Zeitschrift: Museum Helveticum : schweizerische Zeitschrift für klassische Altertumswissenschaft = Revue suisse pour l'étude de l'antiquité classique = Rivista svizzera di filologia classica

Herausgeber: Schweizerische Vereinigung für Altertumswissenschaft

Band: 48 (1991)

Heft: 1

Artikel: Un fragment attribué à Archimède

Autor: Sesiano, Jacques

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-37692

Un fragment attribué à Archimède

Par Jacques Sesiano, Genève

1. Introduction

La partie de l'œuvre d'Archimède qui nous est parvenue par l'intermédiaire des Byzantins descend essentiellement de trois manuscrits:

Le plus important d'entre eux fut copié à Byzance, peut-être au IX^e siècle à l'initiative de Léon le Mathématicien; on le retrouve en Sicile au XII^e siècle, puis à la Cour papale de Viterbe où il est utilisé en 1269 par Guillaume de Moerbeke pour sa version latine d'Archimède. Ce manuscrit est perdu depuis le milieu du XVI^e siècle; mais, grâce aux copies qui en ont été faites entretemps, nous connaissons le texte grec de cinq traités de mathématique (De la sphère et du cylindre, De la mesure du cercle, Des conoïdes et des sphéroïdes, Des spirales, l'Arénaire) et deux de mécanique (De l'équilibre des plans, De la quadrature de la parabole).

Un second manuscrit contenait, lui, trois traités de mécanique d'Archimède, soit les deux qui ont été déjà mentionnés et l'ouvrage Sur les corps flottants. Ce manuscrit fut également utilisé par Guillaume de Moerbeke en 1269, puis disparut lui aussi, mais déjà au XIV^e siècle et sans que des copies en eussent été faites.

Notre troisième source est un palimpseste provenant du patriarcat de Jérusalem et apporté à Constantinople, où il fut examiné en 1906 par l'éditeur moderne d'Archimède en grec, J. Heiberg[1]. Il contenait une œuvre jusqu'alors inconnue, la Méthode, ainsi que des fragments importants de six œuvres connues, mais dont l'une (Sur les corps flottants) ne l'était plus que par sa version latine et une autre (le Stomachion) que par un fragment en traduction arabe[2].

Avec l'épigramme du Problème des bœufs, transmise par d'autres manuscrits, et quelques citations ou allusions dispersées se clôt l'inventaire des travaux d'Archimède dont la tradition grecque nous a conservé la mémoire. Même si leur forme actuelle et la langue utilisée ne correspondent parfois plus au texte qu'avait composé Archimède, on n'a guère de doute que presque toutes les œuvres ainsi transmises reflètent les résultats de recherches d'Archimède.

On ne saurait en dire autant des traités qui nous ont été transmis par voie des traductions en arabe. Il apparaît en effet que dans leur majorité ces écrits

1 L'édition de Heiberg, *Archimedes, Opera omnia,* I–III (Leipzig 1910–1915; réimpression Stuttgart 1972), contient en outre les commentaires d'Eutocius.

2 Ce palimpseste, considéré comme perdu à la suite d'un vol dans les années 1920, aurait été recelé en France puis récemment placé dans un coffret bancaire à Genève.

ont été malmenés à divers degrés par des glossateurs ou des interpolateurs grecs tardifs.

Les bibliographes arabes attribuent à Archimède les études suivantes[3]:

1. De la sphère et du cylindre.
2. De la mesure du cercle.
3. De la division du cercle en sept parties (construction de l'heptagone régulier).
4. Sur les cercles tangents.
5. Sur les lemmes.
6. Sur les données.
7. Sur les lignes parallèles.
8. Sur les triangles.
9. Sur les propriétés des triangles rectangles.
10. Sur les clepsydres projetant des boules.

Les deux premiers de ces traités étant aussi conservés en grec, on peut comparer les deux versions; il en résulte que, pour ces deux cas, la tradition arabe ne présente guère de différences de fond avec la tradition grecque. C'est avec les autres traités (et pour des seules considérations de contenu cette fois) que la question de l'attribution à Archimède se pose. Ainsi, il apparaît que le dernier traité de la liste (le seul à ne pas être mathématique) est une compilation tardive, d'époque byzantine semble-t-il[4]. Le groupe des traités 3 à 6 est plus caractéristique de la tradition arabe d'Archimède. On ne peut ni les rejeter dès l'abord comme des pseudépigraphes, ni les accepter tels quels comme des écrits de la main d'Archimède, mélanges qu'ils sont de propositions de niveaux fort inégaux et dont le lien avec le sujet de l'ouvrage peut être d'une extrême ténuité voire même inexistant. On conçoit donc que dans une telle situation il est difficile sinon illusoire de vouloir présumer la forme et le contenu du texte qu'aurait pu composer Archimède[5]. Enfin, des trois écrits restants dans la liste

3 Cette liste n'est pas complète: le Stomachion n'y est pas mentionné, non plus qu'un fragment du traité sur les corps flottants.

4 Il enseigne la construction d'une horloge indiquant chaque passage d'heure par la chute d'une petite boule de cuivre, ainsi que par d'autres mécanismes d'un haut niveau technique. Voir la traduction de E. Wiedemann et F. Hauser, *Uhr des Archimedes,* Nova Acta 103 (1918) 159–202.

5 Le premier de ces traités a été traduit par C. Schoy, *Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen (...) al-Bīrūnī* (Hannover 1927) 74–84, et analysé par J. Tropfke, *Die Siebeneckabhandlung des Archimedes,* Osiris 1 (1936) 636–651. Le second fait l'objet d'un vol. IV (1975) ajouté à la réimpression de Stuttgart des *Opera* (n. 1). Le troisième fut traduit, sous le titre *Liber assumptorum,* au XVII^e siècle, et cette traduction est reprise par Heiberg dans le vol. II des *Opera.* Enfin, deux versions du quatrième sont traduites et étudiées par Y. Dold dans son *Book of Assumption by Aqāṭun* (Diss. Amsterdam 1977). Sur les éditions de plusieurs de ces textes à Haiderabad et sur les manuscrits conservés, voir F. Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums* IV (Leyde 1974) 128–135. Une liste récente de travaux sur Archimède a été établie par W. Knorr en appendice de la seconde édition anglaise du *Archimedes* de E. J. Dijksterhuis (Princeton 1987).

(nos 7 à 9), les deux premiers n'ont pas été retrouvés, tandis que l'on savait depuis plusieurs années qu'un fragment du dernier était conservé à Téhéran[6]. C'est de celui-ci qu'il sera question, car nous avons eu l'occasion de l'examiner lors de séjours en Iran.

Le manuscrit dont fait partie ledit fragment porte la cote 284 dans le fonds des manuscrits ayant appartenu à l'Imam Jum'a (Saïd Jawād) de Kerman (m. en 1287 H./1871); sa collection, léguée par sa descendance à la Faculté des Lettres de l'Université de Téhéran, est actuellement conservée à la Bibliothèque centrale (Ketābkhāné-yé markazî) de l'Université. Le manuscrit 284, qui a été écrit tout d'une même main vers 1440, comprend 195 feuillets, sans numérotation, dont le fragment occuperait les fol. 192v, 3 à 194r. Des cinq figures devant servir de support aux démonstrations, seules les deux premières ont été dessinées (à l'encre rouge); les autres manquent, et devaient aussi manquer dans l'exemplaire utilisé par le copiste, l'omission n'étant ni voulue (les pages précédentes et suivantes dans le manuscrit ont les figures requises) ni fortuite (aucun espace vide n'a été laissé pour leur addition ultérieure).

Les démonstrations utilisent quelques théorèmes que le lecteur est censé connaître et qui sont démontrés dans les Eléments d'Euclide. Nous les mentionnons ci-après, préalablement à l'étude du fragment.

2. Théorèmes utilisés dans les démonstrations du fragment

Les théorèmes supposés être connus sont simples et comptent parmi les plus fréquemment utilisés dans la mathématique grecque. Deux de ces théorèmes concernent des propriétés élémentaires du triangle rectangle, quatre sont des identités, deux enfin sont des opérations sur les rapports.

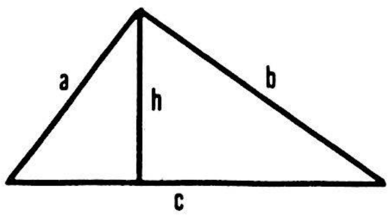

Fig. 1

Désignons par a, b les côtés perpendiculaires d'un triangle rectangle, par c son hypoténuse, et par h la hauteur tombant sur l'hypoténuse (fig. 1); on a alors les relations:

(1) Eléments I 47: $a^2 + b^2 = c^2$ (théorème dit de Pythagore).

(2) El. X 33 (lemme): $a \cdot b = c \cdot h$ (= 2S, où S est la surface du triangle).

6 Depuis sa mention à la p. 44 du catalogue de la collection de l'Imam Jum'a (v. infra) publié par M. Daneš-Pajouh comme vol. 13 (1344/1965) de la série Madjallé-yé Dāneškadé-yé adabiyāt.

Fig. 2

Appelons a, b des segments de droites, et a_1, a_2, b_1, etc. des parties de ces segments (Euclide, lui, désigne les segments de droites soit par une seule lettre, soit par les deux lettres marquant leurs extrémités); on a alors les relations:

(3) El. II 1: Si $b = b_1 + b_2 + b_3$ (p.ex. $A\Delta = A\Gamma + \Gamma B + B\Delta$ dans la fig. 2), alors $a \cdot b = a \cdot b_1 + a \cdot b_2 + a \cdot b_3$.

(4) El. II 4: Si $a = a_1 + a_2$, alors $a^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2 + 2a_1 \cdot a_2$ (soit: $\Gamma\Delta^2 = \Gamma B^2 + B\Delta^2 + 2\Gamma B \cdot B\Delta$).

(5) El. II 6: Soit un segment de longueur b et un autre de longueur 2a ($B\Delta$ resp. AB avec $A\Gamma = \Gamma B$); on a alors:
$(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2$ (soit: $A\Delta \cdot B\Delta + \Gamma B^2 = \Gamma\Delta^2$).

(6) El. II 10: Sous les mêmes conditions, on a aussi:
$(2a + b)^2 + b^2 = 2[a^2 + (a + b)^2]$ (soit: $A\Delta^2 + B\Delta^2 = 2\,(\Gamma B^2 + \Gamma\Delta^2)$).

Enfin, le lecteur est censé connaître trois théorèmes sur les rapports, qui se réduisent en fait à deux puisque l'un est un cas particulier de l'autre:

(7) El. V 18: Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

(8) El. VI 16: Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a \cdot d = b \cdot c$, et inversement.

(9) El. VI 17: Si $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ alors $b^2 = a \cdot c$.

3. Traduction du fragment[7]

(Extrait) du livre des propriétés du triangle (rectangle)
par Archimède

[1] Dans tout triangle rectangle, le carré des trois côtés, disposés comme en une seule ligne[8], égale le double du rectangle que comprennent les trois côtés et la hauteur abaissée de l'angle droit sur l'hypoténuse, le tout disposé comme en une seule ligne, et l'hypoténuse.

Illustration[9]. Soit (le triangle) ABΓ, rectangle en A. Je dis que le carré de

7 La traduction est littérale, et les additions au texte sont mises entre parenthèses. Les erreurs mineures de copiste sont corrigées sans être signalées. Rappelons que seules les deux premières figures apparaissent (placées verticalement, voir la planche) dans le manuscrit.

8 C'est-à-dire placés bout à bout comme un seul segment de droite. Le mot *khaṭṭ* resp. γραμμή est utilisé par certains mathématiciens (dont Archimède) dans le sens de εὐθεῖα γραμμή = *khaṭṭ mustaqīm*. Nous maintenons «ligne» dans la traduction.

9 Ar. *mithāl* = ἔκθεσις, par laquelle l'énoncé purement rhétorique est appliqué, généralement à une figure sur laquelle s'appuiera la démonstration.

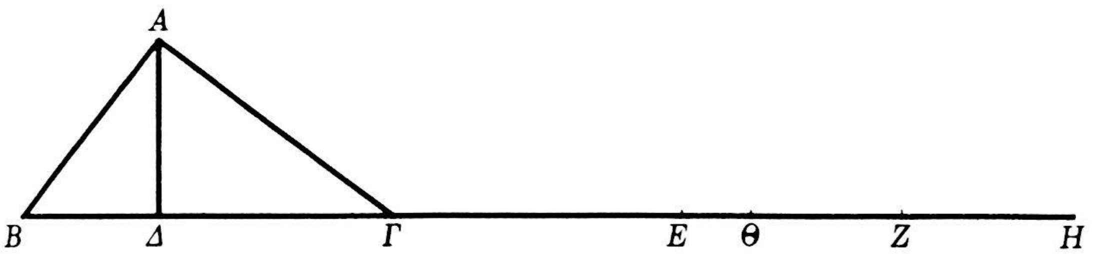

Fig. 3

ses côtés, disposés comme en une seule ligne, égale deux fois le produit desdits (côtés) avec la hauteur, soit AΔ, par la base, soit ΓB[10].

Prolongeons ΓB tout droit. Nous en découpons ΓE égale à AΓ, EZ égale à AB, et ZH égale à AΔ. Nous découpons (en outre) ΓΘ égale à ΓB. Ainsi, ΘB est divisée au (point) Γ en deux moitiés et ΘZ lui est ajoutée. Donc, le produit de BZ par ZΘ avec le carré de ΘΓ égale le carré de ΓZ[11]. Or le carré de ZΓ égale les carrés de ZE, EΓ, et deux fois le produit de ZE par EΓ; et les carrés de ZE, EΓ égalent le carré de ΘΓ, laquelle est égale à la base[12]. Retranchant les égaux, il en résulte que le produit de BZ par ZΘ est égal à (deux fois) le produit de ZE par EΓ[13]. Par suite, le produit de HZ, laquelle est égale à la hauteur, par ΘB, qui est le double de la base, est égal au produit de ZB – c'est-à-dire la somme des côtés – par ZΘ[14]. Donc, le rapport de HZ à ZB est égal au rapport de ZΘ à ΘB. Par composition, le rapport de HB à ZB sera égal au rapport de ZB à ΘB[15]. Donc ZB est une moyenne proportionnelle. Ainsi, le produit de HB par ΘB est égal au carré de ZB. C'est ce dont nous voulions la démonstration.

[2] Dans tout triangle rectangle *[193ʳ]* scalène, le carré des trois lignes[16], disposées comme en une seule ligne, et le carré de l'excès de l'une des deux lignes comprenant l'angle droit sur l'autre égalent le carré de l'hypoténuse avec l'un des (côtés) comprenant (l'angle droit), disposés comme en une seule ligne, et le carré de – à nouveau – l'hypoténuse avec le deuxième côté, disposés comme en une seule ligne.

Illustration. Soit le triangle ABΓ, rectangle en B, et (soit) BΓ plus longue que AB. Je dis que le carré de ses trois côtés (disposés comme en une seule

10 Donc: $(AB + B\Gamma + A\Gamma)^2 = 2B\Gamma(AB + B\Gamma + A\Gamma + A\Delta)$.

11 Γ étant le milieu du segment BΘ et ΘZ étant un segment ajouté, on a par *El.* II 6 que $BZ \cdot Z\Theta + \Theta\Gamma^2 = Z\Gamma^2$.

12 $Z\Gamma^2 = ZE^2 + E\Gamma^2 + 2ZE \cdot E\Gamma$, par II 4, et $ZE^2 + E\Gamma^2 = \Theta\Gamma^2$, par I 47 appliqué aux segments égaux aux côtés du triangle reportés sur ΓZ; donc $Z\Gamma^2 = \Theta\Gamma^2 + 2ZE \cdot E\Gamma$.

13 Nous avons trouvé (n. 11) que $BZ \cdot Z\Theta + \Theta\Gamma^2 = Z\Gamma^2$ et (n. 12) que $Z\Gamma^2 = \Theta\Gamma^2 + 2ZE \cdot E\Gamma$; partant, $BZ \cdot Z\Theta = 2ZE \cdot E\Gamma$.

14 Comme $2ZE \cdot E\Gamma = 2AB \cdot A\Gamma$ (car $ZE = AB$, $E\Gamma = A\Gamma$) et que $2AB \cdot A\Gamma = 2B\Gamma \cdot A\Delta$ (selon X 33, lemme) $= B\Theta \cdot HZ$ (car $2B\Gamma = B\Theta$, $A\Delta = HZ$), on aura, en utilisant le résultat de la n. 13, que $BZ \cdot Z\Theta = B\Theta \cdot HZ$.

15 Puisque $BZ \cdot Z\Theta = B\Theta \cdot HZ$, alors $\frac{HZ}{ZB} = \frac{Z\Theta}{\Theta B}$ (VI 16), donc $\frac{HZ + ZB}{ZB} = \frac{Z\Theta + \Theta B}{\Theta B}$ (V 18), soit $\frac{HB}{ZB} = \frac{ZB}{\Theta B}$. On en déduit que $ZB^2 = HB \cdot \Theta B$ (VI 17), et le théorème est démontré.

16 Ar. *khuṭūṭ* = γραμμαί, alors que l'on attendrait *aḍlā'* = πλευραί.

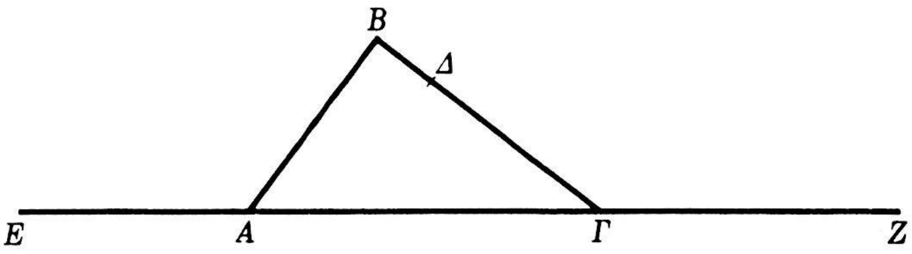

Fig. 4

ligne), avec le carré de l'excès de BΓ sur AB, égale le carré de BΓ, ΓA, disposées comme en une seule ligne, et le carré de ΓA, AB, disposées selon une seule ligne[17].

Traçons AE égale à AB et ΓZ égale à BΓ, et (soit) BΔ l'excès de BΓ sur AB. Le carré de EZ égale les carrés de EA, AΓ, ΓZ, et deux fois le produit de EA par AΓ, et deux fois le produit de AΓ par ΓZ, et deux fois le produit de EA par ΓZ[18]. Mais deux fois le produit de EA par ZΓ, c'est-à-dire deux fois le produit de AB par BΓ, égale deux fois le produit de AB par ΓΔ – qui lui est égale – et deux fois le produit de ΓΔ par BΔ. Or deux fois le produit de AB par ΓΔ est les carrés de AB, ΓΔ. Nous ajoutons à deux fois le produit de BΔ par ΔΓ et au carré de ΓΔ le carré de BΔ; et ceci sera égal au carré de BΓ. En conséquence, (deux fois) le produit de AB par BΓ, avec le carré de BΔ, égale les carrés de AB, BΓ, c'est-à-dire le carré de AΓ[19]. Ainsi, le carré de EZ et le carré de BΔ égaleront les carrés de EA, AΓ, le carré de AΓ encore une fois, le carré de ΓZ, deux fois le produit de EA par AΓ, deux fois (celui de) AΓ par ΓZ. Mais les carrés de EA, AΓ et deux fois le produit de EA par AΓ égalent le carré de EΓ; et les carrés de AΓ (, ΓZ) *[193^v]* et deux fois le produit de AΓ par ΓZ égalent le carré de AZ. Donc les carrés de EZ, BΔ égalent les carrés de EΓ, AZ. C'est ce dont nous voulions la démonstration[20].

[3] Dans tout triangle rectangle, si l'on découpe depuis l'une des extrémités de l'hypoténuse[21] un (segment) égal à l'un des deux côtés comprenant l'angle droit et depuis l'autre extrémité le (segment) égal à l'autre côté, le produit de la ligne qui est entre les points de section par le périmètre du triangle – c'est-à-dire les trois lignes comprenant le triangle, disposées comme en une seule ligne – est quatre fois la surface du triangle.

17 Donc: $(\mathrm{BA} + \mathrm{A\Gamma} + \mathrm{B\Gamma})^2 + (\mathrm{B\Gamma} - \mathrm{BA})^2 = (\mathrm{B\Gamma} + \mathrm{A\Gamma})^2 + (\mathrm{BA} + \mathrm{A\Gamma})^2$.

18 $\mathrm{EZ}^2 = \mathrm{EA}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{\Gamma Z}^2 + 2\mathrm{EA} \cdot \mathrm{A\Gamma} + 2\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{\Gamma Z} + 2\mathrm{EA} \cdot \mathrm{\Gamma Z}$ (extension de II 4 à trois termes).

19 Comme EA = BA = ΔΓ et ΓZ = BΓ, on a que $2\mathrm{EA} \cdot \mathrm{\Gamma Z} = 2\mathrm{BA} \cdot \mathrm{B\Gamma} = 2\mathrm{BA}\,(\mathrm{B\Delta} + \mathrm{\Delta\Gamma}) = 2\mathrm{BA} \cdot \mathrm{B\Delta} + 2\mathrm{BA} \cdot \mathrm{\Delta\Gamma} = 2\mathrm{\Delta\Gamma} \cdot \mathrm{B\Delta} + \mathrm{BA}^2 + \mathrm{\Delta\Gamma}^2$. Or, si de chaque côté de l'expression de la note 18 on ajoute $\mathrm{B\Delta}^2$, on aura à gauche $\mathrm{EZ}^2 + \mathrm{B\Delta}^2$, et à droite une suite de termes parmi lesquels la somme $2\mathrm{EA} \cdot \mathrm{\Gamma Z} + \mathrm{B\Delta}^2$ qui se transformera, selon ce qui vient d'être vu, en $2\mathrm{\Delta\Gamma} \cdot \mathrm{B\Delta} + \mathrm{BA}^2 + \mathrm{\Delta\Gamma}^2 + \mathrm{B\Delta}^2 = (\mathrm{B\Delta} + \mathrm{\Delta\Gamma})^2 + \mathrm{BA}^2 = \mathrm{B\Gamma}^2 + \mathrm{BA}^2 = \mathrm{A\Gamma}^2$ (I 47).

20 Tenant compte des transformations de la note 19, l'expression de la note 18 devient: $\mathrm{EZ}^2 + \mathrm{B\Delta}^2 = \mathrm{EA}^2 + \mathrm{A\Gamma}^2 + \mathrm{\Gamma Z}^2 + 2\mathrm{EA} \cdot \mathrm{A\Gamma} + 2\mathrm{A\Gamma} \cdot \mathrm{\Gamma Z} + \mathrm{A\Gamma}^2$. Comme les termes à droite peuvent se regrouper en $(\mathrm{EA} + \mathrm{A\Gamma})^2 + (\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{\Gamma Z})^2 = \mathrm{E\Gamma}^2 + \mathrm{AZ}^2$, le théorème est démontré.

21 «De l'hypoténuse» se dit «de la corde de l'angle droit», *watar(i) al-zāwiyat al-qā'ima* = τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης; le texte arabe a seulement «de l'angle droit», par omission de *watar*.

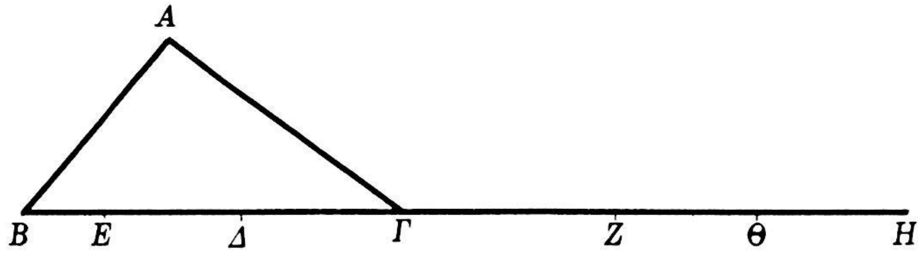

Fig. 5

Illustration. Soit le triangle ABΓ, rectangle en A, de la base (duquel) on a découpé BΔ égale à AB ainsi que ΓE égale à AΓ. Je dis que le produit de la somme des côtés par EΔ égale quatre fois la surface du triangle[22].

Démonstration. Les lignes BA, AΓ, rabattues sur la ligne BΓ, en découpent la ligne EΔ[23]. Nous prolongeons BΓ et posons ΓZ égale à BA, ZH égale à AΓ, et HΘ égale à EΔ. Alors, puisque HΘ est la différence qu'il y a entre les lignes BA, AΓ et BΓ, il en résulte que ΓΘ est égale à BΓ. Ainsi, la ligne BΘ est divisée au (point) Γ en deux moitiés, et ΘH lui est ajoutée. (Donc) le produit de BH par ΘH, avec le carré de ΓΘ, égale le carré de ΓH[24]. Mais le carré de ΓH égale les carrés de ΓZ, ZH, et deux fois le produit de ΓZ par ZH; et les carrés de ΓZ, ZH égalent le carré de BΓ[25]. Donc le produit de BH par HΘ, avec le carré de ΓΘ – laquelle est égale à BΓ –, égale le carré de BΓ et deux fois le produit de ΓZ par ZH. Retranchant le carré de BΓ, qui est commun, il résulte que le produit de BH par HΘ est égal à deux fois le produit de ΓZ par ZH. Mais deux fois le produit de ΓZ par ZH est quatre fois la surface du triangle ABΓ. C'est ce que nous avions l'intention de prouver.

[4] Dans tout triangle rectangle, le carré des trois côtés, disposés comme en une seule ligne, égale deux fois le produit *[194ʳ]* de l'ensemble de la ligne par l'hypoténuse et deux fois le produit des deux extrémités[26].

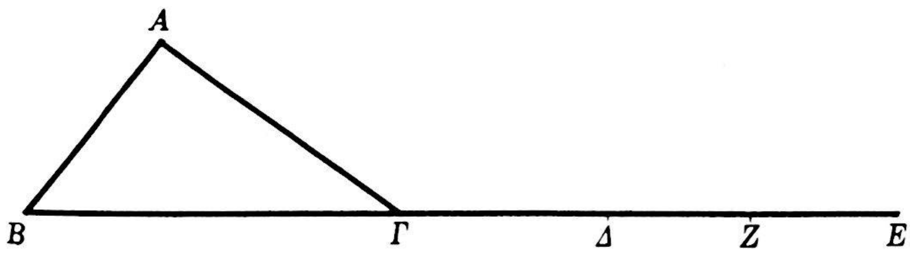

Fig. 6

22 Donc: $(AB + B\Gamma + A\Gamma) \cdot E\Delta = 4S$, où $4S = 2AB \cdot A\Gamma$.

23 Le segment EΔ représente donc l'excès de $AB + A\Gamma$ sur BΓ.

24 Comme $\Gamma H = AB + A\Gamma$ et $\Theta H = E\Delta = AB + A\Gamma - B\Gamma$, $\Gamma\Theta = B\Gamma$. On a donc par II 6 (Γ milieu de BΘ, ΘH segment ajouté): $BH \cdot \Theta H + \Gamma\Theta^2 = \Gamma H^2$.

25 Comme $\Gamma H^2 = \Gamma Z^2 + ZH^2 + 2\Gamma Z \cdot ZH$ (II 4) et $\Gamma\Theta^2 = \Gamma Z^2 + ZH^2$ (I 47, appliqué aux segments reportés), et utilisant le résultat de la note 24, on a $BH \cdot \Theta H = 2\Gamma Z \cdot ZH$, donc $BH \cdot \Theta H = 2AB \cdot A\Gamma = 4S$, ce qui clôt la démonstration.

26 Ar. *al-ṭarafān* (duel) = τὰ πέρατα, alors que l'on attendrait (*al-ḍilaʿān*) *al-muḥīṭān* = αἱ περιέχουσαι (sc. τὴν ὀρθὴν γωνίαν πλευραί).

Illustration. Soit le triangle BAΓ, rectangle en A. Je dis que le carré de ses trois côtés, (disposés) comme en une seule ligne, égale deux fois le produit de BΓ par la somme des côtés et deux fois le produit de BA par AΓ[27].

Menons ΓΔ égale à AB, et ΔE égale à AΓ, et (soit) ΓZ égale à BΓ. Alors BZ est divisée au point Γ en deux moitiés, et ZE lui est ajoutée. Donc le produit de BE par EZ, avec le carré de ΓZ, égale le carré de ΓE[28]. Or le carré de ΓE égale les carrés de ΓΔ, ΔE, et deux fois le produit de l'une par l'autre; et les carrés de ΓΔ, ΔE égalent le carré de ΓZ. Les retranchant tous deux, il résulte que le produit de BE par EZ est égal à deux fois le produit de ΓΔ par ΔE[29]. Mettant le produit de BE par BZ en commun, le(s) produit(s) de EB par BZ et de BE par EZ – et ceci est égal au carré de EB – égaleront le(s) produit(s) de EB par BZ et, deux fois, de ΓΔ par ΔE[30].

[5] Dans tout triangle rectangle, si l'on découpe de l'un des côtés comprenant l'angle droit un (segment) égal à l'autre côté, le carré des deux côtés comprenant l'angle (droit), disposés comme en une seule ligne, et le carré de leur différence sont le double du carré de l'hypoténuse.

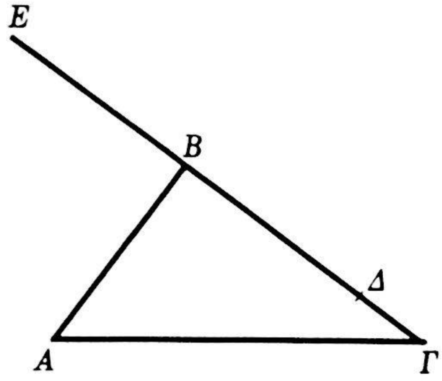

Fig. 7

Illustration. Soit le triangle ABΓ, rectangle en B, et (soit) BΔ égale à AB. Nous menons BE égale à AB. Je dis que les carrés de EΓ, ΓΔ sont le double du carré de AΓ[31].

Comme EΔ est divisée en deux moitiés au point B et que ΔΓ lui est ajoutée, les carrés de EΓ, ΓΔ sont le double des carrés de EB, BΓ. Mais les

27 Donc: $(AB + B\Gamma + A\Gamma)^2 = 2B\Gamma\,(AB + B\Gamma + A\Gamma) + 2AB \cdot A\Gamma$.

28 Comme $\Gamma Z = B\Gamma$, Γ est le milieu de BZ, et ZE est un segment ajouté; donc (II 6) $BE \cdot EZ + \Gamma Z^2 = \Gamma E^2$.

29 Comme nous l'avons déjà fait précédemment, nous introduisons dans la relation déterminée par II 6 les résultats de l'application de II 4, soit $\Gamma E^2 = \Gamma\Delta^2 + \Delta E^2 + 2\Gamma\Delta \cdot \Delta E$, et de I 47, soit $\Gamma Z^2 = \Gamma\Delta^2 + \Delta E^2$; nous obtenons ainsi $BE \cdot EZ = 2\Gamma\Delta \cdot \Delta E$.

30 Ajoutant des deux côtés de l'égalité précédente $BE \cdot BZ$, nous obtenons $BE\,(EZ + BZ) = 2\Gamma\Delta \cdot \Delta E + BE \cdot BZ$, qui s'écrit aussi $BE^2 = 2AB \cdot A\Gamma + 2BE \cdot B\Gamma$; c'est la conclusion cherchée.

31 Donc: $E\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2$ $(= (B\Gamma + BA)^2 + (B\Gamma - BA)^2) = 2A\Gamma^2$.

carrés de EB, BΓ sont égaux au carré de AΓ. Donc les carrés de EΓ, ΔΓ sont le double du carré de AΓ[32]. C'est ce que nous voulions démontrer.

Fin (de l'extrait) du livre
des propriétés du triangle rectangle par Archimède

4. Sur l'authenticité de ce fragment

Le millénaire que l'on compte entre Archimède et l'époque des traductions en arabe et les quelque six siècles qui séparent ladite époque et la transcription du texte conservé sont largement suffisants pour permettre des altérations, grecques ou arabes, du texte original. Aussi nous faut-il soulever la question de l'authenticité du fragment que nous avons étudié, les réponses extrêmes étant l'une que le texte dont il provient est d'origine arabe – et donc l'attribution sans fondement –, l'autre que ce texte est intégralement l'œuvre d'Archimède.

a) Que ce fragment est d'origine grecque

Il n'est guère douteux que le texte descende d'un original grec. Outre le fait que les sources arabes qui nous mentionnent la traduction d'un traité sur les propriétés des triangles rectangles sont très sûres, certaines particularités d'expression du fragment en trahissent l'origine. Ainsi, la version arabe contient çà et là quelques incongruités dans la syntaxe de certaines phrases (concordance des temps fautive, absence de terme de liaison) qui toutes s'expliqueraient par une difficulté du traducteur à rendre une construction au génitif absolu. D'autre part, lorsqu'il est question de l'élévation au carré de la somme de deux segments de droites, il est spécifié que le carré est engendré par (autrement dit: que son côté est constitué par) les deux segments *idhā ja'alā ka-khaṭṭ wāḥid* = ὡς ἀπὸ μιᾶς (γραμμῆς = εὐθείας), ce qui est certes conforme à une vue purement géométrique (cf. Eléments II 8 ou II 10; Pappus, Collectio [ed. Hultsch], p. 70, 5), mais serait insolite, des siècles plus tard, sous la plume d'un auteur musulman – lequel eût simplement parlé de deux segments «ajoutés» (*majmū'ain*).

b) La question de l'attribution à Archimède

Les sources bibliographiques arabes mises à part, nous n'entendons guère parler de l'ouvrage d'Archimède sur les propriétés des triangles rectangles. Mention en est toutefois faite dans un autre texte en arabe attribué à Archimède, celui des Lemmes, dont la proposition 5 renvoie au traité – ou à un commentaire au traité – (d'Archimède) «Sur les triangles rectangles» (*fī'l-mu-*

32 Nous avons à nouveau un segment, EΔ, divisé en son milieu, B, et auquel est ajouté un autre segment, ΔΓ. Utilisant cette fois II 10, nous avons directement $E\Gamma^2 + \Delta\Gamma^2 = 2(BE^2 + B\Gamma^2) = 2A\Gamma^2$, du fait que BE = BA et par I 47.

thallathāt al-qā'imat al-zawāyā = Περὶ ὀρθογωνίων τριγώνων). Qui que soit l'auteur de cette référence (diverses mains ont retouché les Lemmes), c'est une autre indication qu'à l'époque islamique au moins Archimède était bien considéré comme l'auteur d'un ouvrage relatif aux triangles rectangles.

Mais là s'arrêtent les traces, car nous n'avons aucune mention en grec d'un tel traité. L'attribution à Archimède reste donc à vérifier, et le premier pas sera d'examiner le contenu du fragment pour décider si les raisonnements mathématiques qui y apparaissent peuvent vraiment être l'œuvre de celui que l'on regarde comme l'un des plus grands mathématiciens de l'antiquité.

Comme nous l'avons vu, la première proposition enseigne que, pour tout triangle rectangle de côtés a, b, c (hypoténuse), et de hauteur h, on a la relation

$$(a + b + c)^2 = 2c(a + b + c + h),$$

que l'on peut aussi écrire

$$(a + b + c)^2 = 2c(a + b + c) + 2c \cdot h.$$

1° Comme $c \cdot h = a \cdot b$ (supra, p. 23), on a

$$(a + b + c)^2 = 2c(a + b + c) + 2a \cdot b,$$

qui est la proposition 4.

2° Comme $2c \cdot h = 4S$ où S est la surface du triangle (cf. ibid.), on a

$$(a + b + c)^2 - 2c(a + b + c) = 4S,$$

donc

$$(a + b + c) \cdot (a + b - c) = 4S,$$

qui est la proposition 3.

3° Effectuant la multiplication à droite dans l'égalité de 1°, nous obtenons

$$(a + b + c)^2 = 2a \cdot c + 2b \cdot c + 2c^2 + 2a \cdot b;$$

ajoutant alors à droite la quantité nulle $a^2 + b^2 - a^2 - b^2$, et regroupant les termes de manière appropriée, nous aurons

$$(a + b + c)^2 = (a + c)^2 + (b + c)^2 - (a - b)^2,$$

qui est la proposition 2.

4° Quant à la proposition 5, elle se déduit immédiatement du théorème de Pythagore, puisque, si $c^2 = a^2 + b^2$, alors $2c^2 = 2(a^2 + b^2) = (a + b)^2 + (a - b)^2$. L'identité sur laquelle repose cette déduction était parfaitement banale à l'époque d'Archimède: non seulement elle était employée dans l'enseignement élémentaire en Grèce, mais les Mésopotamiens en usaient plus d'une quinzaine de siècles auparavant[33].

On voit ainsi que les quatre dernières propositions se déduisent, par de petites manipulations de calcul, de la première proposition et/ou de relations parfaitement élémentaires. Il n'était en tout cas nullement nécessaire de leur apporter à chacune une démonstration indépendante et complète, et ce n'est certes pas Archimède qui aurait agi d'une manière aussi légère. C'est encore

33 Cf. Mus. Helv. 43 (1986) 79.

moins lui qui aurait démontré un théorème (le troisième) dont le contenu avait été établi de manière incidente dans une démonstration antérieure (la première; voir notes 13–14), et l'aurait à nouveau établi dans une démonstration ultérieure (la quatrième; voir note 29). Nous pouvons donc déjà dire que ni la cinquième proposition, ni les démonstrations des deuxième, troisième, et quatrième propositions – si la disposition actuelle suit l'ordre originel de succession des propositions – ne sauraient remonter à Archimède.

Il est apparu des remarques générales sur les textes d'Archimède connus dans leur seule version arabe (cf. § 1) que ceux-ci avaient été fortement remaniés et étaient même parfois composés d'éléments hétérogènes. Dès lors, il n'est pas particulièrement surprenant de voir que trois des théorèmes de notre fragment – les trois premiers – contribuent à la disparité d'un autre traité: on les trouve incorporés dans le texte sur la construction de l'heptagone régulier (n° 3 de la liste), qui, dépouillé des parties qui – comme ces trois théorèmes – sont sans rapport avec le sujet, remonte certainement à une recherche spécifique d'Archimède.

A défaut d'éclairer de quelque manière la construction de l'heptagone régulier, la présence des trois théorèmes dans le traité est d'un grand intérêt pour l'histoire de notre fragment. En premier lieu, on peut remarquer que, par cette incorporation, ils se trouvent encore une fois associés au nom d'Archimède. Ensuite, une comparaison montre que leurs démonstrations sont différentes de celles du fragment mais que toutes ont en commun ce curieux mélange de faiblesse de fond et de rigueur dans la forme qui est le propre des commentateurs tardifs de mathématiciens classiques. Enfin, dans les deux traditions, la succession des théorèmes est la même – à la différence mineure près que dans le traité sur l'heptagone des additions d'origines grecque et arabe sont venues s'insérer entre eux.

La similitude du contenu et de l'ordre des propositions et les différences dans leurs démonstrations nous amènent à poser une première conjecture. Dans la basse antiquité circulait une série d'énoncés de propositions relatives au triangle rectangle. Deux copies furent, chacune de son côté, augmentées de démonstrations voire de compléments. Alors que l'une des versions gardait son indépendance, l'autre fut rattachée au traité sur l'heptagone[34]. Toutes deux retrouvèrent un sort commun en ce qu'elles furent traduites en arabe sans qu'elles laissassent nulle trace dans l'antiquité grecque et le moyen âge byzantin.

Si la part d'Archimède dans notre fragment s'est rétrécie comme peau de chagrin, l'association de ces propositions à son nom dans les deux situations décrites nous amène à poser une deuxième conjecture: Archimède ne peut être totalement étranger au fond du traité. Or ce fond, quel est-il? Négligeant la cinquième proposition de notre fragment, parfaitement banale et donc claire-

34 Un autre cas d'amalgame de traités scientifiques dans la basse antiquité a été mentionné dans le Mus. Helv. 45 (1988) 194–195.

ment ajoutée, il nous reste quatre énoncés dépendant d'une seule et même relation, *qui établit un lien entre la longueur des côtés et la surface d'un triangle rectangle.*

Or, ceci n'est qu'un cas particulier d'une relation tout à fait générale, valable pour un triangle quelconque, et déjà connue dans l'Antiquité puisque Héron d'Alexandrie la démontre dans ses Metrica[35]. Toutefois, si l'on en croit des sources arabes, cette relation était connue auparavant et remonterait à Archimède. On trouve en effet dans un passage de l'Istikhrāj al-autār fī'l-dā'ira (Détermination des cordes dans le cercle) du Persan al-Bīrūnī (972/3–1048) le passage suivant[36]: «Méthode d'Archimède pour (calculer) la surface des triangles par les excès. Archimède a dit: On multiplie la moitié de la somme des trois côtés du triangle par l'excès qu'elle a sur l'un d'eux, puis le résultat par l'excès qu'elle a sur le second, puis ce que l'on a obtenu par l'excès qu'elle a sur le troisième, et l'on prend la racine (carrée) du résultat; ce qui provient est la surface du triangle»[37].

Il serait tentant de voir dans les propositions du fragment des survivances de lemmes ou de corollaires, traitant du cas particulier du triangle rectangle, ayant à quelque époque fait partie d'une étude plus générale d'Archimède sur la détermination de la surface d'un triangle dont on connaît la longueur des côtés. Regrettons seulement que cette reconstruction doive rester hypothétique, étayée qu'elle n'est que par diverses suppositions, présomptions, ou extrapolations.

35 Voir le vol. III des *Heronis Alexandrini Opera*, ed. H. Schöne (Leipzig 1903) 18sqq.

36 *Rasā'ilu 'l-Bīrūnī* (Haiderabad 1367/1948) I, p. 61 (traduit ci-après); traduction, selon un autre manuscrit, de H. Suter, *Das Buch der Auffindung der Sehnen im Kreise von (...) el-Bīrūnī*, Bibliotheca mathematica, 3. F., 11 (1910) 39.

37 Si a, b, c sont les côtés du triangle et p leur somme, alors la surface est donnée par $S = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}$.

هز وكن هك مثل هج و هط مثل دج فمربع هط مع مربع دا مثل مربع هز
فاذا اقسمنا اء المعلوم من قسمه هز فقد علمنا ما اردنا

من كتاب خواص المثلث لارشميدس

كل مثلث قائم الزاوية فان مربع اضلاعه الثلثة اذا جعلت كخط واحد مساو
لضعف سطح القائم الزوايا الذي يحيط به اضلاعه الثلثة والعمود المخرج
من الزاوية القائمة الى وترها اذا جعل الجميع كخط واحد في وتر الزاوية
القائمة مثاله ابج زاوية آ منه قائمة اقول ان مربع
اضلاعه اذا جعلت كخط واحد مساو لضعف بها مع العمود وهو اد
في القاعدة وهي دب برهانه فلنخرج دب على استقامة ونفصل
منه ده مثل اج و هز مثل اب وزح مثل اد ونفصل حط
مثل دب فطب قسم على ح بنصفين وزيد فيه طز فضرب بز
في زط مع مربع طح مثل مربع حز ومربع زح مثل
مربعي زه هح وضرب زه في هح مرتين ومربعا
زه هح مثل مربع طح المساوي للقاعدة يسقط
المتساوية يبقى ضرب ... في زط مثل ضرب زه في هح فضرب حز المساوي
للعمود في طب و ... القاعدة مساو لضرب زب اعني مجموع الاضلاع
في زط فنسبة ... الى زط الى طب واذا ركبنا كانت نسبة
... الى زب كنسبة ... الى ... وسطح النسبة ضرب حب
في ... مثل مربع ... ما اردنا بيانه
كل مثلث قائم الزاو

Planche 1. Manuscrit Imām Jum‘a 284, fol. 192v
Cliché de la Bibliothèque centrale, Téhéran

Leere Seite
Blank page
Page vide