Zeitschrift: Mémoires de la Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles. Mathématique et physique = Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Freiburg. Mathematik und Physik

Herausgeber: Société Fribourgeoise des Sciences Naturelles

Band: 4 (1921)

Artikel: Über die Prismenmethode zur Bestimmung der Brechungsindizes optisch zweiachsiger Kristalle ohne Absorptions- und Drehungsvermögen

Autor: Weber, Leonhard

Kapitel: II: Ableitung einer neuen Methode zur Bestimmung der optischen Konstanten zweiachsiger Kristalle mit Hilfe eines einzigen Prismas unbekannter Orientierung

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-306876

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 01.08.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

II. TEIL

Ableitung einer neuen Methode zur Bestimmung der optischen Konstanten zweiachsiger Kristalle mit Hilfe eines einzigen Prismas unbekannter Orientierung.

32. In mehreren Fällen des vorangehenden ersten Teiles (vergl. § 31 Abt. b, c_α und c_β) konnte durch Berücksichtigung des Polarisationszustandes des austretenden Lichtes die Lösung des Prismenproblems eindeutig gefunden werden. Die Art und Weise aber, in der dies geschah, hatte einen bloß qualitativen Charakter und faßte die Beziehung zwischen den beobachteten Schwingungsrichtungen und den gesuchten Hauptlichtgeschwindigkeiten nirgends in einer präzisen Formel zusammen. Eine solche Gleichung ist aber möglich auf Grund des gegen Ende von § 9 erwähnten Satzes, wornach für jede Fortpflanzungsrichtung die zugehörigen Schwingungsrichtungen und Wellennormalengeschwindigkeiten bestimmt sind durch die Richtung und reziproke Länge der Halbachsen jener Ellipse, in welcher das Indexellipsoid von der zur Fortpflanzungsrichtung senkrechten Diametralebene geschnitten wird. Wie man sich nun geeigneter Schwingungsrichtungen bedienen kann, um die Hauptlichtgeschwindigkeiten aller zweiachsiger, also selbst trikliner Kristalle eindeutig zu bestimmen — das theoretisch darzutun, ist Aufgabe dieses zweiten Teiles, während die experimentelle Prüfung der Methode dem dritten Teil zufallen wird.

33. Die erste Aufgabe, welche sich darbietet, ist der Nachweis, daß das Ausbreitungsgesetz ebener Wellen, so wie es in Gleichung II formuliert wurde, sich in der soeben genannten Weise aus dem Indexellipsoid ableitet. Bezogen auf die optischen Symmetrieachsen ξ, η, ζ lautet die Gleichung des letzteren

$$a^2 \xi^2 + b^2 \eta^2 + c^2 \zeta^2 = 1.$$

Bildet nun eine beliebige Ausbreitungsrichtung mit diesen Achsen die Winkel ν_1, ν_2 und ν_3, so erzeugt die dazu senkrechte Ebene

$$\xi \cos\nu_1 + \eta \cos\nu_2 + \zeta \cos\nu_3 = 0$$

mit der Fläche eine Schnittellipse, deren Gleichung sich leicht mittels einer Koordinatentransformation ergibt, bei der die Wellennormalenrichtung zur Z-Achse und die Schnittgerade der Wellenebene mit der Ebene $\zeta = 0$ zur X-Achse genommen wird. Hierdurch nimmt das Schema I folgende spezielle Form an.

	X	Y	Z
ξ	$\frac{\cos\nu_2}{\sin\nu_3}$	$\frac{\cos\nu_1 \cos\nu_3}{\sin\nu_3}$	$\cos\nu_1$
η	$-\frac{\cos\nu_1}{\sin\nu_3}$	$\frac{\cos\nu_2 \cos\nu_3}{\sin\nu_3}$	$\cos\nu_2$
ζ	0	$-\sin\nu_3$	$\cos\nu_3$

Die daraus fließenden Substitutionen

$$\xi = \frac{\cos\nu_2}{\sin\nu_3} X + \frac{\cos\nu_1 \cos\nu_3}{\sin\nu_3} Y$$

$$\eta = -\frac{\cos\nu_1}{\sin\nu_3} X + \frac{\cos\nu_2 \cos\nu_3}{\sin\nu_3} Y$$

$$\zeta = -\sin\nu_3 Y$$

führen die Gleichung des Indexellipsoides sofort in die Gleichung der gesuchten Kurve über, nämlich:

$$\frac{a^2 \cos^2\nu_2 + b^2 \cos^2\nu_1}{\sin^2\nu_3} X^2$$
$$+ \frac{(a^2 \cos^2\nu_1 + b^2 \cos^2\nu_2) \cos^2\nu_3 + c^2 \sin^4\nu_3}{\sin^2\nu_3} Y^2$$
$$+ 2(a^2 - b^2) \frac{\cos\nu_1 \cos\nu_2 \cos\nu_3}{\sin^2\nu_3} XY = 1.$$

Die reziproken Quadrate q_1^2 und q_2^2 ihrer Hauptachsen, welche dem Theorem zufolge den der Richtung ν_1, ν_2, ν_3 zugeordneten

Geschwindigkeiten entsprechen, ergeben sich als Wurzeln der biquadrischen Gleichung

$$q^4 - q^2 \frac{a^2(\cos^2\nu_3\cos^2\nu_1 + \cos^2\nu_2) + b^2(\cos^2\nu_2\cos^2\nu_3 + \cos^2\nu_1) + c^2\sin^4\nu_3}{\sin^2\nu_3}$$
$$+ \frac{a^2b^2(\cos^2\nu_1 + \cos^2\nu_2)^2\cos^2\nu_3 + b^2c^2\cos^2\nu_1\sin^4\nu_3 + c^2a^2\cos^2\nu_2\sin^4\nu_3}{\sin^4\nu_3} = 0.$$

Da

$$\cos^2\nu_3\cos^2\nu_1 + \cos^2\nu_2 \equiv \cos^2\nu_3\cos^2\nu_1 + (1 - \cos^2\nu_1 - \cos^2\nu_3) \equiv$$
$$(1 - \cos^2\nu_1)(1 - \cos^2\nu_3) \equiv (\cos^2\nu_2 + \cos^2\nu_3)\sin^2\nu_3,$$

und da ebenso

$$\cos^2\nu_2\cos^2\nu_3 + \cos^2\nu_1 \equiv (\cos^2\nu_1 + \cos^2\nu_3)\sin^2\nu_3,$$

so kommt für die Abhängigkeit der q-Werte von der Richtung ν_1, ν_2, ν_3 der Ausdruck

$$q^4 - q^2\left\{a^2(\cos^2\nu_2 + \cos^2\nu_3) + b^2(\cos^2\nu_3 + \cos^2\nu_1) + c^2(\cos^2\nu_1 + \cos^2\nu_2)\right\}$$
$$+ a^2b^2\cos^2\nu_3 + b^2c^2\cos^2\nu_1 + c^2a^2\cos^2\nu_2 = 0$$

oder in Übereinstimmung mit Gleichung II

$$\frac{\cos^2\nu_1}{q^2 - a^2} + \frac{\cos^2\nu_2}{q^2 - b^2} + \frac{\cos^2\nu_3}{q^2 - c^2} = 0$$

w. z. b. w.[1])

34. Der Einfachheit halber sind die folgenden Formeln sämtlich auf ein rechtwinkliges, rechtshändiges Achsensystem x, y, z bezogen, das, vom bisherigen Brauch abweichend, so mit dem Prisma fest verbunden ist, daß die z-Achse wie früher mit der Prismenkante zusammenfällt und nach oben positiv gerechnet wird, die x-Achse aber nicht mehr in der Halbierungsebene des inneren Prismenwinkels sondern in der einen Grenzebene des Prismas liegt. Die nach außen gerichtete Normale dieser Ebene ist die positive y-Achse, während die positive x-Achse nach der Basis des Prismas hinzeigt. Durch diese Festsetzung ist jene Grenzebene eindeutig gekennzeichnet. Bei der gewöhnlichen Aufstellungsart des Prismas auf dem einkreisigen Goniometer, wo das Licht, vom Beobachter aus gesehen, nach links abgelenkt wird, ist

---

[1]) Über eine andere Ableitung dieser Gleichung aus derjenigen des Indexellipsoides vergl. Pockels, Lehrbuch der Kristalloptik S. 33 f.

sie die Austrittsfläche, und $+y$ fällt mit dem Fortpflanzungssinn des Lichtes zusammen.

Neben diesem xyz-System kommt noch das bereits früher beschriebene $\xi\eta\zeta$-System in Betracht. Für die Richtungskosinus, welche die positiven Richtungen des einen Systems in bezug auf die positiven Richtungen des anderen Systems festlegen, gilt das Schema I der Form nach unverändert.

35. Um jetzt auf den Gegenstand selber einzugehen, sollen zunächst die Gleichungen des Indexellipsoides und der Wellennormalenfläche auf das neue Achsensystem bezogen werden. Das geschieht durch die aus dem Schema I folgenden linearen Beziehungen

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z\\ \eta &= \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z\\ \zeta &= \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z,\end{aligned}$$

deren Substitution in

$$a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 = 1$$

die Gleichung ergibt

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx = 1. \qquad \text{VII}$$

Dabei ist zur Abkürzung

$$a_{ik} \equiv a^2\alpha_i\alpha_k + b^2\beta_i\beta_k + c^2\gamma_i\gamma_k \qquad (a_{ik} = a_{ki}) \qquad \text{VIII}$$

gesetzt. Diese sechs Koeffizienten der Gleichung VII wurden von W. Voigt[1]) Polarisationskonstanten genannt.

In ebenderselben Weise ergäbe sich die neue Gleichung der Wellennormalenfläche. Da aber für das Weitere nur ihr Schnitt mit der Ebene $z = 0$ in Betracht fällt, und für die vorliegenden Zwecke die Polarkoordinaten bequemer sind wie die rechtwinkligen, so empfiehlt es sich, die Transformationsformeln in der bereits oben in § 4 hergeleiteten Form zu schreiben.

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \alpha_1\cos\psi + \alpha_2\sin\psi\\ \nu_2 &= \beta_1\cos\psi + \beta_2\sin\psi\\ \nu_3 &= \gamma_1\cos\psi + \gamma_2\sin\psi.\end{aligned}$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in Gleichung II gibt mit Benutzung der eben definierten Polarisationskonstanten die Gleichung

[1]) W. Voigt, Gött. Nachr. 1896 pag. 17.

$$q^4 - q^2 [(a_{22} + a_{33}) \cos^2\psi + (a_{33} + a_{11}) \sin^2\psi - 2\, a_{12} \sin\psi \cos\psi] + [(a_{22}\, a_{33} - a_{23}^2) \cos^2\psi + (a_{33}\, a_{11} - a_{31}^2) \sin^2\psi - 2\,(a_{12}\, a_{33} - a_{23}\, a_{31}) \sin\psi \cos\psi] = 0. \qquad \text{IX}$$

Diese Gleichung stellt die nämliche Kurve dar wie Gleichung III. Die beiden Gleichungen unterscheiden sich nur durch das Bezugssystem. Um dies auch in der Schreibweise anzudeuten, soll für Gleichung IX abkürzend[1]) gesetzt werden

$$q^4 - q^2 (P_{11} \cos^2\psi + P_{22} \sin^2\psi - 2\, P_{12} \sin\psi \cos\psi) + (Q_{11} \cos^2\psi + Q_{22} \sin^2\psi - 2\, Q_{12} \sin\psi \cos\psi) = 0. \qquad \text{X}$$

Darin ist

$$\begin{aligned} P_{11} &\equiv a_{22} + a_{33} & Q_{11} &\equiv a_{22}\, a_{33} - a_{23}^2 \\ P_{22} &\equiv a_{33} + a_{11} & Q_{22} &\equiv a_{33}\, a_{11} - a_{31}^2 \\ P_{12} &\equiv a_{12} & Q_{12} &\equiv a_{12}\, a_{33} - a_{23}\, a_{31}\,. \end{aligned} \qquad \text{XI}\overset{(i)}{a} \quad i = 1, 2 \ldots 6$$

36. Die Konstanten P_{ik} und Q_{ik} können durch sechs Wertpaare (q, ψ) eindeutig bestimmt werden. Dagegen ergeben sich aus den Gleichungen $\text{XI}\overset{(i)}{a}$ im allgemeinen acht Lösungssysteme für die Polarisationskonstanten. In der Tat aus $\text{XI}\overset{(1)}{a}$ und $\text{XI}\overset{(2)}{a}$ kommen die Werte

$$a_{22} = P_{11} - a_{33}$$
$$a_{11} = P_{22} - a_{33},$$

welche in $\text{XI}\overset{(4)}{a}$ und $\text{XI}\overset{(5)}{a}$ eingesetzt

$$a_{23}^2 = a_{33}\,(P_{11} - a_{33}) - Q_{11}$$
$$a_{13}^2 = a_{33}\,(P_{22} - a_{33}) - Q_{22}$$

ergeben, während aus $\text{XI}\overset{(6)}{a}$ mit Berücksichtigung von $\text{XI}\overset{(3)}{a}$ folgt:

$$a_{23}\, a_{31} = a_{33}\, P_{12} - Q_{12}.$$

Werden beide Seiten dieser Gleichung quadriert und für a_{12}^2 und a_{23}^2 die soeben gefundenen Werte eingesetzt, so erhält man zur Bestimmung von a_{33} die Gleichung vierten Grades

$$a_{33}^4 - (P_{11} + P_{22})\, a_{33}^3 + (P_{11}\, P_{22} - P_{12}^2 + Q_{11} + Q_{22})\, a_{33}^2 - (P_{11}\, Q_{22} + P_{22}\, Q_{11} - 2\, P_{12}\, Q_{12})\, a_{33} + (Q_{11}\, Q_{22} - Q_{12}^2) = 0. \qquad \text{XII}$$

Diese Gleichung muß mit Gleichung VI identisch sein, wie aus der Beziehung zwischen L_{ik} und M_{ik} einerseits sowie

---

[1]) Die Benutzung der früheren Abkürzungen L_{ik} und M_{ik} empfiehlt sich nicht, weil sie zu (natürlich bloß formalen) Widersprüchen führt zwischen einigen Sätzen des ersten und zweiten Teiles.

P_{ik} und Q_{ik} anderseits sofort hervorgeht. Man kann darum ohne weiteres schließen, daß

$$a^2, b^2, c^2 \text{ und } a_{33} \equiv a^2 \alpha_3^2 + b^2 \beta_3^2 + c^2 \gamma_3^2$$

die Wurzeln der Gleichung XII sind (vergl. § 5).

37. Da nach den Gleichungen $\text{XIa}^{(i)}$ die P_{ik} und Q_{ik} bekannte Funktionen von a_{ik} sind, so kann man sie mit Hilfe der Gleichungen VIII als Funktionen von $a^2, b^2, c^2, \alpha_i, \beta_i$ und γ_i ausdrücken und so sechs Beziehungen zwischen diesen zwölf Größen und den sechs Polarisationskonstanten aufstellen. Die vier Werte von a_{33}, welche die Gleichung XII liefert, ergeben dann der Reihe nach für a_{11} und a_{22} je einen zugeordneten Wert, während sich für a_{23} und a_{31} je zwei Werte finden, die aber nur im Vorzeichen verschieden sind. a_{12} hat für alle vier Werte von a_{33} immer denselben festen Wert

$$P_{12} = a^2 \alpha_1 \alpha_2 + b^2 \beta_1 \beta_2 + c^2 \gamma_1 \gamma_2.$$

Die folgende Tabelle I liefert die Resultate in anschaulicher Übersicht. Die Werte je einer Kolonne gehören zusammen. Bei a_{23} und a_{31} entsprechen sich die oberen resp. die unteren Vorzeichen. Der Beweis hierfür ergibt sich aus der Identität

$$Q_{12} \equiv a_{12} a_{33} - a_{23} a_{31}.$$

Wie man sieht, werden für

$$a_{33} = a^2, c^2$$

a_{23} und a_{31} im allgemeinen[1]) imaginär. Diese beiden Wurzeln von XII scheiden darum aus und die Gleichung XII wird wie die Gleichung VI praktisch zweideutig. Ihre Wurzeln bestimmen mit den zugeordneten Lösungen der Gleichungen $\text{XIa}^{(i)}$ zwei Ellipsoide mit verschieden gerichteten Hauptachsen. Die größte und kleinste haben in beiden je dieselbe Länge, dagegen ist die mittlere Achse des einen gleich dem Abschnitt des anderen auf der z-Achse (entsprechend dem in § 25 gefundenen Ergebnis). Jedes dieser Ellipsoide kommt in zwei Orientierungen vor, die wegen der Zweideutigkeit der Vorzeichen von a_{23} und a_{31} die Eigenschaft haben, daß die eine Lage aus der anderen durch Drehung von 180° um die

---

[1]) Einzig für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ resp. $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ bleiben diese Werte bzw. reell, werden dann aber mit der vierten Lösung identisch.

Tabelle I

a_{33}	a^2	b^2
a_{22}	$b^2+c^2-(a^2\alpha_1^2+b^2\beta_1^2+c^2\gamma_1^2)$	$c^2+a^2-(a^2\alpha_1^2+b^2\beta_1^2+c^2\gamma_1^2)$
a_{11}	$b^2+c^2-(a^2\alpha_2^2+b^2\beta_2^2+c^2\gamma_2^2)$	$c^2+a^2-(a^2\alpha_2^2+b^2\beta_2^2+c^2\gamma_2^2)$
a_{23}	$\pm\alpha_1\sqrt{(c^2-a^2)(a^2-b^2)}$	$\pm\beta_1\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}$
a_{13}	$\mp\alpha_2\sqrt{(c^2-a^2)(a^2-b^2)}$	$\mp\beta_2\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}$
a_{12}	$a^2\alpha_1\alpha_2+b^2\beta_1\beta_2+c^2\gamma_1\gamma_2$	$a^2\alpha_1\alpha_2+b^2\beta_1\beta_2+c^2\gamma_1\gamma_2$
a_{33}	c^2	$a^2\alpha_3^2+b^2\beta_3^2+c^2\gamma_3^2$
a_{22}	$a^2+b^2-(a^2\alpha_1^2+b^2\beta_1^2+c^2\gamma_1^2)$	$a^2\alpha_2^2+b^2\beta_2^2+c^2\gamma_2^2$
a_{11}	$a^2+b^2-(a^2\alpha_2^2+b^2\beta_2^2+c^2\gamma_2^2)$	$a^2\alpha_1^2+b^2\beta_1^2+c^2\gamma_1^2$
a_{23}	$\pm\gamma_1\sqrt{(b^2-c^2)(c^2-a^2)}$	$\pm(a^2\alpha_2\alpha_3+b^2\beta_2\beta_3+c^2\gamma_2\gamma_3)$
a_{13}	$\mp\gamma_2\sqrt{(b^2-c^2)(c^2-a^2)}$	$\pm(a^2\alpha_3\alpha_1+b^2\beta_3\beta_1+c^2\gamma_3\gamma_1)$
a_{12}	$a^2\alpha_1\alpha_2+b^2\beta_1\beta_2+c^2\gamma_1\gamma_2$	$a^2\alpha_1\alpha_2+b^2\beta_1\beta_2+c^2\gamma_1\gamma_2$

z-Achse abgeleitet werden kann (in genauer Übereinstimmung mit dem in § 23 Gesagten). Der Beweis ist einfach. Ersetzt man x und y durch ihre entgegengesetzten Werte, so geht die Gleichung des einen Ellipsoides in diejenige des anderen über.

Die Unbestimmtheit liegt dem Gesagten zufolge in der Zweideutigkeit der Gleichung XII ($a_{33}=b^2, a^2\alpha_3^2+b^2\beta_3^2+c^2\gamma_3^2$) sowie des Wertes von a_{13} (die Vorzeichen von a_{23} und a_{31} bestimmen sich gegenseitig). **Dieselbe kann nun in einfacher Weise umgangen werden, wenn die Schwingungsrichtungen jener zwei Wellen in**

Betracht gezogen werden, deren Ebenen parallel zur Austrittsfläche des Prismas (x z-Ebene) sind.

38. Es ist bekannt, daß die Schwingungsrichtung sich im allgemeinen ändert, wenn die Welle aus dem Kristall in die Luft übertritt. Der Grund liegt darin, daß die Schwingungsrichtung der beiden an der Austrittsebene in den Kristall hineinreflektierten Wellen im allgemeinen verschieden ist von der Schwingungsrichtung der im Kristall einfallenden Welle. Fällt aber die Welle im Kristall parallel zur Grenzebene auf, so wird sie beim Übergang in die Luft nicht nur nicht abgelenkt, sondern auch die beiden, durch Reflexion entstandenen Wellen sind parallel zur Grenzebene und schwingen parallel und senkrecht zur Schwingungsebene der im Kristall einfallenden Welle. Dann aber ist die Energie der reflektierten Welle, die senkrecht zur Schwingungsrichtung der einfallenden schwingt, null, und wegen der Erhaltung der Energie muß die ausgetretene Welle parallel zur einfallenden schwingen.

39. Es seien nun q_1 und q_2 $(q_1 < q_2)$ die Geschwindigkeiten der beiden Wellen, deren Ebenen parallel zur Austrittsfläche sind und ε_1 und ε_2 die Azimute der zugehörigen Schwingungsrichtungen, die im Gegenzeigersinn von $+z$ über $+x$ (von $+y$ aus gesehen) positiv gerechnet werden. Selbstverständlich unterscheiden sich ε_1 und ε_2 um $\pi/2$, und man kann

$$\varepsilon_1 = \varepsilon$$
$$\varepsilon_2 = \varepsilon + \pi/2$$

setzen. Nach dem Fresnelschen Satze wird das Indexellipsoid von der zx-Ebene in einer Ellipse geschnitten, deren Halbachsen die Länge $1 : q_1$ und $1 : q_2$ haben und mit der z-Achse die Winkel ε und $\varepsilon + \pi/2$ einschließen. Ihre auf diese Richtungen als Achsen bezogene Gleichung lautet daher

$$q_1^2 Z^2 + q_2^2 X^2 - 1 = 0.$$

Durch die Substitution

$$Z = z \cos \varepsilon + x \sin \varepsilon$$
$$X = - z \sin \varepsilon + x \cos \varepsilon$$

erhält man ihre auf das zx-Sxstem bezogene Gleichung

$$(q_1^2 \cos^2 \varepsilon + q_2^2 \sin^2 \varepsilon) z^2 + 2 (q_1^2 - q_2^2) \sin \varepsilon \cos \varepsilon \, zx$$
$$+ (q_1^2 \sin^2 \varepsilon + q_2^2 \cos^2 \varepsilon) x^2 - 1 = 0.$$

Anderseits bekommt man für diese nämliche Ellipse aus der Gleichung des Indexellipsoides

$$a_{33} z^2 + 2 a_{31} zx + a_{11} x^2 - 1 = 0.$$

Durch Vergleichung beider Ausdrücke erhält man daher

$$\begin{aligned} a_{11} &\equiv q_1^2 \sin^2 \varepsilon + q_2^2 \cos^2 \varepsilon \equiv R_{11} \\ a_{13} &\equiv (q_1^2 - q_2^2) \sin \varepsilon \cos \varepsilon \equiv R_{13} \\ a_{33} &\equiv q_1^2 \cos^2 \varepsilon + q_2^2 \sin^2 \varepsilon \equiv R_{33}. \end{aligned} \qquad \text{XI b}$$

Hieraus und aus den Gleichungen XIa$^{(i)}$ ergeben sich für die Polarisationskonstanten die Werte:

$$a_{11} = R_{11} \qquad a_{22} = P_{11} - R_{33} \qquad a_{33} = R_{33}$$
$$a_{23} = (P_{12} R_{33} - Q_{12}) : R_{13} \qquad a_{31} = R_{13} \qquad a_{12} = P_{12}.$$

Daneben bestehen noch die drei Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} a_{11} &\equiv R_{11} = P_{22} - R_{33} \\ a_{23}^2 &\equiv (P_{11} - R_{33}) R_{33} - Q_{11} = (P_{12} R_{33} - Q_{12}^2)^2 : R_{13}^2 \\ a_{13}^2 &\equiv R_{11} R_{33} - Q_{22} = R_{12}^2. \end{aligned}$$

Da aber die oben ermittelten Werte diesen Gleichungen nicht streng genügen, indem die aus den Beobachtungen abgeleiteten Zahlen P_{ik}, Q_{ik} und R_{ik} nicht fehlerfrei sind, so dienen sie dazu, um an den Polarisationskonstanten Verbesserungen anzubringen, die sich nach den Regeln der Ausgleichungsrechnung finden lassen.

40. Die soeben entwickelte Methode hat sich bei der experimentellen Prüfung leider nicht bewährt. Die Rechnung hat nämlich in den untersuchten Fällen (Colemanit und Kupfervitriol) ergeben, daß mindestens die fünf ersten Dezimalstellen im Zähler von

$$a_{23} = (P_{12} R_{33} - Q_{12}) : R_{13}$$

verschwinden, so daß derselbe, bei der am Goniometer erreichbaren Genauigkeit gar nicht mehr bestimmbar ist. Selbst das Vorzeichen von a_{23} wird zweifelhaft, da es bei dieser Größenordnung von allerhand Zufälligkeiten abhängt, ob die Differenz

$$P_{12} R_{33} - Q_{12}$$

positiv oder negativ wird (zumal wenn P_{12} und Q_{12} gleiches Vorzeichen haben).

Diese experimentell gefundene Tatsache kann bezüglich ihrer allgemeinen Geltung rechnerisch geprüft werden. Um aber den Gang der hier vor allem wichtigen Ableitung nicht

zu unterbrechen, soll die betreffende Untersuchung als Anhang dieses zweiten Teiles gegeben werden.

41. Die eben genannten Schwierigkeiten können umgangen werden, wenn neben dem Polarisationszustand der zur Austrittsfläche parallelen Wellenebenen auch der Polarisationszustand jener Wellen in Rechnung gezogen wird, deren Normalen senkrecht zur anderen Grenzfläche sind. Bei der Messung wird es am einfachsten sein, das Prisma so um die z-Achse zu drehen, daß jene Grenzfläche des Prismas, die vorher Austrittsebene der Wellen war, nun zur Eintrittsebene wird und umgekehrt. Analytisch wird diese Drehung durch die Transformationsformeln

$$x = x' \cos \Gamma + y' \sin \Gamma$$
$$y = -x' \sin \Gamma + y' \cos \Gamma$$

zum Ausdruck gebracht. Natürlich ist im x'y'z'-System y' in das Kristallinnere hineingerichtet, sofern die positive x'-Achse von der Kante des Prismas nach der Basis verlaufen soll. Auf dieses System bezogen, schreibt sich die Gleichung des Indexellipsoides in der Form:

$$\begin{aligned}&(a_{11} \cos^2 \Gamma + a_{22} \sin^2 \Gamma - 2\, a_{12} \sin \Gamma \cos \Gamma)\, x'^2 + \\ &\quad (a_{11} \sin^2 \Gamma + a_{22} \cos^2 \Gamma + 2\, a_{12} \sin \Gamma \cos \Gamma)\, y'^2 + a_{33}\, z'^2 + \\ &\quad 2\,(a_{11} \sin \Gamma \cos \Gamma - a_{22} \sin \Gamma \cos \Gamma - a_{12} \sin^2 \Gamma + a_{12} \cos^2 \Gamma)\, x'y' + \\ &\quad 2\,(a_{23} \cos \Gamma + a_{31} \sin \Gamma)\, y'z' + 2\,(a_{31} \cos \Gamma - a_{23} \sin \Gamma)\, z'x' - 1 = 0.\end{aligned}$$

Von der z'x'-Ebene wird diese Fläche in der Kurve

$$\begin{aligned}&(a_{11} \cos^2 \Gamma + a_{22} \sin^2 \Gamma - 2\, a_{12} \sin \Gamma \cos \Gamma)\, x'^2 \\ &\qquad + a_{33}\, z'^2 + 2\,(a_{31} \cos \Gamma - a_{23} \sin \Gamma)\, z'x' = 1\end{aligned}$$

geschnitten. Anderseits liefert die Beobachtung zunächst die reziproken Werte ihrer Hauptachsen q'_1 und q'_2 $(q'_1 < q'_2)$ und wegen der Schwingungsrichtung auch die Orientierung derselben. Das Azimut der Schwingungsrichtung von q'_1 werde mit ε' bezeichnet und von $+z$ über $-x$ im Gegenzeigersinn (von außen gesehen) gemessen. Für die andere Welle kann es gleich $\varepsilon' + \pi/2$ gesetzt werden.

Bezogen auf diese Schwingungsrichtungen als Achsen hat die Schnittellipse der x'z'-Ebene mit dem Indexellipsoid die Gleichung

$$q'^2_1 Z'^2 + q'^2_2 X'^2 = 1,$$

und da

$$Z' = -x' \sin\varepsilon' + z' \cos\varepsilon'$$
$$X' = -x' \cos\varepsilon' - z' \sin\varepsilon',$$

so kommt dafür

$$(q'^2_1 \sin^2\varepsilon' + q'^2_2 \cos^2\varepsilon')\, x'^2 - 2\,(q'^2_1 - q'^2_2) \sin\varepsilon' \cos\varepsilon'\, x'z' +$$
$$(q'^2_1 \cos^2\varepsilon' + q'^2_2 \sin^2\varepsilon')\, z'^2 = 1.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} a_{11} \cos^2\Gamma - 2\, a_{12} \sin\Gamma \cos\Gamma + a_{22} \sin^2\Gamma &\equiv q'^2_1 \sin^2\varepsilon' + q'^2_2 \cos^2\varepsilon' \equiv R'_{11} \\ a_{31} \cos\Gamma - a_{23} \sin\Gamma &\equiv -(q'^2_1 - q'^2_2) \sin\varepsilon' \cos\varepsilon' \equiv R'_{13} \\ a_{33} &\equiv q'^2_1 \cos^2\varepsilon' + q'^2_2 \sin^2\varepsilon' \equiv R'_{33} \end{aligned} \qquad \text{XIc}$$

und hieraus

$$a_{23} = \frac{(q'^2_1 - q'^2_2) \sin\varepsilon \cos\varepsilon + a_{31} \cos\Gamma}{\sin\Gamma}.$$

Die Genauigkeit dieser letzten Formel sowie ihr Vorteil der früheren gegenüber ist bei späterer Gelegenheit noch eingehend zu untersuchen.

42. Durch die hiermit eindeutig gegebenen Polarisationskonstanten ist das Indexellipsoid vollständig bestimmt. Zur Ermittlung der Hauptlichtgeschwindigkeiten und der optischen Orientierung des Kristalls ist es dem Gesagten zufolge nur mehr nötig, Größe und Lage der Hauptachsen des Indexellipsoides zu finden. Das ist aber ein ganz gewöhnliches Problem der analytischen Geometrie. Bekanntlich sind die Koordinaten u, v, w des Endpunktes einer solchen Achse den Komponenten der zugehörigen Flächennormale, d. h. den partiellen Differentialquotienten von

$$a_{11}\, u^2 + a_{22}\, v^2 + a_{33}\, w^2 + 2a_{12}\, uv + 2a_{23}\, vw + 2a_{31}\, wu = 1$$

proportional. Man hat daher

$$\begin{aligned} a_{11} u + a_{12} v + a_{13} w &= \lambda u \\ a_{12} u + a_{22} v + a_{23} w &= \lambda v \\ a_{13} u + a_{23} v + a_{33} w &= \lambda w, \end{aligned} \qquad \text{XIII}$$

wo λ ein Proportionalitätsfaktor ist. Dieses System von Gleichungen hat aber dann und nur dann von (0, 0, 0) verschiedene Lösungen, falls

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{XIV}$$

Diese Determinante stellt eine Gleichung dritten Grades in λ dar, deren Wurzeln im allgemeinen verschieden und nach dem bekannten Weierstraßschen Beweis reell sind. Man erhält darum drei Werte von λ und somit auch drei Systeme von Lösungen

$$u_i : v_i : w_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Multipliziert man die drei Gleichungen XIII der Reihe nach mit u, v, w und addiert, so erhält man, falls man λ und die Variablen mit dem Index behaftet,

$$\lambda_i (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) = 1.$$

Wegen der Voraussetzungen über u, v, w stellt

$$\lambda_i = \frac{1}{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2}$$

das Quadrat der reziproken Länge einer Hauptachse des Indexellipsoides dar, weshalb die Beziehungen gelten

$$a = \sqrt{\lambda_1}, \; b = \sqrt{\lambda_2}, \; c = \sqrt{\lambda_3},$$

wofern

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$$

gewählt wird.

Die Richtungskosinus ergeben sich jetzt unmittelbar. Man findet beispielshalber

$$\alpha_1 = u_1 \, a = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2 + w_1^2}}$$

und ähnliche Ausdrücke für die anderen acht Richtungskosinus. Ihre Werte ändern sich also nicht, wenn beliebige Vielfache von u_i, v_i, w_i benützt werden, was insofern von Bedeutung ist, als die Gleichungen XIII nur die Verhältnisse

$$u_i : v_i : w_i$$

zu finden erlauben.

43. Nachdem es so gelungen ist, das Prismenproblem allgemein und unabhängig vom Kristallsystem eindeutig zu lösen, werden jetzt jene Fälle näher zu betrachten sein, bei denen die entwickelte Methode versagt oder doch zu versagen scheint. Dies trifft zu, wenn die Ein- oder Austrittsebene des Prismas oder beide zugleich je auf einer optischen Achse (= Binormale) senkrecht stehen — die zu diesen Flächen parallelen Wellenebenen also keine bestimmte Schwingungs-

richtung haben. Damit wird natürlich die angegebene Methode illusorisch und die Formeln XIb bzw. XIc können und dürfen streng genommen nicht mehr zur Bestimmung der a_{ik} herangezogen werden, da die Voraussetzungen (bestimmte Schwingungsrichtung), auf Grund derer sie abgeleitet wurden, nicht mehr erfüllt sind. Indessen ergibt eine kurze Überlegung analoge Ausdrücke. Es genüge, dies für den Fall zu zeigen, daß die xz-Ebene auf einer optischen Achse senkrecht stehe. Das Indexellipsoid wird von derselben in einem Kreis geschnitten, als dessen Gleichung sich

$$a_{11} x^2 + 2 a_{13} xz + a_{33} z^2 - 1 = 0$$

ergibt. Da der Radius desselben gleich 1/b (b ist die Normalengeschwindigkeit längs der optischen Achse), so folgt

$$a_{11} = a_{33} = b^2, \quad a_{13} = 0$$

Es ist nun interessant zu sehen, daß die Gleichungen XIb sich genau auf diese Werte reduzieren und somit auch in diesem Grenzfall gültig bleiben. In der Tat, da

$$q_1 = q_2 = b,$$

so kommt

$$a_{11} = a_{33} = b^2 (\sin^2 \varepsilon + \cos^2 \varepsilon) = b^2$$
$$a_{13} = (q_1^2 - q_2^2) \sin \varepsilon \cos \varepsilon = 0.$$

Die übrigen Formeln bleiben unverändert, nur zeigt sich, wie die Bestimmung von a_{23} nach der Gleichung

$$a_{23} = (P_{12} R_{33} - Q_{12}) : R_{13},$$

die, wie bereits bemerkt, auch im allgemeinen kein günstiges Resultat liefert, hier zum vorneherein versagt, weil Nenner und Zähler verschwinden und a_{23} sich auf die unbestimmte Form $a_{23} = 0:0$ reduziert — ein Grund mehr, die ursprüngliche Fassung der Methode fallen zu lassen. Die nämliche Schwierigkeit (Unbestimmtheit von a_{23}) hätte sich übrigens immer eingestellt, wenn $a_{13} = 0$, was offenbar, vom eben behandelten Fall abgesehen, nur noch eintritt, wenn die zur xz-Ebene parallelen Wellenebenen parallel und senkrecht zur Prismenkante schwingen d. h.

1) wenn die Querschnittsebene eine Symmetrieebene ist. Aus Symmetriegründen verschwindet dann aber neben a_{13}

auch a_{23}, was zur Folge hat, daß selbst ohne Rücksicht auf den Polarisationszustand der zu den Grenzflächen parallelen Wellen die Polarisationskonstanten lediglich auf Grund der Gleichungen $XIa^{(i)}$ eindeutig bestimmt werden können. Übrigens handelt es sich hier um den bereits erledigten Fall a) von § 31;

2) wenn die yz-Ebene eine Symmetrieebene ist (vergl. § 31 c) und Anm. ganz am Schluß desselben Paragraphen);

3) wenn die Strahlen, die zu den parallel austretenden Wellen gehören, in der Querschnittsebene bzw. in der yz-Ebene liegen.

Im folgenden soll nun die Methode für die verschiedenen Systeme spezialisiert werden.

I. Triklines System.

44. Im triklinen System besteht zwischen kristallographischer Richtung und optischer Orientierung kein direkt erkennbarer Zusammenhang. Zudem ist die Lage sämtlicher Hauptschwingungsrichtungen für die verschiedenen Farben verschieden. Zur Bestimmung der optischen Konstanten kommt daher die angegebene Methode in ihrer allgemeinen Fassung zur Anwendung.

II. Monoklines System.

45. Im monoklinen System fällt eine Hauptschwingungsrichtung mit der Orthodiagonale zusammen, während die beiden anderen in der Symmetrieebene liegen und mit der Vertikalachse die unbekannten Winkel ϑ und $\pi/2+\vartheta$ bilden, so daß im ganzen nur vier Größen zu bestimmen sind. Dementsprechend muß sich auch die Zahl der Beobachtungen vermindern.

Die Beobachtung der Geschwindigkeiten und Schwingungsrichtungen der zu den Grenzebenen des Prismas parallelen Wellenebenen liefert die sechs Gleichungen

$$a_{11}=R_{11} \qquad a_{11}\cos^2\Gamma+a_{22}\sin^2\Gamma-2\,a_{12}\sin\Gamma\cos\Gamma=R'_{11}$$
$$a_{13}=R_{13} \qquad a_{31}\cos\Gamma-a_{23}\sin\Gamma=R'_{13}$$
$$a_{33}=R_{33} \qquad a_{33}=R'_{33},$$

die aber zur Bestimmung der Polarisationskonstanten nicht

hinreichen, weil a_{22} und a_{12} nur in einer und derselben Gleichung auftreten, a_{33} dagegen doppelt bestimmt wird.

Sind A, B, C die bekannten Richtungskosinus der Orthodiagonale in bezug auf das xyz-System, so muß die Normale des Indexellipsoides in jenem Punkt, dessen Koordinaten x, y, z den Größen A, B, C proportional sind, dieselben Richtungskosinus haben. Bezeichnet daher m einen Proportionalitätsfaktor, so muß nach den Gleichungen XIII

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = mA$$
$$a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z = mB$$
$$a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z = mC$$

sein. Hieraus folgt nach einigen Umstellungen und mit Rücksicht auf die Beziehung

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}$$

das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (a_{11} - \varrho)A + \quad a_{12}B + \quad a_{13}C &= 0 \\ a_{12}A + (a_{22} - \varrho)B + \quad a_{23}C &= 0 \\ a_{13}A + \quad a_{23}B + (a_{33} - \varrho)C &= 0, \end{aligned}$$

das durch Elimination des Proportionalitätsfaktors ϱ die Doppelgleichung

$$\frac{a_{11}A + a_{12}B + a_{13}C}{A} = \frac{a_{12}A + a_{22}B + a_{23}C}{B} = \frac{a_{13}A + a_{23}B + a_{33}C}{C} \qquad \text{XV}$$

ergibt. Im Verein mit XIb und XIc hat man somit zur Bestimmung der sechs Polarisationskonstanten acht Gleichungen, so daß dieselben überbestimmt sind und sich die Methode der kleinsten Quadrate zur Ermittlung genauerer Werte verwenden läßt.

46. Die Gleichungen XV bieten etwelche Schwierigkeiten, wenn eine oder zwei der Größen A, B, C verschwinden.

I. Die Orthodiagonale liege in einer Achsenebene des xyz-Systems und zwar

1) in der Querschnittsebene. Da

$$A = \cos\lambda, \quad B = \sin\lambda, \quad C = 0,$$

so bekommt man aus den beiden ersten Gliedern der Doppelgleichung XV

$$(a_{11} - a_{22})\sin 2\lambda - 2a_{12}\cos 2\lambda = 0.$$

Das dritte Glied muß den beiden ersten, welche endlich sind, gleich sein. Das ist nur dadurch möglich, daß der Zähler desselben verschwindet, d. h. daß

$$a_{13} \cos \lambda + a_{23} \sin \lambda = 0.$$

Statt der beiden Gleichungen XV ergeben sich somit zwei speziellere, welche für die Rechnung sehr bequem sind.

2) in der yz-Ebene. Die Richtungskosinus der Orthodiagonale haben die Werte

$$A = 0, \qquad B = \cos \mu, \qquad C = \sin \mu,$$

und eine analoge Überlegung wie soeben führt an Stelle der Gleichungen XV auf die ebenfalls bequemen Ausdrücke

$$(a_{22} - a_{33}) \sin 2\mu - 2\, a_{23} \cos 2\mu = 0$$

$$a_{12} \cos \mu + a_{13} \sin \mu = 0\,.$$

3) in der Austrittsebene. Setzt man

$$A = \sin \nu, \qquad B = 0, \qquad C = \cos \nu\,,$$

so kommt

$$a_{12} \sin \nu + a_{23} \cos \nu = 0$$

$$(a_{33} - a_{11}) \sin 2\nu - 2\, a_{13} \cos 2\nu = 0.$$

Die letztere Gleichung gibt nichts Neues, sondern stellt vielmehr eine Beziehung dar, welcher die R_{ik} identisch genügen. Denn nach den Gleichungen XIb ist

$$a_{33} - a_{11} = (q_1^2 - q_2^2) \cos 2\varepsilon$$

$$2\, a_{13} = (q_1^2 - q_2^2) \sin 2\varepsilon$$

also auch

$$(a_{33} - a_{11}) \sin 2\varepsilon - 2\, a_{13} \cos 2\varepsilon = 0.$$

Weiter erkennt man aus der Bedeutung von ε, daß eine der beiden Beziehungen

$$\varepsilon = \nu \text{ bzw. } \varepsilon \pm \pi/2 = \nu$$

erfüllt sein muß. Dadurch kommt in jedem Fall

$$(a_{33} - a_{11}) \sin 2\nu - 2\, a_{13} \cos 2\nu \equiv (R_{33} - R_{11}) \sin 2\nu - 2\, R_{13} \cos 2\nu = 0.$$

Zur Berechnung der Polarisationskonstanten kommt demnach neben den Gleichungen XIb, XIc nur die Gleichung

$$a_{12} \sin \nu + a_{23} \cos \nu = 0$$

in Betracht. Wegen der Bedingung

$$R_{33} = R'_{33}$$

bleibt aber für die Ausgleichungsrechnung immer noch Raum.

Würde die Orthodiagonale in die andere Begrenzungsebene

des Prismas fallen, so müßte sich aus der Doppelgleichung XV eine Beziehung ergeben, der die R'_{ik} identisch genügen.

II. Die Orthodiagonale falle mit einer Achse des xyz-Systems zusammen, und zwar

1) mit der z-Achse. Die Querschnittsebene ist eine Symmetrieebene, und die Lösung ergibt sich, wie bereits bemerkt, in einfachster Weise nach § 31a).

2) mit der y-Achse. Da die Richtungskosinus der Orthodiagonale

$$A = 0, \quad B = 1, \quad C = 0$$

werden, das erste und letzte Glied der Gleichungen XV aber endlich bleiben müssen, so kommt

$$a_{12} = 0 \text{ und } a_{23} = 0,$$

wie sich übrigens direkt aus den Symmetrieeigenschaften des Indexellipsoides folgern ließe.

3) mit der x-Achse. Es wird einerseits

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 0$$

und anderseits

$$a_{12} = 0 \text{ und } a_{13} = 0,$$

und für die Anwendung der Ausgleichungsrechnung bleibt, wie auch im vorangehenden Fall, die einzige Bedingung

$$R_{33} = R'_{33}.$$

Es ist beachtenswert, daß in allen Fällen des monoklinen Systems die Bestimmung der P_{ik} an und für sich überflüssig ist.

III. Rhombisches System.

47. Infolge der Symmetrie dieses Systems fallen die Hauptschwingungsrichtungen für alle Farben mit den kristallographischen Achsen zusammen. Seien, von der soeben gebrauchten Bezeichnung etwas abweichend, A_1, A_2, A_3; B_1, B_2, B_3; C_1, C_2, C_3 die Richtungskosinus der Brachy- resp. Makrodiagonale und der Vertikalachse in bezug auf x, y, z. Nach der Doppelgleichung XV gelten die Beziehungen:

$$\frac{a_{11}A_1 + a_{12}A_2 + a_{13}A_3}{A_1} = \frac{a_{12}A_1 + a_{22}A_2 + a_{23}A_3}{A_2} = \frac{a_{13}A_1 + a_{23}A_2 + a_{33}A_3}{A_3}$$

$$\frac{a_{11}B_1 + a_{12}B_2 + a_{13}B_3}{B_1} = \frac{a_{12}B_1 + a_{22}B_2 + a_{23}B_3}{B_2} = \frac{a_{13}B_1 + a_{23}B_2 + a_{33}B_3}{B_3} \qquad \text{XVI}$$

$$\frac{a_{11}C_1 + a_{12}C_2 + a_{13}C_3}{C_1} = \frac{a_{12}C_1 + a_{22}C_2 + a_{23}C_3}{C_2} = \frac{a_{13}C_1 + a_{23}C_2 + a_{33}C_3}{C_3}$$

Diese neun Beziehungen sind nicht voneinander unabhängig. Es gilt vielmehr der Satz: Von den neun Beziehungen der Gleichungen XVI sind nur drei voneinander unabhängig, die aber im allgemeinen auf 78 verschiedene Arten kombiniert werden können. Man kann also in 78-facher Weise aus den neun Gleichungen XVI so drei wählen, daß die übrigen sechs hierdurch bedingt sind.

Zur Erleichterung des Beweises und im Interesse späterer Anwendungen seien vier Vorbemerkungen gestattet. α) Eine einfache Kontrollrechnung zeigt, daß aus zwei Gleichungen je einer Zeile zwei beliebige Polarisationskonstanten als Funktionen der vier anderen gefunden werden können. — β) Man beweist ferner, daß von den drei Gleichungen, deren Glieder nur zwei Kolonnen angehören, jede durch die beiden anderen bedingt ist. In der Tat, schafft man z. B. in den zwei Gleichungen der zwei ersten Zeilen und Kolonnen die Nenner weg und addiert, so kommt

$$(A_1 A_2 + B_1 B_2)\, a_{11} + (A_2^2 + B_2^2 - A_1^2 - B_1^2)\, a_{12} + (A_2 A_3 + B_2 B_3)\, a_{13} \\ - (A_1 A_2 + B_1 B_2)\, a_{22} - (A_1 A_3 + B_1 B_3)\, a_{23} = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Orthogonalitätsbedingungen folgt hierfür

$$C_1 C_2 (a_{11} - a_{22}) + (C_2^2 - C_1^2)\, a_{12} + C_2 C_3\, a_{13} - C_1 C_3\, a_{23} = 0.$$

Das ist aber genau die den beiden Ausgangsgleichungen entsprechende dritte Gleichung, falls man darin die Nenner wegschafft. — γ) Weiterhin kann man zeigen, daß zwei in der genannten Weise aufgestellte Gleichungen nicht unabhängig sind von den zwei Gleichungen, die sich durch andere Kombination der Kolonnen ergeben. Man betrachte zu diesem Zweck die vier Gleichungen:

$$\frac{a_{11} A_1 + a_{12} A_2 + a_{13} A_3}{A_1} - \frac{a_{12} A_1 + a_{22} A_2 + a_{23} A_3}{A_2} = 0$$

$$\frac{a_{11} B_1 + a_{12} B_2 + a_{13} B_3}{B_1} - \frac{a_{12} B_1 + a_{22} B_2 + a_{23} B_3}{B_2} = 0$$

$$\frac{a_{12} A_1 + a_{22} A_2 + a_{23} A_3}{A_2} - \frac{a_{13} A_1 + a_{23} A_2 + a_{33} A_3}{A_3} = 0$$

$$\frac{a_{12} B_1 + a_{22} B_2 + a_{23} B_3}{B_2} - \frac{a_{13} B_1 + a_{23} B_2 + a_{33} B_3}{B_3} = 0.$$

Subtrahiert man von der ersten Gleichung die zweite, so kommt der Ausdruck

$$\left(\frac{A_2}{A_1}-\frac{A_1}{A_2}-\frac{B_2}{B_1}+\frac{B_1}{B_2}\right)a_{12}-\left(\frac{A_3}{A_2}-\frac{B_3}{B_2}\right)a_{23}+\left(\frac{A_3}{A_1}-\frac{B_3}{B_1}\right)a_{31}=0,$$

der mit

$$k=-\frac{A_1 B_1}{A_3 B_3}$$

multipliziert und zur dritten Gleichung addiert nach einigen Umänderungen die Beziehung ergibt:

$$\left[\frac{A_1}{A_2}+\frac{(A_1 B_2-A_2 B_1)(A_1 B_1+A_2 B_2)}{A_2 B_2\cdot A_3 B_3}\right]a_{12}+a_{22}+$$

$$\left[\frac{A_3^2-A_2^2}{A_2 A_3}+\frac{A_1 B_1 (A_3 B_2-A_2 B_3)}{A_2 B_2\cdot A_3 B_3}\right]a_{23}-a_{33}-\frac{B_1}{B_3}a_{31}=0.$$

Beachtet man, daß

$$A_1 B_1+A_2 B_2+A_3 B_3=0$$

und formt man den Koeffizienten von a_{23} in folgende Weise um:

$$\frac{A_3^2 B_2 B_3-A_2^2 B_2 B_3+A_1 B_1 A_3 B_2-A_1 B_1 A_2 B_3}{A_2 B_2 A_3 B_3}=$$

$$\frac{A_3 B_2 (A_3 B_3+A_1 B_1)-A_2 B_3 (A_2 B_2+A_1 B_1)}{A_2 B_2 A_3 B_3}=\frac{A_2 A_3 (B_3^2-B_2^2)}{A_2 A_3\cdot B_2 B_3},$$

so erhält man, falls man die Koeffizienten von a_{22} und a_{33} in selbstverständlicher Weise erweitert,

$$\frac{a_{12} B_1+a_{22} B_2+a_{23} B_3}{B_2}-\frac{a_{13} B_1+a_{23} B_2+a_{33} B_3}{B_3}=0$$

d. h. genau die vierte Gleichung. — δ) Hieraus ergibt sich endlich, daß je eine Gleichung aus jeder Zeile zusammen ein unabhängiges System bilden, wofern dieselben so gewählt werden, daß ihre Glieder nicht sämtlich in den zwei nämlichen Kolonnen figurieren.

Der Beweis des Satzes ist nun leicht zu führen. Da im ganzen neun Gleichungen vorhanden sind, so kann man dieselben in

$$\binom{9}{3}=\frac{9.8.7}{1.2.3}=84$$

verschiedene Gruppen von je drei Gleichungen zusammen-

fassen. Hiervon fallen drei Gruppen weg, weil die Glieder ihrer Gleichungen nur je einer Zeile angehören. Ebenso fallen jene drei Gruppen weg, deren Gleichungen aus sechs Gliedern aufgebaut sind, die nur in je zwei Kolonnen auftreten. Es verbleiben somit 78 verschiedene Kombinationen von drei unabhängigen Gleichungen des Systems XVI.

48. Zur Bestimmung der Polarisationskonstanten genügt die Ermittlung der Geschwindigkeiten und Schwingungsrichtungen der zur xz-Ebene parallelen Wellenebenen, da diese letzteren drei Polarisationskonstanten liefern (a_{11}, a_{13}, a_{33}) und die drei anderen sich aus den Gleichungen XVI ergeben. Am einfachsten ist die Rechnung, wenn man die Gleichungen zweier Zeilen nimmt, deren Glieder in der ersten und dritten Kolonne stehen. Man erhält so a_{12} und a_{23} und kann sie in eine jener beiden Gleichungen eintragen, welche ein Glied der zweiten Kolonne der noch verbleibenden Zeile enthalten. Dadurch ergibt sich a_{22}.

Es hat keinen Zweck, die entsprechenden Gleichungen für a_{12}, a_{22} und a_{23} explizit aufzustellen, da man schließlich alle 78 Systeme betrachten müßte. Sie geben zwar alle das gleiche Resultat, aber nicht alle brauchen für die Rechnung gleich günstig zu sein.

Das gleiche Problem (Bestimmung der Hauptlichtgeschwindigkeiten eines rhombischen Kristalls mit Hilfe eines einzigen Prismas von beliebiger Orientierung) wurde schon früher (§ 15 ff.) behandelt. Die Lösung erwies sich möglich, aber nur auf Grund sehr umständlicher Überlegungen. Auch die von Born[1]) angegebene Methode, deren Voraussetzungen zudem spezieller sind wie die hier gemachten, erfordert die Bestimmung der Kurve C und demzufolge die Ermittlung von mindestens sechs Wertpaaren (q, ψ). Um wieviel einfacher ist demgegenüber die soeben entwickelte Methode, die auf Grund der Ermittlung zweier Lichtgeschwindigkeiten derselben Fortpflanzungsrichtung und der zugehörigen Schwingungsrichtungen — im ganzen also drei unabhängige Be-

---

[1]) N. Jahrbuch f. Mineral. B.-Bd. **5**, 40.

obachtungen — die Berechnung der Hauptlichtgeschwindigkeiten a, b, c gestattet und überdies ergibt, in welcher Weise sich die optischen Symmetrieachsen auf die kristallographischen Achsen verteilen.[1])

49. Ist die Orientierung des Prismas spezieller Art, so vereinfachen sich die Gleichungen XVI, was eventuell eine Vermehrung der Beobachtungen nach sich ziehen kann.

I. Eine kristallographische Achse liege in einer Achsenebene des xyz-Systems, wogegen die beiden anderen eine willkürliche Lage haben. Von den neun Richtungskosinus A_i, B_i, C_i wird einer null. Es verbleiben aber immer noch genug unabhängige Gleichungssysteme, um die allgemeine Methode anwenden zu können. Übrigens kann es von Vorteil sein, ähnliche Überlegungen wie etwa im Falle I, 1. des monoklinen Systems (§ 46) anzustellen und damit einfachere Beziehungen abzuleiten. Wäre z. B. $A_1 = 0$, so käme

$$a_{12} A_2 + a_{13} A_3 = 0.$$

Die anderen Gleichungen vereinfachen sich nicht.

II. Eine kristallographische Achse falle mit einer Achse des xyz-Systems zusammen und zwar

1) Die Brachydiagonale mit der x-Achse. Die neun Richtungskosinus nehmen die speziellen Werte

$$\begin{array}{lll} A_1 = 1 & A_2 = 0 & A_3 = 0 \\ B_1 = 0 & B_2 = \cos\mu & B_3 = \sin\mu \\ C_1 = 0 & C_2 = -\sin\mu & C_3 = \cos\mu \end{array}$$

an und statt der Gleichungen XVI kommt

$$a_{12} = 0 \qquad a_{13} = 0$$

$$(a_{22} - a_{33}) \sin 2\mu - 2 a_{23} \cos 2\mu = 0.$$

Zur Berechnung der a_{ik} ist es notwendig, die R'_{ik} heranzuziehen, wodurch Überbestimmung und damit die Möglichkeit der Anwendung der Ausgleichungsrechnung vorhanden ist.

2) Die Brachydiagonale mit der y-Achse. Da

---

[1]) Hier sei erwähnt, daß auf Grund der nämlichen Beobachtungsdaten — jedoch mit Hilfe einer wesentlich anderen Formel Th. v. Liebisch die Bestimmung der optischen Konstanten rhombischer Kristalle theoretisch durchgeführt hat. (Zeitschr. f. Krist. und Min. **7**. 433—437).

$$A_1 = 0 \qquad A_2 = 1 \qquad A_3 = 0$$
$$B_1 = \sin\mu \qquad B_2 = 0 \qquad B_3 = \cos\mu$$
$$C_1 = \cos\mu \qquad C_2 = 0 \qquad C_3 = -\sin\mu,$$

erhält man analog wie vorher

$$a_{12} = 0 \qquad a_{23} = 0$$
$$(a_{11} - a_{33})\sin 2\mu + 2a_{13}\cos 2\mu = 0.$$

Die letztere Gleichung ist, wie in § 46, I, 3 gezeigt wurde, eine Identität und scheidet darum aus, so daß abermals die R'_{ik} heranzuziehen sind.

3) Die Brachydiagonale mit der z-Achse. — Die Lösung ergibt sich, wie schon mehrmals bemerkt, am einfachsten nach der gewöhnlichen Methode.

Würde statt der Brachydiagonale die Makrodiagonale oder die Vertikalachse mit einer Achse des xyz-Systems zusammenfallen, so würden die voranstehenden Formeln im wesentlichen unverändert bleiben.

III. Das xyz-System fällt mit dem kristallographischen Achsenkreuz zusammen. Man kommt damit auf den allergewöhnlichsten Fall, der keiner weiteren Erörterung bedarf.

50. Es bleibt noch der interessante Fall zu erledigen, wo die optische Orientierung beliebig, aber gegeben[1]) ist. Man hat ohne weiteres

$$R_{11} = a^2\alpha_1^2 + b^2\beta_1^2 + c^2\gamma_1^2$$
$$R_{13} = a^2\alpha_1\alpha_3 + b^2\beta_1\beta_3 + c^2\gamma_1\gamma_3$$
$$R_{33} = a^2\alpha_3^2 + b^2\beta_3^2 + c^2\gamma_3^2.$$

Die Determinante dieses Systemes ist

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 \\ \alpha_1\alpha_3 & \beta_1\beta_3 & \gamma_1\gamma_3 \\ \alpha_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1^2+\beta_1^2+\gamma_1^2 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 \\ \alpha_1\alpha_3+\beta_1\beta_3+\gamma_1\gamma_3 & \beta_1\beta_3 & \gamma_1\gamma_3 \\ \alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \beta_1^2 & \gamma_1^2 \\ 0 & \beta_1\beta_3 & \gamma_1\gamma_3 \\ 1 & \beta_3^2 & \gamma_3^2 \end{vmatrix} =$$
$$= \beta_1\beta_3\gamma_3^2 - \beta_3^2\gamma_1\gamma_3 + \beta_1^2\gamma_1\gamma_3 - \beta_1\beta_3\gamma_1^2 = \beta_3\gamma_3(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) +$$
$$+ \beta_1\gamma_1(\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1) = (\beta_1\gamma_3 - \beta_3\gamma_1)(\beta_3\gamma_3 + \beta_1\gamma_1) = \alpha_2\beta_2\gamma_2$$

---

[1]) Th. v. Liebisch, N. Jahrb. f. Mineral. 1886. I Seite 23.
M. Born, N. J. f. Min. B. Bd. 5 (1887) Seite 40.
Dem § 48 gegenüber wird hier vorausgesetzt, daß es bekannt sei, mit welchen kristallographischen Achsen die einzelnen optischen Symmetrieachsen zusammenfallen. Dadurch wird aber nur eine rechnerische, nicht aber eine sachliche Vereinfachung erreicht.

und darum sicher von null verschieden, wenn die y-Achse auf keiner optischen Symmetrieachse senkrecht steht. Grund für das Verschwinden der Determinante ist der, daß in allen diesen Fällen wenigstens eine optische Symmetrieachse in die zx-Ebene zu liegen kommt, so daß der Winkel ε zum vorneherein gegeben ist. Es verbleiben demnach nur noch zwei unabhängige Beobachtungsreihen, die natürlich zur Bestimmung der drei Unbekannten nicht hinreichen.

51. In Kürze sei noch auf die Verwendungsmöglichkeit der Methode im Falle optisch einachsiger Kristalle aufmerksam gemacht.

Setzt man $a = b = o$ und $c = e$ (wobei allerdings die Annahme $a > b > c$ ganz dahinfällt, indem o ebensogut größer wie kleiner als e sein kann), so kommt

$$a_{ii} \equiv (\alpha_i^2 + \beta_i^2)\, o^2 + \gamma_i^2\, e^2$$
$$a_{ik} \equiv (\alpha_i \alpha_k + \beta_i \beta_k)\, o^2 + \gamma_i \gamma_k\, e^2.$$

Wegen der Identitäten

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1$$

und wegen

$$\alpha_i \alpha_k + \beta_i \beta_k + \gamma_i \gamma_k = 0$$

kann die Gleichung VII des Indexellipsoides auf die Form

$$[o^2 + (e^2 - o^2)\gamma_1^2]\, x^2 + [o^2 + (e^2 - o^2)\gamma_2^2]\, y^2 + [o^2 + (e^2 - o^2)\gamma_3^2]\, z^2$$
$$+ 2(e^2 - o^2)\gamma_1\gamma_2\, xy + 2(e^2 - o^2)\gamma_2\gamma_3\, yz + 2(e^2 - o^2)\gamma_3\gamma_1\, zx = 1$$

gebracht werden, aus der die Ausnahmestellung der optischen Achse allen anderen Richtungen gegenüber deutlich wird. Zugleich ergeben sich für die Polarisationskonstanten die Werte:

$$a_{11} = o^2 + (e^2 - o^2)\gamma_1^2$$
$$a_{22} = o^2 + (e^2 - o^2)\gamma_2^2$$
$$a_{33} = o^2 + (e^2 - o^2)\gamma_3^2$$
$$a_{12} = (e^2 - o^2)\gamma_1\gamma_2$$
$$a_{23} = (e^2 - o^2)\gamma_2\gamma_3$$
$$a_{31} = (e^2 - o^2)\gamma_3\gamma_1.$$

Es sind nun zwei wesentlich verschiedene Probleme zu unterscheiden.

1) Die kristallographische Orientierung des Prismas, welches zur Bestimmung der optischen Konstanten dienen soll, ist unbekannt und un-

bestimmbar. Zur Ermittlung von e und o (und der Lage der optischen Achse) genügen die Gleichungen XIb und XIc. In der Tat, da die vier den Grenzflächen parallelen Wellenebenen (q_1, q_2 und q'_1, q'_2) zweimal den Wert o ergeben, so kommt mit Rücksicht auf die eben gefundenen Werte der Polarisationskonstanten:

$$(e^2 - o^2)\gamma_1^2 = R_{11} - o^2 \qquad a)$$

$$(e^2 - o^2)\gamma_3\gamma_1 = R_{13} \qquad b)$$

$$(e^2 - o^2)\gamma_3\gamma_1 \cos\Gamma - (e^2 - o^2)\gamma_2\gamma_3 \sin\Gamma = R'_{13}. \qquad c)$$

Aus *b)* und *c)* bekommt man

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{R_{13}\cos\Gamma - R'_{13}}{R_{13}\sin\Gamma}$$

und aus *a)* und *b)*

$$\frac{\gamma_3}{\gamma_1} = \frac{R_{13}}{R_{11} - o^2}$$

und damit wegen der Identität

$$1 + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1^2} + \frac{\gamma_3^2}{\gamma_1^2} = \frac{1}{\gamma_1^2}$$

die beiden Lösungen

$$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \text{ und } -\gamma_1, -\gamma_2, -\gamma_3,$$

welche mit Hilfe etwa der Gleichung *b)* den eindeutigen Wert

$$e^2 - o^2$$

liefern. Da o^2 bereits bekannt ist, folgt daraus unmittelbar e^2.

Die übrigen drei Gleichungen von XIb und XIc dienen zur Anwendung der Ausgleichungsrechnung.

2) Die kristallographische Orientierung des Prismas ist bekannt. Zur Bestimmung von o und e genügt die Beobachtung von q_1 und q_2. $\varepsilon_1 = \varepsilon$ und $\varepsilon_2 = \varepsilon + \pi/2$ lassen sich aus γ_1, γ_2 und γ_3 berechnen. Man kennt darum die Schwingungsrichtung von o zum vorneherein und kann somit leicht entscheiden, welcher der beiden Werte q_1 und q_2 der ordentlichen Wellengeschwindigkeit entspreche. Da ferner

$$a_{11} + a_{33} = 2o^2 + (e^2 - o^2)(\gamma_1^2 + \gamma_3^2) = q_1^2 + q_2^2,$$

so ist

$$e^2 - o^2 = \frac{q_1^2 + q_2^2 - 2o^2}{\gamma_1^2 + \gamma_3^2}.$$

Das Problem ist also erledigt.

Übrigens hat schon Th. v. Liebisch[1]) gezeigt, daß die Hauptlichtgeschwindigkeiten eines einachsigen Kristalls mit Hilfe eines Prismas beliebiger Orientierung gefunden werden können.

52. Anhangsweise sei noch die in § 40 erwähnte Tatsache rechnerisch untersucht. Zu dem Zweck sollen zwei Sätze bewiesen werden.

1. Satz: Die absoluten Werte von a_{ik} (a_{12}, a_{23}, a_{31}) liegen zwischen null und $(a^2-c^2):2$. Daß a_{ik} verschwinden kann, ist leicht ersichtlich, genügt es doch, daß z. B. das xyz-System mit dem $\xi\eta\zeta$-System zusammenfalle. Es erübrigt somit noch der Beweis, daß $(a^2-c^2):2$ die obere Grenze von a_{ik} ist.

Mit Rücksicht auf die zweite Gleichung des Systems XIb läßt sich das Bildungsgesetz der a_{ik} $(i \neq k)$ leicht erkennen. Darnach wird, falls der besseren Formulierung wegen

$$a_{ik} \equiv a_j \quad (i \neq j \neq k = 1, 2, 3)$$

gesetzt wird, — wodurch die Beziehung zu einer bestimmten Achse des xyz-Systems besonders hervortritt — a_j bestimmt durch die Differenz der Geschwindigkeitsquadrate und die Azimute des Schwingungszustandes jener Wellen, die sich parallel der x-, y- oder z-Achse fortpflanzen ($j = 1$, 2 oder 3). Bei gegebener Lage der j-Achse kann das Azimut der dazu senkrechten i- und k-Achse, auf welche die Schwingungsrichtungen bezogen werden, sich noch beliebig ändern.

$$a_j \equiv a_{ik} \equiv (q_j'^2 - q_j''^2) \cdot \sin \varepsilon_{ik} \cdot \cos \varepsilon_{ik}$$

setzt sich darum aus den völlig unabhängigen Faktoren $q_j'^2 - q_j''^2$ und $\sin\varepsilon \cos\varepsilon$ zusammen. Der maximale Wert eines solchen Produktes ist aber gleich dem Produkt der maximalen Werte seiner Faktoren, d. h.

$$\text{Max } a_{ik} = \text{Max } (q_j'^2 - q_j''^2) \cdot \text{Max } \sin \varepsilon_{ik} \cos \varepsilon_{ik}.$$

Der erste Faktor hat den selbstverständlichen Wert $a^2 - c^2$, während der zweite Faktor sein Maximum für $\varepsilon = (4n+1) \cdot \pi/4$ erreicht. Es kommt somit

$$\text{Max } a_{ik} = \frac{a^2 - c^2}{2}.$$

Der hiernach bewiesene Satz erlaubt bereits eine Anwendung auf das in Rede stehende Problem. Es ist nämlich der Zähler von a_{23} gegeben durch

$$a_{23} \cdot a_{31} \equiv P_{12} R_{33} - Q_{12}.$$

Bedenkt man, daß für den maximalen Wert von a_{23} der Wert von a_{31} verschwindet, was mit Rücksicht auf die Werte $\alpha_1 = \gamma_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0$ sofort begreiflich ist, so folgt, daß der maximale Wert von $P_{12} R_{33} - Q_{12}$ sicher kleiner ist als das Produkt der maximalen Werte von a_{23} und a_{31}, d. h.

$$\left| P_{12} R_{33} - Q_{12} \right| < \frac{(a^2 - c^2)^2}{4}.$$

---

[1]) In der mehrfach erwähnten Arbeit im N. Jahrb. f. Miner. 1886 **1.** 14.

Es läßt sich aber noch eine schärfere Grenze finden, da ein weiterer Satz besteht.

2. Satz: Der absolute Wert von $a_{13} \cdot a_{32}$ liegt zwischen null und $(a^2 - c^2)^2 : 8$.

Mit Berücksichtigung der Bedeutung von a_{13} und a_{23} sowie der sechs unabhängigen Gleichungen zwischen den neun Richtungskosinus des Schemas I wird $|a_{13} \cdot a_{23}|$ Maximum, wenn dies der Fall ist für

$$\begin{aligned} & a^4 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3^2 + b^4 \beta_1 \beta_2 \beta_3^2 + c^4 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3^2 + a^2 b^2 (\alpha_2 \alpha_3 \beta_1 \beta_3 + \alpha_3 \alpha_1 \beta_2 \beta_3) + \\ & + b^2 c^2 (\beta_2 \beta_3 \gamma_3 \gamma_1 + \gamma_2 \gamma_3 \beta_3 \beta_1) + c^2 a^2 (\gamma_2 \gamma_3 \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_3 \gamma_3 \gamma_1) + \\ & + k_1 (\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2) + k_2 (\alpha_2 \alpha_3 + \beta_2 \beta_3 + \gamma_2 \gamma_3) + k_3 (\alpha_3 \alpha_1 + \beta_3 \beta_1 + \gamma_3 \gamma_1) \\ & + k_4 (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 - 1) + k_5 (\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 - 1) + k_6 (\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 - 1). \end{aligned}$$

Hieraus bildet man durch partielle Differentiation nach den neun Richtungskosinus folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv a^4 \alpha_2 \alpha_3^2 + a^2 b^2 \alpha_3 \beta_2 \beta_3 + c^2 a^2 \gamma_2 \gamma_3 \alpha_3 + k_1 \alpha_2 + k_3 \alpha_3 + 2 k_4 \alpha_1 = 0 \\ A_2 &\equiv a^4 \alpha_1 \alpha_3^2 + a^2 b^2 \alpha_3 \beta_1 \beta_3 + c^2 a^2 \gamma_3 \gamma_1 \alpha_3 + k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_3 + 2 k_5 \alpha_2 = 0 \\ A_3 &\equiv 2 a^4 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 + a^2 b^2 (\alpha_2 \beta_1 \beta_3 + \alpha_1 \beta_2 \beta_3) + c^2 a^2 (\gamma_2 \gamma_3 \alpha_1 + \alpha_2 \gamma_3 \gamma_1) + k_2 \alpha_2 + \\ &\qquad + k_3 \alpha_1 + 2 k_6 \alpha_3 = 0 \\ B_1 &\equiv b^4 \beta_2 \beta_3^2 + a^2 b^2 \alpha_2 \alpha_3 \beta_3 + b^2 c^2 \gamma_2 \gamma_3 \beta_3 + k_1 \beta_2 + k_3 \beta_3 + 2 k_4 \beta_1 = 0 \\ B_2 &\equiv b^4 \beta_1 \beta_3^2 + a^2 b^2 \alpha_3 \alpha_1 \beta_3 + b^2 c^2 \beta_3 \gamma_3 \gamma_1 + k_1 \beta_1 + k_2 \beta_3 + 2 k_5 \beta_2 = 0 \\ B_3 &\equiv 2 b^4 \beta_1 \beta_2 \beta_3 + a^2 b^2 (\alpha_2 \alpha_3 \beta_1 + \alpha_3 \alpha_1 \beta_2) + b^2 c^2 (\beta_2 \gamma_3 \gamma_1 + \gamma_2 \gamma_3 \beta_1) + k_2 \beta_2 + \\ &\qquad + k_3 \beta_1 + 2 k_6 \beta_3 = 0 \\ C_1 &\equiv c^4 \gamma_2 \gamma_3^2 + b^2 c^2 \beta_2 \beta_3 \gamma_3 + c^2 a^2 \alpha_2 \alpha_3 \gamma_3 + k_1 \gamma_2 + k_3 \gamma_3 + 2 k_4 \gamma_1 = 0 \\ C_2 &\equiv c^4 \gamma_1 \gamma_3^2 + b^2 c^2 \gamma_3 \beta_3 \beta_1 + c^2 a^2 \gamma_3 \alpha_3 \alpha_1 + k_1 \gamma_1 + k_2 \gamma_3 + 2 k_5 \gamma_2 = 0 \\ C_3 &\equiv 2 c^4 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 + b^2 c^2 (\beta_2 \beta_3 \gamma_1 + \gamma_2 \beta_3 \beta_1) + c^2 a^2 (\gamma_2 \alpha_3 \alpha_1 + \alpha_2 \alpha_3 \gamma_1) + k_2 \gamma_2 + \\ &\qquad + k_3 \gamma_1 + 2 k_6 \gamma_3 = 0 \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Orthogonalitätsgleichungen beweist man leicht, daß nachstehende Identitäten gelten.

$$\begin{aligned} \alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1 + \gamma_1 C_1 &\equiv a_{13} a_{23} + 2 k_4 = 0 \\ \alpha_2 A_1 + \beta_2 B_1 + \gamma_2 C_1 &\equiv a_{23}^2 + k_1 = 0 \\ \alpha_3 A_1 + \beta_3 B_1 + \gamma_3 C_1 &\equiv a_{33} a_{23} + k_3 = 0 \\ \alpha_1 A_2 + \beta_1 B_2 + \gamma_1 C_2 &\equiv a_{13}^2 + k_1 = 0 \\ \alpha_2 A_2 + \beta_2 B_2 + \gamma_2 C_2 &\equiv a_{13} a_{23} + 2 k_5 = 0 \\ \alpha_3 A_2 + \beta_3 B_2 + \gamma_3 C_2 &\equiv a_{33} a_{13} + k_2 = 0 \\ \alpha_1 A_3 + \beta_1 B_3 + \gamma_1 C_3 &\equiv a_{12} a_{13} + a_{11} a_{23} + k_3 = 0 \\ \alpha_2 A_3 + \beta_2 B_3 + \gamma_2 C_3 &\equiv a_{22} a_{13} + a_{12} a_{23} + k_2 = 0 \\ \alpha_3 A_3 + \beta_3 B_3 + \gamma_3 C_3 &\equiv 2 a_{13} a_{23} + 2 k_6 = 0 \end{aligned}$$

Diese neun Gleichungen gestatten, die k_i als Funktionen von a, b, c, α_i, β_i und γ_i zu berechnen und liefern überdies drei von k_i unabhängige Beziehungen, die mit den sechs Orthogonalitätsgleichungen jene Werte von $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$ zu finden erlauben, für welche

$$|a_{13} a_{23}| = \text{Max.}$$

Die neun soeben genannten Gleichungen sind folgende:

$$a_{23}^2 = a_{31}^2 \qquad (= -k_1)$$
$$a_{33}\, a_{31} = a_{22}\, a_{31} + a_{12}\, a_{23} \qquad (= -k_2)$$
$$a_{23}\, a_{33} = a_{11}\, a_{23} + a_{12}\, a_{31} \qquad (= -k_3)$$
$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1$$
$$\alpha_i\, \alpha_k + \beta_i\, \beta_k + \gamma_i\, \gamma_k = 0.$$

Die erste Gleichung zerfällt in die zwei linearen Gleichungen

$$a_{23} = a_{31} \quad | \quad a_{23} = -a_{31},$$

mit deren Berücksichtigung aus den übrigen folgt:

$$\begin{array}{l|l} a_{13}(a_{33} - a_{22}) = a_{12}\, a_{13} & a_{13}(a_{33} - a_{22}) = -a_{12}\, a_{13} \\ a_{13}(a_{33} - a_{11}) = a_{12}\, a_{13} & a_{13}(a_{33} - a_{11}) = -a_{12}\, a_{13}. \end{array}$$

Da

$$a_{23} = a_{31} = 0$$

jedenfalls nicht die extremsten Maxima und Minima von $a_{32}\, a_{31}$ ergeben, so kann man an Stelle der obigen drei ersten Gleichungen folgende zwei Systeme setzen.

$$\begin{array}{lr|lr} \text{A.} & a_{23} = a_{31} & \text{B.} & a_{23} = -a_{31} \\ & a_{33} - a_{22} = a_{12} & & a_{33} - a_{22} = -a_{12} \\ & a_{33} - a_{11} = a_{12} & & a_{33} - a_{11} = -a_{12} \end{array}$$

Zur Auflösung der Gleichungen dürfte es sich empfehlen, die geometrische und physikalische Bedeutung der Polarisationskonstanten heranzuziehen.

Im Falle A wird man ohne weiteres bemerken, daß $a_{11} = a_{22}$, a_{33} und $a_{23} = a_{31}$ jene Konstanten sind, welche in den Gleichungen der Schnittellipsen des Indexellipsoides mit den beiden Achsenebenen

$$y = 0 \text{ und } x = 0$$

auftreten, denn wegen Gleichung VII schreiben sich diese Ellipsengleichungen ohne weiteres in der Form

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{13}\, x z + a_{33}\, z^2 = 1$$
$$a_{22}\, y^2 + 2\, a_{23}\, y z + a_{33}\, z^2 = 1.$$

Diese beiden Ellipsen sind den Beziehungen A zufolge gleich und können zur Deckung gebracht werden, falls die xz-Ebene soweit um die z-Achse gedreht wird, bis $+x$ mit $+y$ zusammenfällt. — Sie sind also symmetrisch nach der Ebene

$$x - y = 0,$$

die mithin eine optische Symmetrieebene sein muß. In dieser Ebene liegen zwei optische Symmetrieachsen; senkrecht dazu ist die dritte. Es sind folgende drei durch die Figuren 5a, 5b und 5c erläuterten Fälle denkbar, für welche das Schema I die umstehende spezielle Form annimmt. Setzt man diese Ausdrücke,

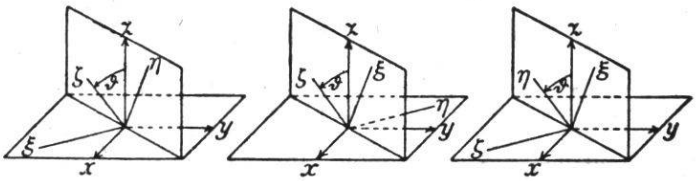

Fig. 5a Fig. 5b Fig. 5c

Fall A.	In der xy-Ebene liegt die									Zu Fig. 5a, 5b, 5c.
	ξ-Achse			η-Achse			ζ-Achse			
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
ξ	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\sin\vartheta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\sin\vartheta$	
η	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\sin\vartheta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$	
ζ	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	

Fall B.	In der xy-Ebene liegt die									Zu Fig. 6a, 6b, 6c.
	ξ-Achse			η-Achse			ζ-Achse			
	x	y	z	x	y	z	x	y	z	
ξ	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\sin\vartheta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\sin\vartheta$	
η	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\vartheta$	$\sin\vartheta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$	
ζ	$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\vartheta$	$\cos\vartheta$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	

welche den sechs Orthogonalitätsbedingungen sowie der ersten und der Differenz der beiden andern der Gleichungen A identisch genügen, in die dritte Gleichung, nämlich

$$a_{33} - a_{11} = a_{12},$$

ein, so erhält man

$$\vartheta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

und findet für $|a_{23}\, a_{31}|$ bzw.

$$\frac{(b^2 - c^2)^2}{8}, \quad \frac{(a^2 - c^2)^2}{8}, \quad \frac{(a^2 - b^2)^2}{8}.$$

Im Falle B bestimmen

$$a_{11} = a_{22},\ a_{33},\ a_{23} = -a_{31}$$

wiederum die beiden Schnittellipsen des Indexellipsoides mit den Ebenen

$$y = 0 \text{ und } x = 0.$$

Ihre Gleichungen sind wie soeben

$$a_{11}\, x^2 + 2\, a_{13}\, x z + a_{33}\, z^2 = 1$$
$$a_{22}\, y^2 + 2\, a_{23}\, y z + a_{33}\, z^2 = 1.$$

Die hierdurch dargestellten Ellipsen sind wegen der Gleichungen B ersichtlich gleich und gelangen zur Deckung, wenn die xz-Ebene soweit um die z-Achse gedreht wird, bis + x mit — y zusammenfällt. Sie sind also symmetrisch bezüglich

$$x + y = 0.$$

Möglich sind demnach nur folgende drei durch die Figuren 6a, 6b und 6c dargestellten Orientierungen, für welche das Schema I die auf der vorangehenden Seite zusammengestellten Formen annimmt.

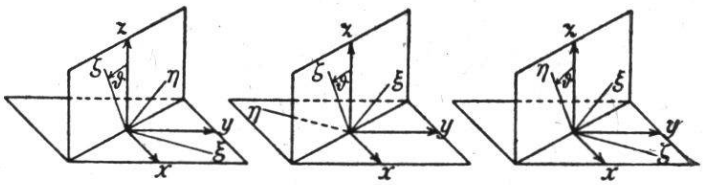

Fig. 6a Fig. 6b Fig. 6c

Verfährt man wie bei A, so berechnet sich abermals

$$\vartheta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$$

und für $|a_{23}\, a_{31}|$ kommt genau wie vorher

$$\frac{(b^2 - c^2)^2}{8}, \quad \frac{(a^2 - c^2)^2}{8}, \quad \frac{(a^2 - b^2)^2}{8}.$$

Einige numerische Beispiele mögen diese Formeln erläutern.

Tabelle II

	a	c	$\frac{(a^2 - c^2)^2}{8}$
Rhomb. Schwefel	0,51270	0,44632	0,000507
Aragonit	0,65354	0,59316	0,000708
Gips	0,65771	0,65376	0,000003
α — Äthylpyruvat-Hydrazon	0,67264	0,53186	0,003594

Diese Zahlen erklären die Erfahrungen, die sich bei der numerischen Prüfung der auseinandergesetzten Methode unliebsam geltend gemacht haben.