Sur le papyrus Vindobonensis G 256

Jacques Sesiano, Genève

Abstract: Griechische mathematische Schulaufgaben betreffen des öfteren rechtwinklige Dreiecke mit Seiten in ganzen Zahlen. Hier muss aus der Kenntnis der einen und der Summe der beiden anderen jede einzeln ermittelt werden.
Keywords: Mathématiques, Grèce antique, Problèmes scolaires.

Les *Neue Texte aus dem antiken Unterricht*, publiés en 1985 par H. Harrauer et P. Sijpesteijn en deux volumes (texte et planches), ont réuni nombre de fragments issus de domaines variés, dont quelques-uns ressortissent à la mathématique scolaire. Certains de ces fragments ont été particulièrement défavorisés, ne laissant survivre que quelques mots, et offrant ainsi au lecteur imaginatif une vaste gamme d'interprétations. Tel est le P.Vindob. G 256, du deuxième siècle, décrit sous le numéro 174 de la manière suivante:

> 2 × 3 cm. Mittelbraunes Papyrusfragment, an allen Seiten unvollständig. Andere Seite leer. Schwarze Tinte. Sorgfältige, saubere Schrift. Vielleicht gleiche Hand wie voriger Text (allusion au n° 173 = P.Vindob. G 353 b + c).

A la suite de cette description vient la transcription, dont on peut vérifier la lecture par la reproduction dans le deuxième volume (Tafel 80):

1 Spuren
2]. . . το[
3 ἰσ]ογωνίου̣ [
4]. ῑδ̄ λοιπὰ .[
5 β]ά̣σις τού[των
6 ἰσο]γ̣ωνίου̣ [
7 λοι]π̣ὰ ῑ[Z̄

Le commentaire qui suit immédiatement est supposé éclairer le lecteur sur le sens du texte:

> Es handelt sich um die Berechnung der Fläche, die übrig bleibt zwischen 4 einander berührenden Kreisen mit demselben Durchmesser, die ihren Mittelpunkt in den Eckpunkten eines Quadrates haben.

Dans la pensée des auteurs, qu'ils ne détaillent pas, il s'agirait donc de calculer l'aire comprise entre les quatre quarts de cercles osculateurs égaux situés dans les quatre angles d'un carré, selon la figure 1 (que nous ajoutons, tout comme la suivante). Examinons d'abord cette assertion.

Remarquons déjà que, si l'on réunit les quatre quarts de cercle, on obtiendra le cercle entier enfermé dans ledit carré (Fig. 2). Il s'agirait donc, si l'on maintient l'hypothèse des auteurs, de calculer l'aire de la partie du carré extérieure au cercle. Vu sous cette aspect, le problème devient simple: on doit trouver la différence des aires entre un carré de côté donné et le cercle ayant même diamètre que le côté du carré. Or ceci est du domaine de la géométrie élémentaire. Si r est le rayon du cercle, le côté du carré vaudra $2r$ et donc sa surface $4r^2$. Quant au cercle, sa surface est πr^2. Leur différence est donc $4r^2 - \pi r^2 = r^2(4 - \pi)$.

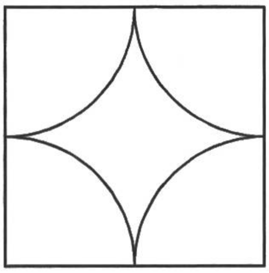

Fig. 1.

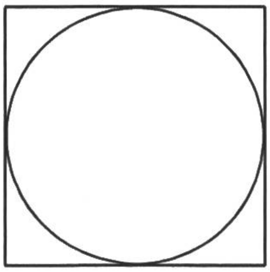

Fig. 2.

Mais ici le problème perd de sa simplicité. Il est équivalent à celui de la quadrature du cercle, car les deux quantités dont on recherche la différence ne sont pas commensurables. Un Grec au fait de la géométrie n'aurait simplement pas donné suite à une telle proposition. Mettons-nous alors dans la peau d'un écolier qui ne se préoccupe pas de tels interdits et adoptons, comme souvent dans les papyri scolaires, l'approximation *grossière* $\pi \approx 3$. On trouvera ainsi que la différence des aires recherchée est r^2, et donc égale au quart de l'aire du carré.

Mais il y a dans l'interprétation ci-dessus quelque chose de plus grave que cette entorse à la mathématique théorique. On serait en effet bien en mal de trouver, dans ce qui reste du texte, un seul mot qui corroborerait ladite interprétation. On devra dès lors la considérer comme peu crédible, quant au fond comme quant à la forme.

Reprenons l'étude du fragment *ab initio* et considérons les éléments dont la lecture est certaine. On a d'abord -ογωνιο- et -ωνιο-; pour les éditeurs, il faut lire ισογωνιο-, mais on pourrait aussi bien lire ορθογωνιο- et considérer qu'il est question d'un triangle rectangle, τρίγωνον ὀρθογώνιον. La présence de λοιπα, au moins une fois, indique la présence d'une soustraction, qui amenuise 14; c'est la seule donnée numérique conservée, mais elle nous suffira pour reconstituer le problème dans son aspect quantitatif. Quant à βασις, correctement lu et conjecturé, il suggère qu'une inconnue était la base du triangle rectangle susmentionné.

L'algèbre grecque, avec la désignation explicite des inconnues, l'usage de symboles et le cheminement menant à la résolution d'équations, linéaires ou quadratiques, était réservée aux études supérieures. Le principal témoignage en est l'*Arithmetica* de Diophante (vers 250), originellement en treize livres (βιβλία), dont une partie a été conservée en grec, transmise par l'intermédiaire des Byzantins, alors qu'une autre, dans un commentaire de la basse antiquité, a été traduite en arabe.[1]

Mais il existe une autre forme d'algèbre, dépourvue de symbolisme et de raisonnement algébrique, à usage scolaire.[2] L'énoncé du problème y est suivi de la résolution, sous la forme de l'application d'une suite d'identités connues par cœur des élèves, dont la succession n'est pas motivée car ils la connaissent pour chaque cas proposé: une fois que le problème est énoncé, le cheminement de sa résolution ne laisse pas de place au tâtonnement, et les données numériques en sont la seule particularité. L'existence d'une telle algèbre n'est pas surprenante, elle procède de l'absence de symbolisme et de formulation explicite des équations. Au reste, avant les Grecs, les Sumériens procédaient de même, et les exemples de tels problèmes transmis par les Accadiens ne manquent pas.[3]

Les problèmes sur les triangles rectangles de côtés en nombres rationnels, le plus souvent en nombres naturels, sont un thème de prédilection de ces problèmes scolaires: ils sont du deuxième degré mais l'équation, ou ce qui en tiendrait lieu, n'y apparaît pas explicitement, prenant le déguisement du théorème dit de Pythagore. L'un des meilleurs exemples en est le papyrus Gen. 259, édité et analysé dans cette même revue voici une vingtaine d'années (1999). Deux de ses trois problèmes sont du même type: connaissant l'un des côtés d'un triangle rectangle et la somme des deux autres, trouver la valeur individuelle de ces derniers. On a donc deux données numériques explicites, et en outre une donnée implicite, à savoir que la somme des carrés des deux côtés perpendiculaires égale le carré de l'hypoténuse. C'est précisément un problème de ce type que présente notre fragment, et sa résolution devra être analogue à celle du troisième problème du papyrus genevois.

Quant aux données numériques dudit problème, il n'est guère difficile de les reconstituer puisque l'une nous est connue. Considérant qu'on doit épargner à l'écolier l'usage de fractions, l'important étant sa connaissance du maniement des identités, on aura choisi des triangles rectangles dont les côtés sont exprimés en nombres entiers; les plus simples sont ceux dont la hauteur a, la base b et l'hypoténuse h sont respectivement 3, 4, 5 ou bien 5, 12, 13, ainsi que les multiples entiers de ceux-ci. Or ici il nous faut 14, dont on remarque immédiatement qu'il est la

1 P. Tannery, *Diophanti Alexandrini Opera omnia cum Graecis commentariis* (Leipzig 1893–1895, 2 vol.); J. Sesiano, *Books IV to VII of Diophantus' ‹Arithmetica› in the Arabic translation attributed to Qusṭā ibn Lūqā* (New York 1982).

2 Voir notre «An early form of Greek algebra», *Centaurus* 40 (1998) 276–302 (exemples antiques grecs et latins).

3 Divers cas caractéristiques, d'origine mésopotamienne ou grecque, sont rapportés dans notre *Introduction à l'histoire de l'algèbre* (Lausanne 1999) 4–16 et 18–24, ou, dans sa traduction anglaise par l'American Mathematical Society (*Mathematical world, 27*, Providence 2009) 4–16 et 19–25.

somme des petits côtés du triangle dont les trois côtés 6, 8, 10 sont doubles de ceux du premier triangle élémentaire sus-mentionné. On sera ainsi amené à supposer qu'il est question dans notre papyrus d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse h vaut 10 cependant que la somme de la base b et de la hauteur a égale 14 (Fig. 3).

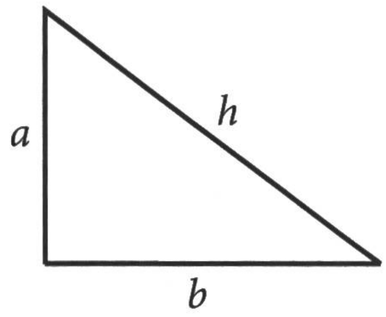

Fig. 3.

Supposons donc un problème énoncé comme suit: Ἐὰν ᾖ τρίγωνον ὀρθογώνιον οὗ ἡ μὲν κάθετος καὶ ἡ βάσις εἰς τὸ αὐτὸ ι̅δ̅, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ι̅· εὑρεῖν τήν τε κάθετον κατ' ἰδίαν καὶ τὴν βάσιν. Comme cela est usuel dans les papyri mathématiques scolaires, ledit énoncé sera suivi de l'annonce de la résolution (ἡ δὲ τούτου εὕρεσις γίνεται οὕτως, ou bien simplement εὑρήσομεν οὕτως) puis de l'application, *sans justification ni commentaire*, des identités menant à la détermination de la solution.

Sachant donc que $h = 10$ et $b + a = 14$ (il est d'usage de considérer $b > a$, donc que la base est supérieure en longueur à la hauteur) et que notre triangle est rectangle, et satisfait ainsi la relation $b^2 + a^2 = h^2$, nous pouvons reconstituer la marche des calculs.

1) Comme le carré de l'hypoténuse est 100, on a $b^2 + a^2 = 100$.

2) Puisque, selon la donnée, $b + a = 14$, on aura $(b + a)^2 = 14^2 = 196$.

3) Utilisant 1), on forme $2(b^2 + a^2) = 200$.

4) Faisant 3) − 2), on obtient $200 - 196 = 4$, soit $2b^2 + 2a^2 - (b + a)^2 = 4$. Or le membre de gauche de cette dernière égalité se réduit à $b^2 + a^2 - 2ba$, qui est $(b - a)^2$. Donc $(b - a)^2 = 4$, et par suite $b - a = 2$.

5) Nous savons que $b + a = 14$, par la donnée, et maintenant que $b - a = 2$, par calcul. Soustrayant la deuxième expression de la première nous trouvons $2a = 12$ (τὰ β̅ ἄφελε ἀπὸ τῶν ι̅δ̅· λοιπὰ ι̅β̅), et donc $a = 6$. Telle est la valeur de la hauteur, et aussi la signification du ι̅δ̅ λοιπὰ dans le fragment.

6) Comme la somme de la base et de la hauteur est 14, la base (ἡ βάσις τοῦ τριγώνου ὀρθογωνίου) égalera $14 - 6 = 8$.

La réunion de tout ceci en une paire de formules montre qu'on aura progressivement calculé

$$a = \frac{1}{2}[(b+a) - \sqrt{2(b^2+a^2)-(b+a)^2}\,] = \frac{1}{2}[14 - \sqrt{2 \cdot 100 - 14^2}\,] = 6,$$

$$b = (b + a) - a = 14 - 6 = 8,$$

à l'aide des identités

$$(b \pm a)^2 = b^2 \pm 2ba + b^2 \qquad \text{et} \qquad a = \frac{1}{2}\,[(b + a) - (b - a)].$$

La reconstitution de tels problèmes est aisée dès lors qu'on est conscient d'une part de l'existence de l'algèbre proprement dite en Grèce antique, et d'autre part de cette forme masquée, accessible aux élèves des degrés moyens, utilisant des identités élémentaires. Si la découverte de l'algèbre scolaire est relativement récente, du fait du petit nombre de documents conservés, il n'en va pas de même de l'algèbre proprement dite. Arrivée en Europe par l'intermédiaire du *Liber Mahameleth* composé en Espagne au milieu du XII^e^ siècle en utilisant des sources arabes (les *muʿāmalāt* étant les applications de la mathématique au négoce et à la vie courante), elle se répandit en Italie dès le début du XIII^e^ siècle grâce au *Liber abaci* du Pisan Leonardo Fibonacci, reposant lui aussi sur des sources arabes – mais en outre byzantines.

L'algèbre fut donc tout naturellement considérée aux temps médiévaux comme une création arabe, d'autant que sa dénomination le suggérait. Les prémices d'un changement furent réunis au XV^e^ siècle avec l'arrivée en Italie de manuscrits byzantins sauvés des ravages de l'occupation turque. Relatant au début de son traité *L'Algebra*, imprimé en 1572, ses recherches préliminaires, Bombelli décrivait dans l'introduction sa surprise d'avoir découvert l'origine antique de la science de l'algèbre :

> ho voluto prima vedere la maggior parte degli autori, i quali di quella sino ad hora ne hanno scritto, (…) che molti e molti sono, tra quali certo Maumetto di Mose Arabo è creduto il primo, e di lui una operetta si vede, ma di picciol valore, e da qui credo che venuto sia questa voce Algebra, perché gli anni a dietro essendosi posto a scrivere Frate Luca del Borgo San Sepolcro dell'ordine de' Minori in lingua così latina come volgare di questa scientia disse che questa voce Algebra Araba era (…) e che da' Arabi la scientia è venuta; il che parimente poi hanno creduto e detto quanti doppo lui hanno scritto; ma questi anni passati, essendosi ritrovato una opera greca di questa disciplina nella libraria di Nostro Signore in Vaticano, composta da un certo Diofante Alessandrino Autor Greco (…), & havendomela fatta vedere Messer Antonio Maria Pazzi Reggiano, publico lettore delle Matematiche in Roma, e giudicatolo con lui autore assai intelligente de' numeri (…) egli & io, per arricchire il mondo di così fatta opera, ci dessimo à tradurlo.

Effectivement, des six livres conservés en grec de l'*Arithmetica* de Diophante, ils traduisirent les cinq premiers, et cette version italienne fut insérée par Bombelli dans son traité. Quant aux deux autres auteurs qu'il mentionne ci-dessus, ce sont le Persan Muḥammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, qui composa vers 820 à Baghdad une algèbre – effectivement ‹di picciol valore›, car elle se voulait pratique et largement accessible – et Luca Pacioli, à qui on doit le premier traité majeur de mathématiques imprimé (*Summa de arithmetica, geometria, proportioni e proportionalità,* 1492), et qui aurait dû être l'un des derniers à ignorer l'origine antique de l'algèbre.

Correspondance:
Jacques Sesiano
1, rue Patru
CH-1205 Genève
seziano@bk.ru