Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1846)

Heft: 70-71

Artikel: Über ein räumliches System von Geraden im Allgemeinen, und über dasjenige der Normalen einer krummen Fläche insbesondere [Fortsetzung]

Autor: Schläfli, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-318207

L. Schläfli, über ein räumliches System von Geraden im Allgemeinen, und über dasjenige der Normalen einer krummen Fläche insbesondere.

(Fortsetzung zu Nr. 69.)

§. 7. Nun wollen wir das *System der Normalen einer krummen Fläche* betrachten. Wir können hiefür die Gleichungen (1) zu Anfang des §. 2 behalten, indem wir denselben nur noch die Bedingung

$$\lambda dx + \mu dy + \nu dz = o \quad (17)$$

hinzufügen. Wenn wir wiederum so wie dort zwei beliebige unabhängige Variabeln t, u annehmen und der Kürze wegen z. B. $dx = x'dt + x_{,}du$ setzen, so zerfällt diese Bedingung in die zwei Gleichungen

$$\lambda x' + \mu y' + \nu z' = o$$
$$\lambda x_{,} + \mu y_{,} + \nu z_{,} = o\,.$$

Differentiirt man die erste nach u, die zweite nach t, so ergeben sich die zwei Gleichungen

$$\lambda x'_{,} + \mu y'_{,} + \nu z'_{,} + \lambda_{,}x' + \mu_{,}y' + \nu_{,}z' = o\,,$$
$$\lambda x'_{,} + \mu y'_{,} + \nu z'_{,} + \lambda' x_{,} + \mu' y_{,} + \nu' z' = o\,;$$

und wenn man diese von einander subtrahirt, so ergibt sich die Gleichung :

$$\lambda_{,}x' + \mu_{,}y' = \nu_{,}z' = \lambda' x_{,} + \mu' y_{,} + \nu' z_{,}\,,$$

welche mit der Gleichung (9) des §. 4 übereinstimmt. Also *sind die zwei zu jeder Normale gehörenden charakteristischen Ebenen stets auf einander senkrecht.*

Wenn wir auf die Gleichungen (10) in §. 5 zurückgehen, so sehen wir, dass vermöge der Gleichung (17) das dortige S verschwindet. Wenn wir ferner x'dt durch dx, u. s. f. ersetzen, und ϱ statt des dortigen T als Bezeichnung der Länge der Normale bis zum Durchschnitt mit ihrer consecutiven gebrauchen, so bekommen wir die drei Gleichungen

$$\varrho = \frac{dx}{d\lambda} = \frac{dy}{d\mu} = \frac{dz}{d\nu}, \quad (18)$$

durch welche zugleich die Form der Gleichung $u = \text{const.}$ im Sinne von §. 3 und die entsprechende Länge ϱ der Normale bestimmt werden. (Wenn die Gleichungen (10) durch Differentiation in Beziehung auf u entstanden wären, so wäre man durch deren Anwendung auf dieselben Gleichungen (18) gekommen. Folglich geben diese, wie man übrigens auch aus der quadratischen Form, die sie bei der Entwicklung annehmen, ersieht, auch die Gleichung $t = \text{const.}$ und die entsprechende Länge ϱ' der Normale.)

Die Gleichungen (18) sind leicht geometrisch zu beweisen. Es seien nämlich QM, QM′ zwei in den Punkten M, M′ an die gegebene Fläche gezogene Normalen, die im Punkte Q sich schneiden; und man ziehe aus einem beliebigen Punkte O zwei der Einheit gleiche gerade Linien ON, ON′ parallel mit jenen beiden Normalen, so ist das gleichschenkliche Dreieck ONN′ dem Dreieck QMM′ ähnlich; folglich

$$ON : QM = NN' : MM'.$$

Und weil NN′ und MM′ parallel sind, so ist das Verhältniss derselben demjenigen ihrer Projectionen gleich. Da nun $ON = 1$, $QM = \varrho$, und die Projectionen von NN′, MM′ respective den Differentialen $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$; dx, dy, dz gleich sind, so ergibt sich die Richtigkeit der Bedingungsgleichungen (18).

Die Gleichungen (18) sind nur scheinbar *drei* an der Zahl; denn wegen der Gleichung (17) und der Gleichung $\lambda d\lambda + \mu d\mu + \nu d\nu = o$, ist immer eine derselben die Folge der beiden übrigen. Sie bestimmen daher nicht mehr als das Verhältniss der Differentiale der beiden unabhängigen Variabeln und den Werth ϱ der Normale.

§. 8. Wir wollen nun aus den Gleichungen (18) die Verhältnisse der Differentialen der Variabeln eliminiren, um eine Endgleichung für die Länge ϱ der Normale zu erhalten. Die Gleichung der gegebenen krummen Fläche sei $U(x, y, z) = o$, und man habe

$$dU = Ldx + Mdy + Ndz,$$

so ist $\lambda = \frac{L}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}}$, u. s. f. Die drei Grössen λ, μ, ν können somit als Functionen dreier unabhängiger Variabeln behandelt werden. Setzt man überdiess $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$, $\alpha = \frac{dx}{ds}$, $\beta = \frac{dy}{ds}$, $\gamma = \frac{dz}{ds}$, so werden die Gleichungen (18)

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{d\lambda}{dx} - \frac{1}{\varrho}\right)\alpha + \frac{d\lambda}{dy}\beta + \frac{d\lambda}{dz}\gamma &= o \\ \frac{d\mu}{dx}\alpha + \left(\frac{d\mu}{dy} - \frac{1}{\varrho}\right)\beta + \frac{d\mu}{dz}\gamma &= o \\ \frac{d\nu}{dx}\alpha + \frac{d\nu}{dy}\beta + \left(\frac{d\nu}{dz} - \frac{1}{\varrho}\right)\gamma &= o \end{aligned}\right\} \quad (19)$$

(Eine dieser Gleichungen kann auch durch die Gleichung (17), d. h. durch

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = o$$

ersetzt werden.) Eliminirt man aus denselben die zwei Verhältnisse der Grössen α, β, γ, so ergibt sich eine Gleichung für $\frac{1}{\varrho}$, die auf den dritten Grad zu steigen scheint. Da aber aus der Gleichung $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ die drei folgenden

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dx}\cdot\lambda + \frac{d\mu}{dx}\cdot\mu + \frac{d\nu}{dx}\cdot\nu &= o \\ \frac{d\lambda}{dy}\cdot\lambda + \frac{d\mu}{dy}\cdot\mu + \frac{d\nu}{dy}\cdot\nu &= o \\ \frac{d\lambda}{dz}\cdot\lambda + \frac{d\mu}{dz}\cdot\mu + \frac{d\nu}{dz}\cdot\nu &= o \end{aligned}\right\} \quad (20)$$

sich ergeben, und da nun nicht alle drei Grössen λ, μ, ν zugleich verschwinden können, so folgt, dass die Ausdrücke, welche man durch das gewöhnliche Eliminationsverfahren für (die Unbekannten) λ, μ, ν erhält, die Form $\frac{0}{0}$ haben müssen, dass also der allen drei Ausdrücken gemeinschaftliche Nenner verschwindet. D. h. es folgt aus den Gleichungen (20), dass die Determinante

$$\Sigma \pm \frac{d\lambda}{dx} \frac{d\eta}{dy} \frac{d\nu}{dz} = 0$$

ist, (wo das Summzeichen sich auf die 6 Permutationen der untergesetzten Zeichen dx, dy, dz bezieht, und das vorgesetzte $\pm$ den bekannten Zeichenwechsel der dreifachen Producte bezeichnet). Daher wird obige Gleichung für $\frac{1}{\varrho}$ durch $\frac{1}{\varrho}$ theilbar und kömmt unter folgender Gestalt auf den zweiten Grad zurück:

$$\left.\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\varrho}\right)^2 - \left[\frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\mu}{dy} + \frac{d\nu}{dz}\right] \frac{1}{\varrho} \\ &+ \frac{d\mu}{dy}\frac{d\nu}{dz} - \frac{d\mu}{dz}\frac{d\nu}{dy} \\ &+ \frac{d\nu}{dz}\frac{d\lambda}{dx} - \frac{d\nu}{dx}\frac{d\lambda}{dz} \\ &+ \frac{d\lambda}{dx}\frac{d\mu}{dy} - \frac{d\lambda}{dy}\frac{d\mu}{dx} \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

§. 9. Die Gleichungen (19), vereint mit der Gleichung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, geben auch die Werthe der drei Cosinus α, β, γ, welche die dem einen Werthe von ϱ zugehörige *Richtung* bestimmen, *in welcher die aus Normalen gebildete abwickelbare Fläche die gegebene krumme Fläche schneidet.* Aus den beiden letzten der drei Gleichungen (19) ergibt sich durch Elimination von $\frac{1}{\varrho}$, wenn man zugleich die mit β^2, γ^2, behafteten Ausdrücke vermeidet, indem man von der Gleichung (17)

$$\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = o$$

Gebrauch macht:

$$\left.\begin{array}{l} \mu\nu\left(\frac{d\mu}{dy} - \frac{d\nu}{dz}\right)\beta\gamma + \mu\nu\,\frac{d\mu}{dx}\,\alpha\gamma - \mu\nu\,\frac{d\nu}{dx}\,\alpha\beta \\ -\,\mu\,\frac{d\mu}{dz}\,\gamma\,(\lambda\alpha + \mu\beta) + \nu\,\frac{d\nu}{dy}\,\beta\,(\lambda\alpha + \nu\gamma) \end{array}\right\} = o. \quad (22)$$

Weil aber $\lambda = \frac{L}{\sqrt{(L^2 + M^2 + N^2)}}$, etc. ist, ohne dass in diesen Ausdrücken irgend eine Substitution aus der ursprünglichen Gleichung $U = o$ vorgenommen worden ist, so muss die Differentialgleichung

$$\lambda dx + \mu dy + \nu dz = o$$

in Beziehung auf die drei unabhängigen Variabeln x, y, z integrirbar sein. Wenn nun der Kürze wegen

$$\left.\begin{array}{l} l = \mu\,\frac{d\lambda}{dz} - \nu\,\frac{d\lambda}{dy} \\ m = \nu\,\frac{d\mu}{dx} - \lambda\,\frac{d\mu}{dz} \\ n = \lambda\,\frac{d\nu}{dy} - \mu\,\frac{d\nu}{dx} \end{array}\right\} \quad (23)$$

gesetzt wird, so ist

$$l + m + n = o \quad (24)$$

die bekannte Bedingung der Integrirbarkeit jener Differentialgleichung. In der Gleichung (22) wird nun der Coefficient von $\beta\gamma$:

$$\gamma\left(\mu\,\frac{d\mu}{dy} + \nu\,\frac{d\nu}{dy}\right) - \mu\left(\nu\,\frac{d\nu}{dz} + \mu\,\frac{d\mu}{dz}\right)$$

und verwandelt sich wegen den Gleichungen (20) in λl. Demnach erhält jene Gleichung (22) die merkwürdige Form:

$$\lambda l\beta\gamma + \mu m\gamma\alpha + \nu n\alpha\beta = o \quad (25)$$

Wird diese Gleichung (25) mit der bekannten $\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = o$ verbunden, so liefert sie zunächst quadratische Gleichungen für die Verhältnisse der Cosinus α, β, γ. Eliminirt man z. B. γ, so wird sie

$$\lambda\mu m\alpha^2 + (\lambda^2 l + \mu^2 m - \nu^2 n)\,\alpha\beta + \lambda\mu l\beta^2 = o.$$

Setzt man nun der Kürze wegen

$$\left.\begin{array}{rl|rl} -\lambda^2 l + \mu^2 m + \nu^2 n = p, & & T^2 = p^2 - 4\mu^2\nu^2 mn & \\ \lambda^2 l - \mu^2 m + \nu^2 n = q, & & = q^2 - 4\nu^2\lambda^2 nl & \\ \lambda^2 l + \mu^2 m - \nu^2 n = r, & & = r^2 - 4\lambda^2\mu^2 lm, & \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{also auch}\quad T^2 = -\lambda^2 lp - \mu^2 mq - \nu^2 nr \\ \qquad\qquad\quad\;\; = -\,qr - rp - pq\,, \end{array}\right\} \quad (26)$$

so ergibt sich

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{-r + T}{2\lambda\mu l}\,, \qquad \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-q - T}{2\lambda\nu l} \qquad (27)$$

Mit Beiziehung der Gleichung $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ und Beachtung der Bedingung (24) und folgender aus den Gleichungen (26) resultirenden Relationen

$$(\mu^2 + \nu^2)^2 T^2 - (\mu^2 q - \nu^2 r)^2 = 4\lambda^2\mu^2\nu^2 l^2\,,\ \text{etc.}$$

findet man

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^2 = \dfrac{\mu^2 + \nu^2}{2} - \dfrac{\mu^2 q - \nu^2 r}{2T} \\[2ex] \beta^2 = \dfrac{\nu^2 + \lambda^2}{2} - \dfrac{\nu^2 r - \lambda^2 p}{2T} \\[2ex] \gamma^2 = \dfrac{\lambda^2 + \mu^2}{2} - \dfrac{\lambda^2 p - \mu^2 q}{2T} \end{array}\right\} (28)$$

ferner, wenn α', β', γ', diejenigen Werthe von α, β, γ bezeichnen, welche dem entgegengesetzten Vorzeichen des Radikals T entsprechen,

$$\left.\begin{array}{l|l} \alpha^2 + \alpha'^2 = \mu^2 + \nu^2 & \alpha\alpha' = \frac{\lambda\mu\nu}{T}\,l \\[2ex] \beta^2 + \beta'^2 = \nu^2 + \lambda^2 & \beta\beta' = \frac{\lambda\mu\nu}{T}\,m \\[2ex] \gamma^2 + \gamma'^2 = \lambda^2 + \mu^2 & \gamma\gamma' = \frac{\lambda\mu\nu}{T}\,n \end{array}\right\} \quad (29)$$

wo die schon aus dem Anfang des §. 7 bekannte Gleichung

$$\alpha\alpha_{,} + \beta\beta' + \gamma\gamma' = o$$

mit der Integrabilitätsbedingung (24) übereinstimmt.

§. 10. Im Vorhergehendeu haben wir ϱ, ϱ' als Längen der Normale von der krummen Fläche an bis zu den beiden Durchschnitten mit einer consecutiven Normale, und α, β, γ, α', β', γ' als Cosinus, welche die Richtungen der Durchschnitte der entsprechenden charakteristischen Ebenen mit der Berührungsebene der krummen Fläche bestimmten, gefunden. Es bleibt nun zu zeigen übrig, dass jene Längen die *Halbmesser der grössten und kleinsten Krümmung*, und diese Richtungen *diejenigen der genannten Krümmungen* sind.

Durch die Normale im Punkt M der gegebenen krummen Fläche werde eine Ebene in beliebiger Richtung gelegt; Q sei der zum Punkt M gehörende Krümmungsmittelpunkt der Durchschnittscurve, welcher offenbar auf der Normale des Punktes M liegen wird, und M′ ein consecutiver Punkt dieser Curve. Durch einen beliebigen Punkt O ziehe man ON, ON′, ON″ respective parallel mit den Normalen der krummen Fläche in den Punkten M, M′ und mit QM′, und mache ON = ON′ = ON″ = 1, so werden $d\lambda$, $d\mu$, $d\nu$ die Projectionen der geraden Linie NN′ sein; und, da die Tangente der Durchschnittscurve im Punkte M′ sowohl auf der Flächennormale in diesem Punkt, als auch auf QM′ senkrecht steht, so wird sie auf der durch beide Linien gelegten Ebene senkrecht stehen; also wird auch NN″ auf der Ebene

ON′N″ senkrecht stehen und daher in dem infinitesimalen Dreieck NN′N″ der Winkel N″ ein Rechter sein. Somit ist NN″ die Projection von NN′ auf die Richtung NN″ oder MM′, die durch die Cosinus $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, bestimmt wird, d. h. es ist

$$NN'' = d\lambda \cdot \frac{dx}{ds} + d\mu \cdot \frac{dy}{ds} + d\nu \cdot \frac{dz}{ds}.$$

Da nun ON : NN″ = QM : MM′ und da ON = 1, MM′ = ds ist, so ergibt sich, wenn man den Krümmungshalbmesser QM = K setzt,

$$K = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dxd\lambda + dyd\mu + dzd\nu} \qquad (30)$$

als Ausdruck des Krümmungshalbmessers der Durchschnittscurve.

Nun bilde das auf der krummen Fläche liegende Curvenelement ds mit einer der beiden charakteristischen Ebenen den Winkel w, so dass, wenn α, β, γ, α', β', γ', dieselbe Bedeutung haben wie in §. 9, und λ', . . $\lambda_{,}$, . . wie in §. 3,

$$dx = ds\,(\alpha \cos. w + \alpha' \sin. w)\,, \text{ etc.}$$
$$d\lambda = ds\,(\lambda' \cos. w + \lambda_{,} \sin. w)\,, \text{ etc.}$$

gesetzt werden kann. Dann ergibt sich

$$\frac{1}{K} = S\,(\lambda' \cos. w + \lambda_{,} \sin. w)\,(\alpha \cos. w + \alpha' \sin. w)\,,$$

wo sich das Summenzeichen S auf die drei Coordinatenaxen bezieht.

Nun ist aber wegen (18)

$$\varrho = \frac{\alpha}{\lambda'} = \frac{\beta}{\mu'} = \frac{\gamma}{\nu'}\,, \qquad \varrho' = \frac{\alpha'}{\lambda_{,}} = \frac{\beta'}{\mu_{,}} = \frac{\gamma'}{\nu_{,}}\,;$$

folglich

$$S\lambda'\alpha = \frac{1}{\varrho}, \quad S\lambda_{,}\alpha' = \frac{1}{\varrho'}, \quad S\lambda'\alpha' = 0\,, \quad S\lambda_{,}\alpha = 0\,;$$

demnach wird

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\varrho} \cos.^2 w + \frac{1}{\varrho'} \sin.^2 w, \quad (31)$$

woraus sich sogleich ergibt, dass ϱ, ϱ' die kleinsten und grössten Werthe von K sind.

§. 11. Die beiden Systeme abwickelbarer Fächen, in welche das System der Normalen der gegebenen krummen Fläche zerfällt, schneiden nach dem Vorigen diese leztere in *Curven grösster und kleinster Krümmung*, d. h. in solche Curven, deren Elemente durchweg die Richtung der grössten oder kleinsten Krümmung haben. Da nun die beiden Systeme abwickelbarer Flächen sich rechtwinklich durchschneiden, so *wird die gegebene krumme Fläche von ihren sämmtlichen Curven grösster und kleinster Krümmung in lauter rechteckige Elemente eingetheilt.*

Die Ortsfläche für alle Mittelpunkte *kleinster* Krümmung wird nach §. 5 berührt von der durch eine Normale und die entsprechende Richtung der *grössten* Krümmung gelegten Ebene. Da nun die (andere charakteristische) Ebene, welche durch eben dieselbe Normale und die Richtung der *kleinsten* Krümmung gelegt ist, und daher auf der Vorigen senkrecht ist, zwei consecutive Tangenten der charakteristischen Curve enthält oder die osculirende Ebene derselben ist, so folgt hieraus, dass diese charakteristische Curve eine *kürzeste* auf obiger Ortsfläche sein müsse. Denn, damit eine Curve auf einer krummen Fläche eine *kürzeste* sei, ist es nöthig und reicht hin, dass in jedem Punkte jener Curve ihre osculirende Ebene durch die Normale der krummen Fläche gehe.