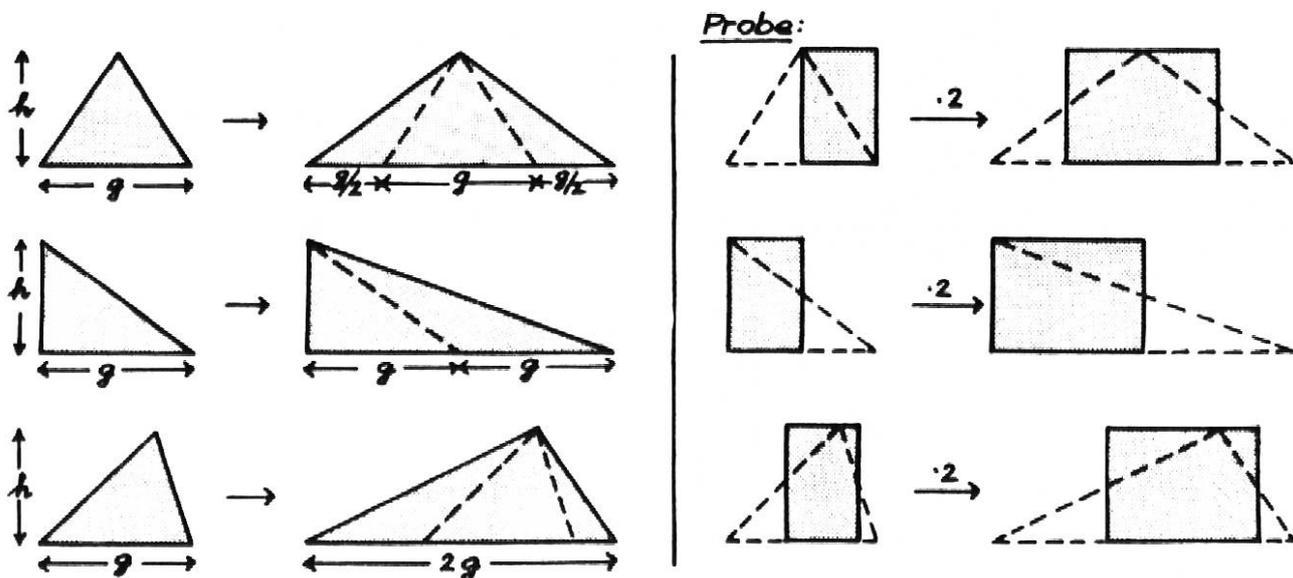


Abb. 4

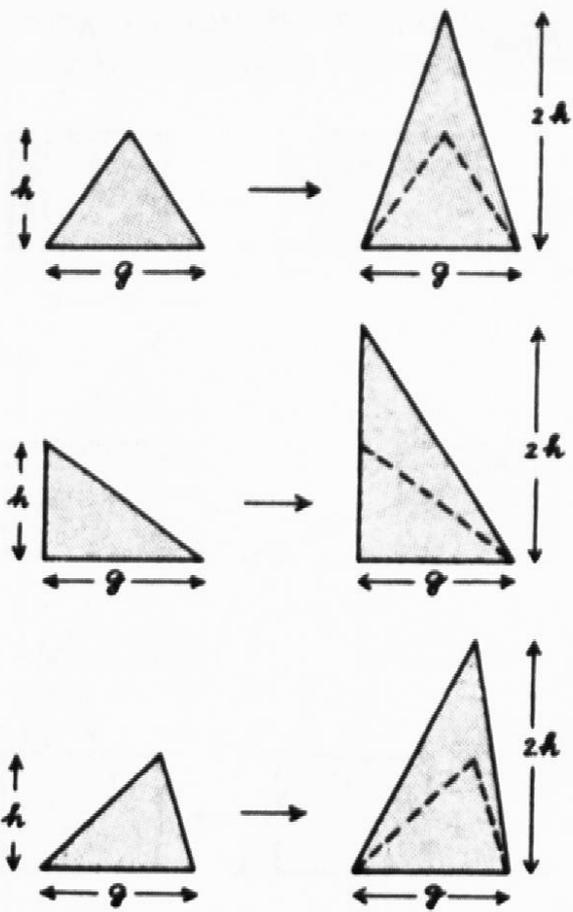
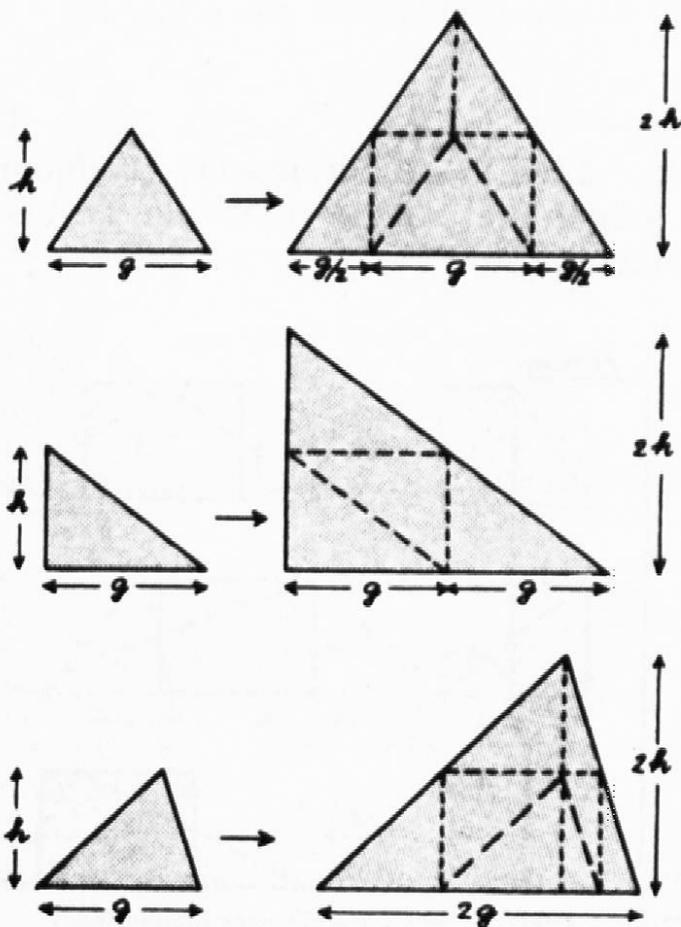
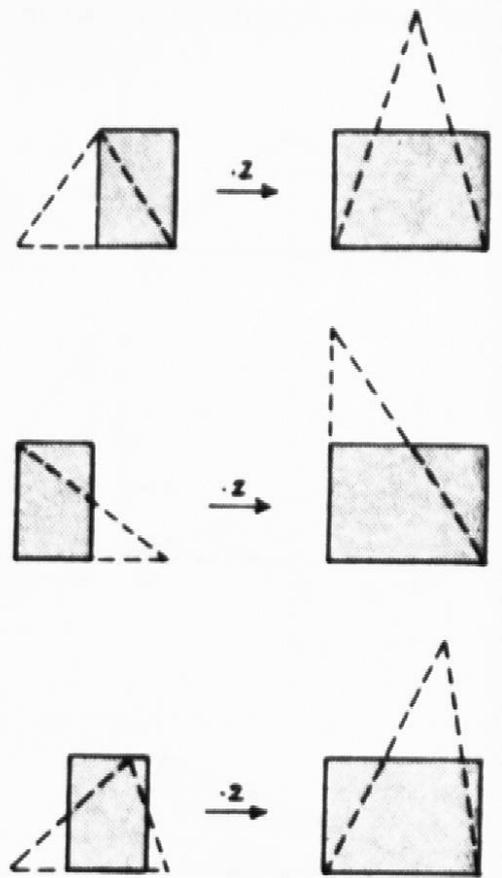
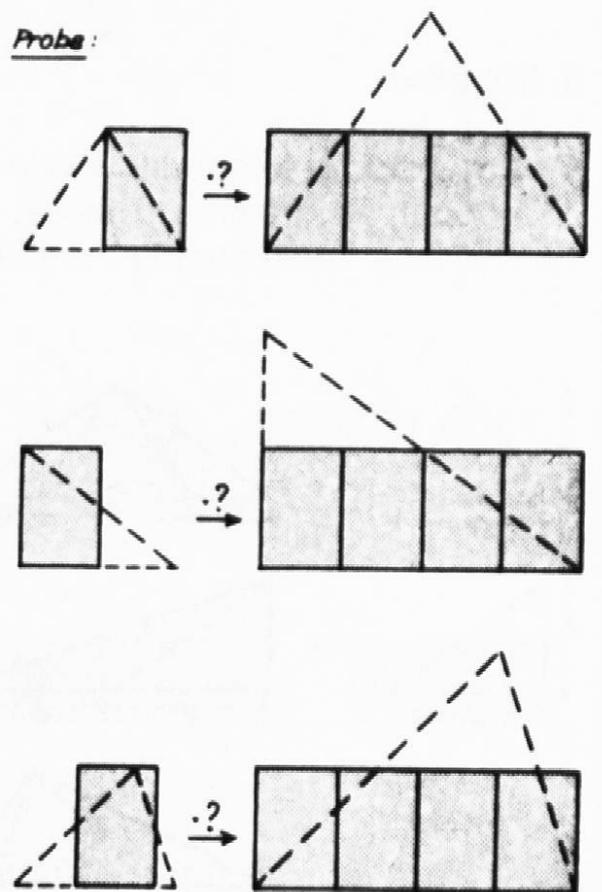


Abb. 5

Probe:



Probe:



- b) Ergänze die folgenden Dreiecke ($g = 4, h = 3$) jeweils zu einem doppelt so grossen Dreieck, das jedoch die gleiche Grundlinie wie die betreffende Ausgangsfigur besitzt. (Abb. 5)
- c) Wie verändert sich die Fläche eines Dreiecks ($g = 4, h = 3$), wenn Grundlinie und Höhe verdoppelt (verdreifacht, vervierfacht) werden? (Abb. 6)
- d) Grundlinie ($g = 3$) und Höhe ($h = 2$) werden verdreifacht. (Abb. 7)

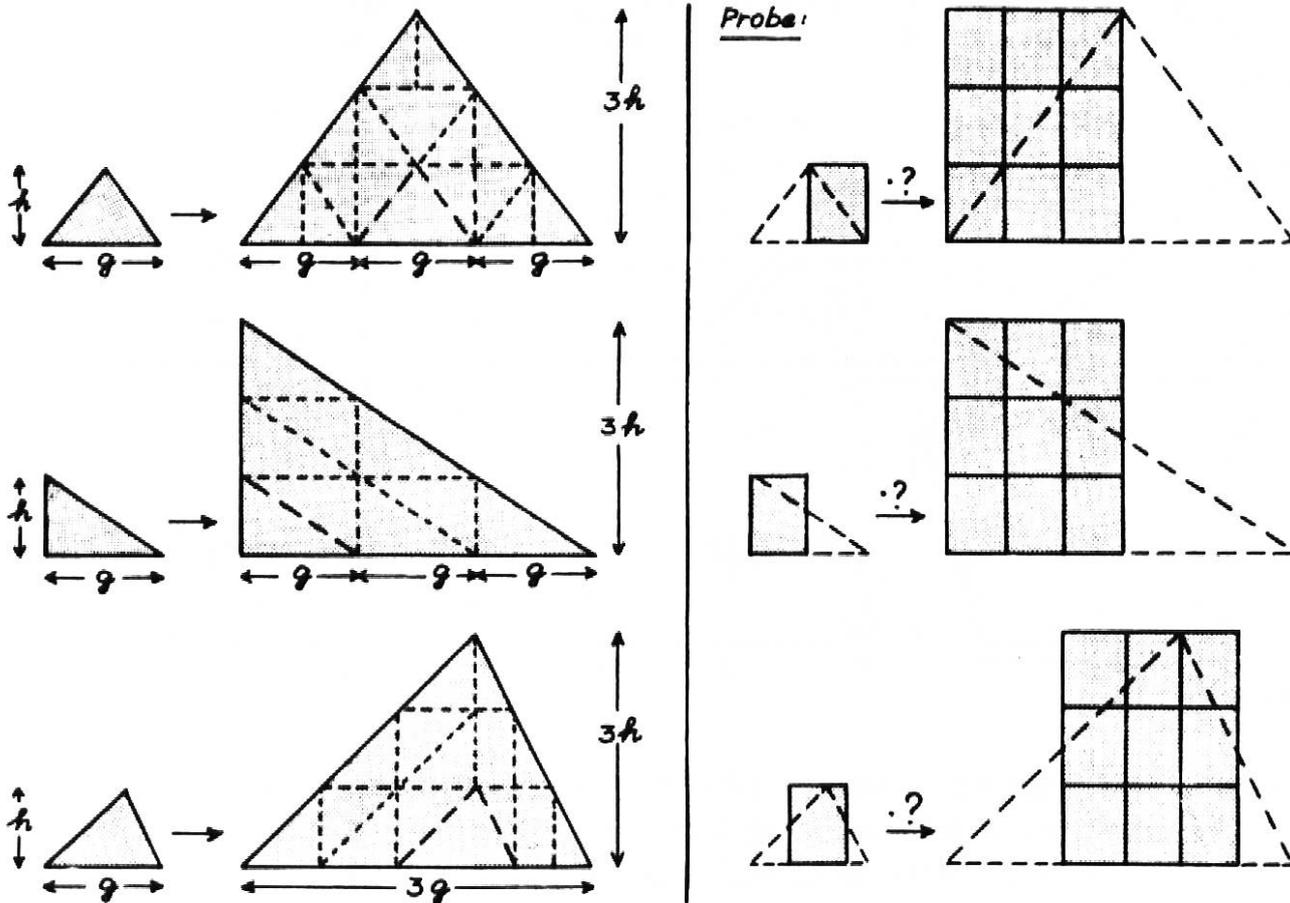


Abb. 7

III. Situation

- a) Die Fläche eines gleichschenkligen (rechtwinkligen) Dreiecks beträgt 24 cm^2 . Konstruiere mögliche Dreiecke und ordne sie so an, dass ihr Eckpunkt A mit dem Nullpunkt des Koordinatenkreuzes zusammenfällt. (Abb. 8)
- b) Mit den in der Tabelle für g und h zusammengestellten Werten lässt sich jeweils nur ein gleichschenkliges Dreieck konstruieren. Wieviel ungleichseitige Dreiecke lassen sich mit einem Wertepaar ($g = 8, h = 6$) konstruieren? (Abb. 9)

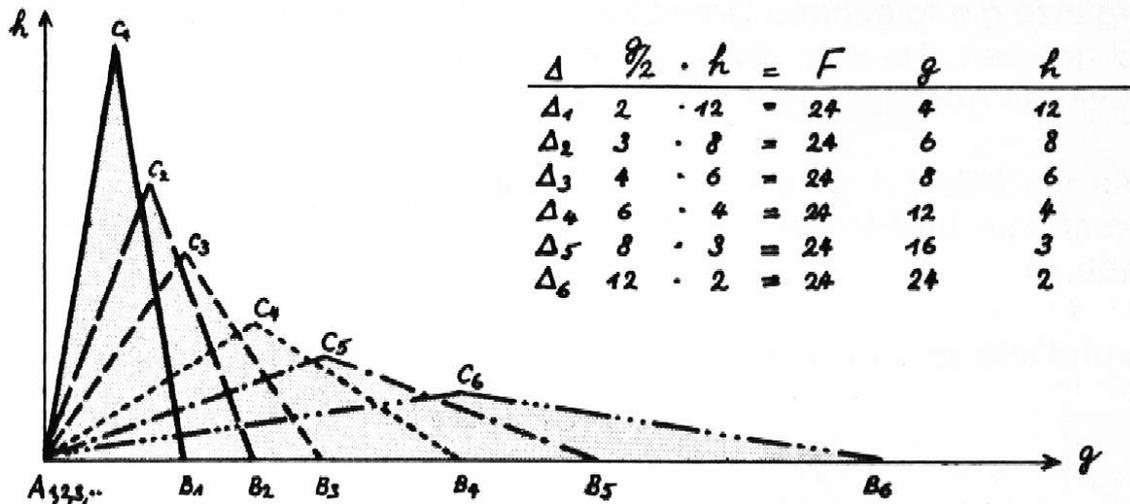


Abb. 8

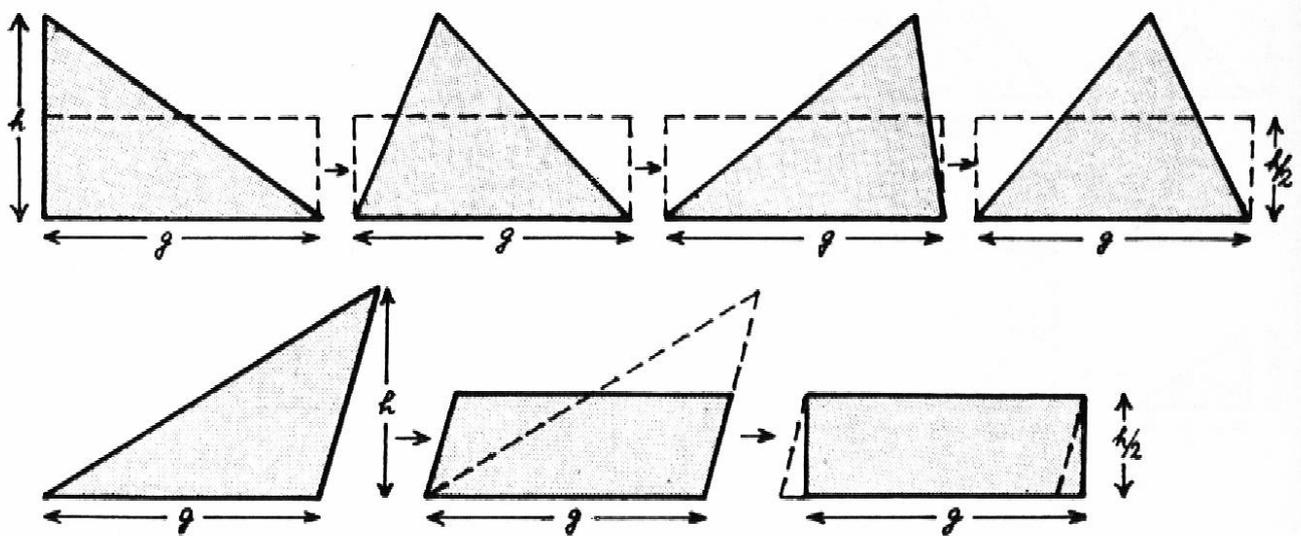


Abb. 9

Durch Umwandlung in flächengleiche Rechtecke zeigt sich dem Schüler anschaulich, dass die Flächengröße eines Dreiecks nur von den Werten g und h abhängt, nicht aber von der jeweiligen Form des betreffenden Dreiecks. Dies führt zur Erkenntnis:

Alle Dreiecke, die über eine gemeinsame Grundlinie mit gleicher Höhe errichtet werden, sind **flächengleich**:

Wir tragen die soeben gewonnene Erkenntnis zeichnerisch in a von Situation III ein und formulieren:

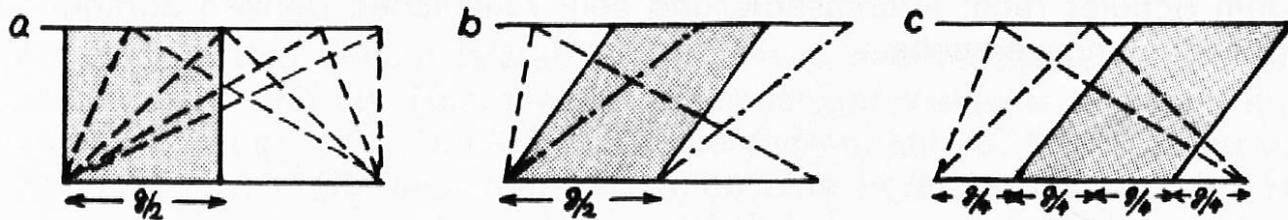
Die Eckpunkte C aller ungleichseitigen Dreiecke mit der Grundlinie $g = 8$ und der Höhe $h = 6$ liegen auf einer Parallelen zu g durch C_3 . Die Eckpunkte aller ungleichseitigen Dreiecke mit der Grundlinie $g = 4$ und der Höhe $h = 12$ liegen ... («Scherung»).

IV. Situation

a) Zeichne ein allen Dreiecken der Abb. 10a gemeinsames flächengleiches Rechteck, dessen eine Seite gleich h ist.

b) Wie viele flächengleiche Parallelogramme, deren Höhen ebenfalls mit der Dreieckshöhe h übereinstimmen, können in Abb. 10b eingezeichnet werden?

c) Ist auch in Abb. 10c die Flächengleichheit des Parallelogramms mit sämtlichen Dreiecken gegeben?



d) Errichte über der Grundlinie der folgenden Rechtecke oder Quadrate (Abb. 10, d e) jeweils ein ungleichseitiges und ein stumpfwinkliges Dreieck, das nur den halben Flächeninhalt des betreffenden Rechteckes oder Quadrates hat!

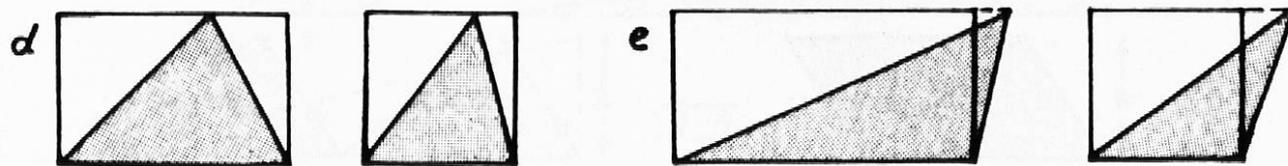


Abb. 10

V. Situation

Die zuletzt unter b wiedergegebenen Lösungsfiguren bieten eine wesentliche Verständnishilfe bei der im folgenden skizzierten Herleitung des pythagoreischen Lehrsatzes (n. Resag u. Breitenbach):

(Abb. 11)

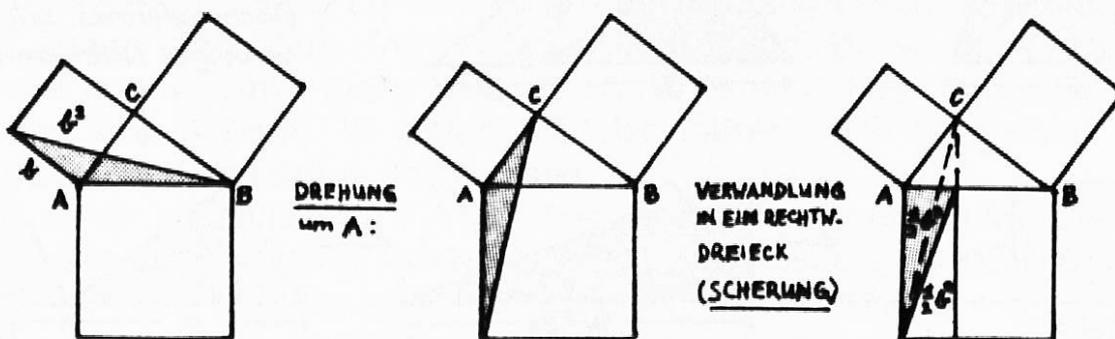


Abb. 11

Erklärung des Vorgehens: Wir errichten über b ein stumpfwinkliges Dreieck, dessen Fläche dem halben Flächeninhalt b^2 entspricht.

In gleicher Weise kann man mit dem Kathetenquadrat über a verfahren!

VI. Situation

Das nun schon mehrfach dargestellte und auch im folgenden wieder angewandte Verfahren der Figurenverwandlung zwischen Parallelen wird in der Geometrie als «Scherung» bezeichnet. Durch Scherung lassen sich aus ursprünglichen Figuren neue gewinnen, die zwar eine andere Form, jedoch den gleichen Flächeninhalt haben. Dieses Verfahren ermöglicht dem Schüler recht interessante und sein räumliches Denken anregende Umwandlungsversuche.

VII. Situation

Das soeben erarbeitete Verfahren kann auch bei der Flächenbestimmung von Parallelogramm (Abb. 12) und Trapez (Abb. 13) Anwendung finden:

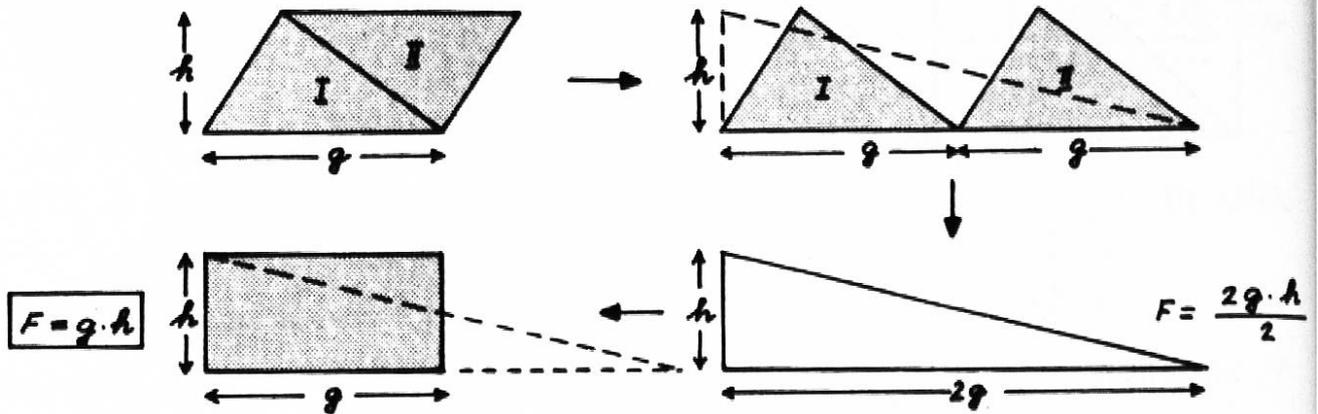
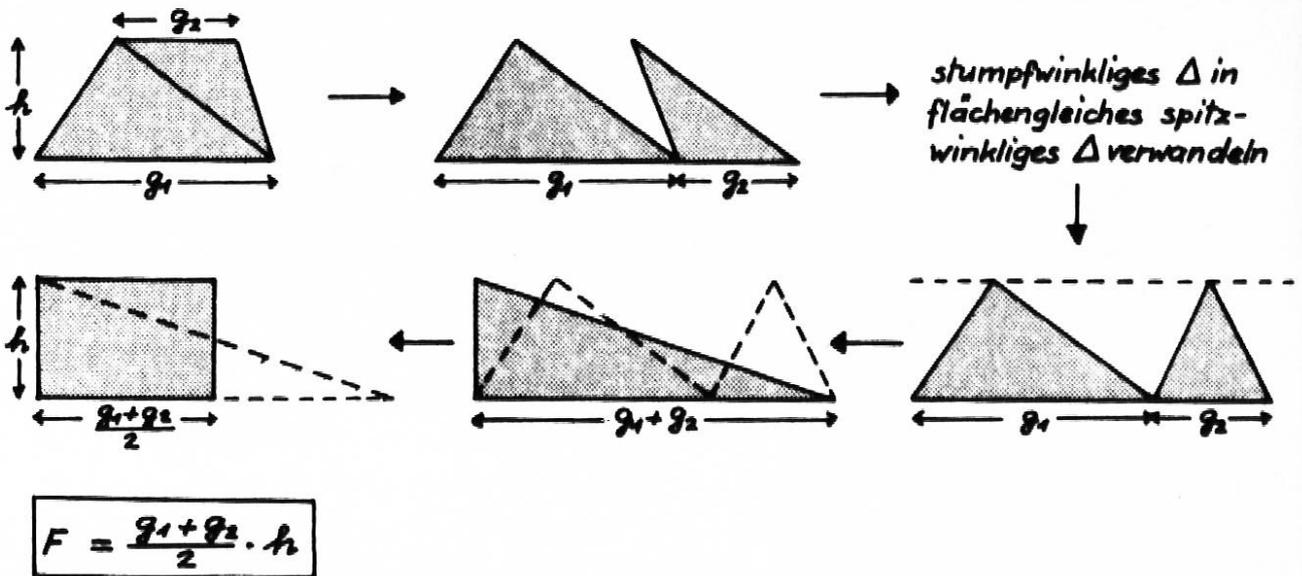


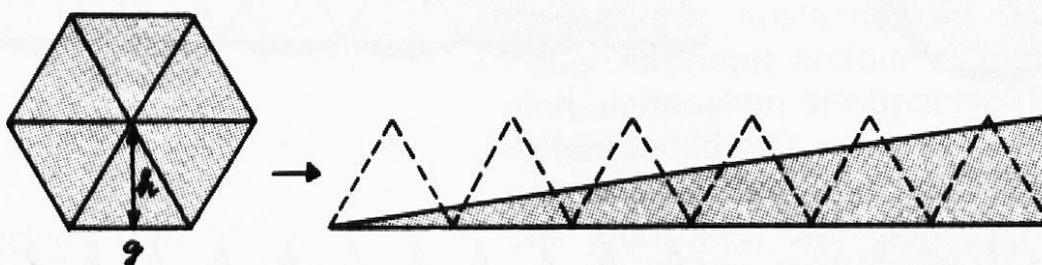
Abb. 12



Bei der Inhaltsbestimmung der Trapezfläche wird als 2. Teildreieck ein stumpfwinkliges addiert; da es jedoch die gleiche Höhe besitzt, führt unser Verfahren auch hier zum Ziel.

VIII. Situation

Mit dem in den beiden letzten Situationen wiedergegebenen Verfahren lassen sich auch die Teildreiecke regelmässiger **Vielecke** zu einem einzigen flächengleichen Dreieck zusammenfassen. Mit der Übersetzung ins Rechnerische ergibt sich dabei zugleich eine Formelvariation. (Abb. 14)



$$F = \frac{g \cdot h}{2} \cdot 6 \quad \longleftrightarrow \quad F = \frac{6g \cdot h}{2}$$

allg. $F = \frac{g \cdot h}{2} \cdot n \quad F = \frac{n \cdot g \cdot h}{2}$

Abb. 14

IX. Situation

In der zuletzt angeführten Situation bietet sich uns ein willkommener methodischer Brückenschlag zur Inhaltsberechnung der **Kreisfläche** an: Wenn wir uns die Anzahl der Ecken eines regelmässigen Vieleckes ständig wachsend denken, so nähert sich der Umfang der entstehenden Vielecke immer mehr dem Kreisumfang. Denn je kleiner wir die Teildreiecke werden lassen, umso mehr nähert sich die Summe ihrer Grundlinien dem Umfang des Kreises. In gleicher Weise nähern sich die Höhen dieser Teildreiecke dem Radius des Kreises.

Statt eines regelmässigen Vieleckes mit stetig wachsender Eckenzahl kann man auch ständig kleiner werdende Kreissektoren zum Ausgangspunkt weiterer Überlegungen nehmen: Wir denken uns den Kreis in sehr viele und schmale Sektoren zerlegt. «Jeder Kreissektor hat Ähnlichkeit mit einem gleichschenkligen Dreieck; doch ist die Grundlinie keine Gerade, sondern Teil des Kreisbogens, also gebogen. Der Unterschied zwischen der entsprechenden Geraden und dem Bogen wird aber immer kleiner, je schmaler der Sektor wird. Denken wir uns nun den Sektor immer schmaler, so wird schliesslich eine Grenze erreicht, wo der Unter-

schied gleich Null gesetzt werden kann. In diesem Fall wird die Höhe der Dreiecke gleich r . Alle Sektoren zusammen haben als Grundlinie den Kreisumfang U und als Höhe r ..., so dass ihr Inhalt $\frac{U \cdot r}{2}$ ist.» (Odenbach) (Abb. 15)

Die Fläche des erhaltenen Lösungsdreiecks (Abb. 15c), welche die Kreisfläche repräsentiert, lässt sich somit berechnen als

$$F_{\Delta} = F_O = \frac{2r \pi \cdot r}{2} = r \cdot r \cdot \pi$$

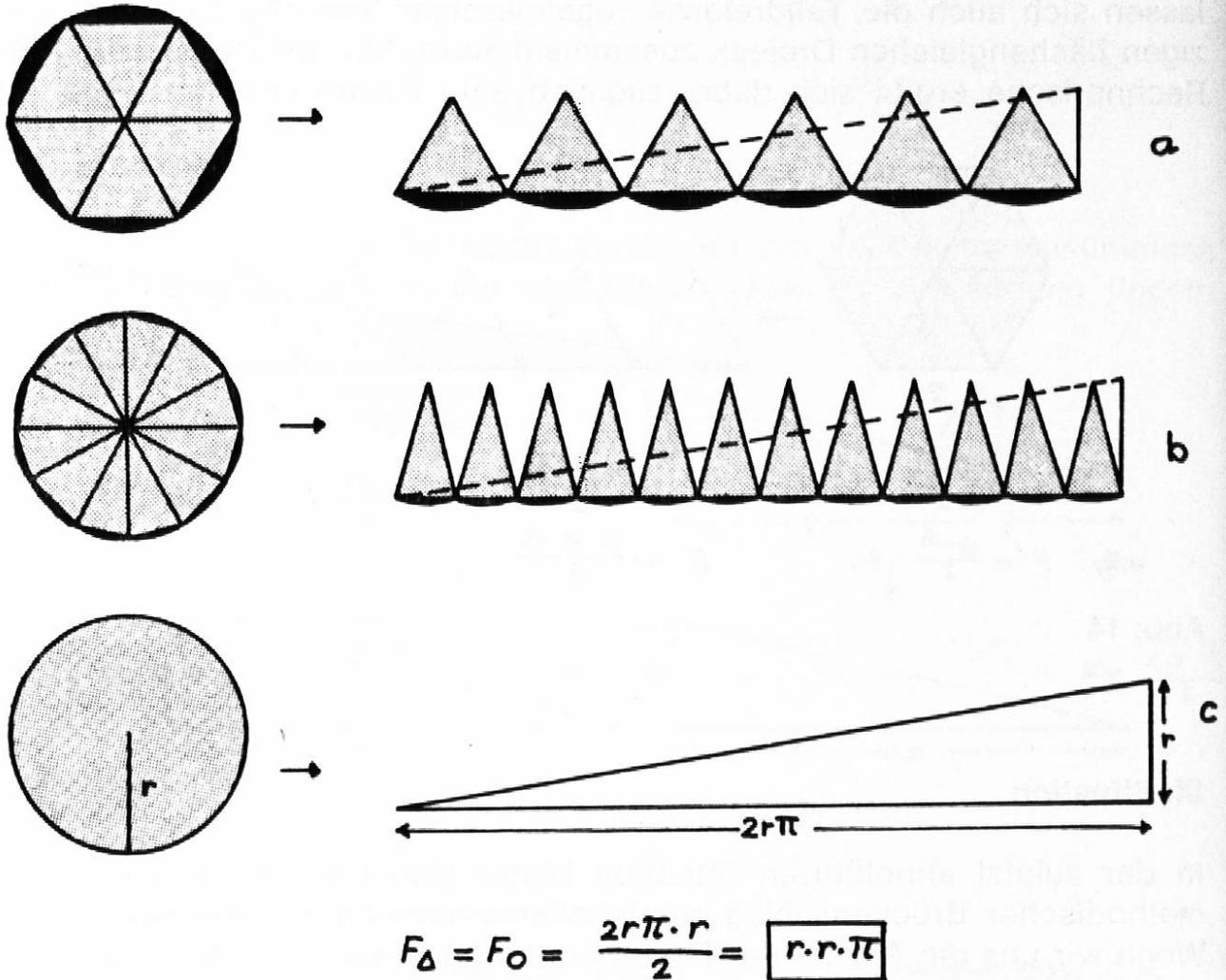


Abb. 15

Literatur:

- Aebli Hans: «Psychologische Didaktik», Stuttgart 70
 «Vorlesung in Unterrichtsdidaktik», Zürich 63
 Diesterweg A.: «Wegweiser zur Bildung für Lehrer», Essen 1877
 Engelmeyer O.: «Psychologie für den schulischen Alltag», München 1960
 Hagen M.: «Lebensvolle Raumlehre», Bamberg 1951
 Meyer E.: «Mathematik in der Hauptschule, I», Stuttgart 1969
 Odenbach K.: «Raumlehre im Unterricht», Braunschweig 1968
 Resag K./
 Bärmann F.: «Zahl und Raum in unserer Welt», Braunschweig 1966
 Roth Hch.: «Päd. Psychologie des Lehrens und Lernens», Hannover 1970