Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1846)

Heft: 75-76

Artikel: Über den Ort der Mittelpunkte grösster und kleinster Krümmung beim Ellipsoid, die kürzestes Curve auf demselben und verwandte Gegenstände

Autor: Schläfli, L.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-318212

MITTHEILUNGEN

DER

NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT

IN BERN.

Nr. 75 und 76.

Ausgegeben den 6. August 1846.

L. Schläfli, über den Ort der Mittelpunkte grösster und kleinster Krümmung beim Ellipsoid, die kürzeste Curve auf demselben und verwandte Gegenstände *).

§. 1. Construction der Krümmungscurven und der Krümmungsmittelpunkte beim Ellipsoid.

Flächen zweiten Grades, welche den Mittelpunkt und die Brennpunkte ihrer Hauptschnitte gemein haben, heissen *confocale Flächen*. Die drei Unterschiede der Qua-

*) Jacobi, dem ich zu grossem Dank verpflichtet bin, hat zuerst das Integral der Differentialgleichung zweiter Ordnung in Bezug auf die kürzeste Curve auf dem Ellipsoid gefunden und im XIXten Band des Crelle'schen Journals nebst einer Menge fruchtbarer Andeutungen über den Gebrauch der confocalen Flächen und verwandter allgemeinerer Begriffe mitgetheilt. Diese Abhandlung habe ich durch eine Uebersetzung in Liouville's Journal kennen gelernt. Da die in derselben enthaltenen Andeutun-

drate ihrer homologen Halbaxen sind alle einander gleich. Man wird daher ein System confocaler Flächen erhalten, wenn man, bei einem gegebenen Ellipsoid (I) anfangend, die Quadrate seiner Halbaxen gleichmässig abnehmen lässt. Das Quadrat der kleinsten Halbaxe wird bei diesem Verlauf zuerst auf den Nullwerth herabsinken, und somit wird die confocale Fläche in die Ebene des *ersten* Hauptschnitts degeneriren. Hierauf bekömmt das Quadrat der kleinsten Halbaxe einen negativen Werth, und die confocale Fläche wird ein *Hyperboloid mit einem Mantel* (II). Sodann erreicht das Quadrat der mittlern Halbaxe den Nullwerth, und die confocale Fläche degenerirt in die Ebene des *zweiten* Hauptschnitts, um, wenn auch dieses Quadrat negativ geworden sein wird, in ein *Hyperboloid mit zwei Mänteln*

---

gen bisher mannigfach von Andern sind benutzt und entwickelt worden, so wird man mir es um so weniger übel nehmen, wenn auch ich diesen Gegenstand der kürzesten Curve auf dem Ellipsoid, freilich bei weitem nicht nach dem darin liegenden Reichthum von Sätzen, ausbeute. Ich habe inzwischen erfahren, dass Liouville im IXten Bande seines Journals (Jahrgang 1844) einen Beweis zu Jacobis Formel für die kürzeste Curve auf dem Ellipsoid geliefert hat, denselben aber bis jetzt noch nicht zu Gesicht bekommen; dagegen giebt Liouville zu Anfang des XIten Bandes einen geometrischen Beweis jener Formel, den ich gesehen habe, und der ausser seiner Einfachheit vor dem meinigen mehr indirecten den Vorzug hat, direct zu sein; während dagegen der meinige neben der Gleichung der Curve zugleich noch die Länge ihres Bogens giebt. — In Betreff der Fläche, welche der Ort aller Mittelpunkte grösster und kleinster Krümmung des Ellipsoids ist, habe ich zu bemerken, dass ich auf geschehene Anfrage von den Herren Jacobi und Dirichlet erfahren habe, dass die Endgleichung der genannten Ortsfläche schon gefunden ist und dass die Elimination gelingt, wenn die Summe der Quadrate der Hauptaxen als zu eliminirende Grösse in die Rechnung gebracht wird. Diese letztere Andeutung tauchte indessen in meiner Erinnerung erst dann wieder auf, als ich durch den Gang der Untersuchung selbst darauf geführt wurde, die genannte Variable grösserer Einfachheit wegen in Rechnung zu bringen.

überzugehen (III). Endlich erreicht auch das Quadrat der grössten Halbaxe den Nullwerth, und die confocale Fläche degenerirt in die Ebene des *dritten* Hauptschnitts. Bei weiterer Abnahme der Quadrate der Halbaxen hört sie auf, reelle Punkte zu haben (IV).

Zwei confocale Flächen, welche zu einer und derselben der so eben aufgezählten drei Gattungen gehören, können einander nicht wirklich schneiden. Dagegen wird jede Fläche einer Gattung von allen confocalen Flächen der beiden andern Gattungen geschnitten, und zwar in *Krümmungscurven*. Das Ellipsoid (I) z. B. wird von den confocalen Flächen der *zweiten* Gattung in Curven *kleinster* Krümmung, und von denjenigen der *dritten* Gattung in Curven *grösster* Krümmung geschnitten.

Wenn $a^2 > \psi > b^2 > \varphi > c^2 > 0$ vorausgesetzt wird, und wenn

$$\begin{array}{c|c|c} a^2 & b^2 & c^2 \\ a^2-\varphi & b^2-\varphi & c^2-\varphi \\ a^2-\psi & b^2-\psi & c^2-\psi \end{array}$$

die Quadrate der Halbaxen der drei confocalen Flächen bezeichnen, welche sich im Punkte P schneiden mögen, so sind φ, ψ respektive gleich den Produkten der aus dem Mittelpunkt auf die das Ellipsoid im Punkte P berührende Ebene gefällten Senkrechten mit dem Halbmesser der grössten oder kleinsten Krümmung. Demnach ist für alle Punkte einer Curve kleinster Krümmung das Produkt φ der genannten Senkrechten mit dem Halbmesser der jeweiligen transversalen grössten Krümmung constant.

Die zum Punkte P gehörenden Grössen φ und ψ sind respektive gleich den Quadraten der kleinen und grossen Halbaxe derjenigen Diametralebene des Ellipsoids, welche mit dessen Berührungsebene im Punkt P parallel ist, d. h. welche dem Punkte P conjugirt ist. Die genannten Halbaxen sind resp. parallel mit den Richtungen der grössten und kleinsten Krümmung im Punkte P.

Wenn man die Krümmungscurven des Ellipsoids auf die Ebene des zweiten Hauptschnitts projicirt, so erscheinen sie als Stücke von Ellipsen, welche mit diesem Hauptschnitt Mittelpunkt und Richtung der Axen gemein haben. Werden diese Ellipsen vollständig gezeichnet, so sind sie alle einer Raute eingeschrieben, deren Ecken auf den verlängerten Axen liegen. Die 4 Punkte des Ellipsoids, in denen die Figur des zweiten Hauptschnitts von den Seiten dieser Raute berührt wird, haben nach allen Richtungen gleiche, d. h. sphärische Krümmung, und sind den beiden kreisförmigen Diametralebenen des Ellipsoids conjugirt. Legt man durch die 4 Seiten der genannten Raute parallel mit der mittlern Axe 4 Berührungsebenen an das Ellipsoid, so schneiden sie dasselbe in 8 imaginären Geraden, welche der Ort aller der Punkte sind, in denen sich die consecutiven Krümmungscurven schneiden, und in welchen $\varphi = \psi \lesseqgtr b^2$ ist, d. h. in welchen das Ellipsoid sphärische Krümmung hat. (Für die 4 reellen Kugelkrümmungspunkte ist speziell $\varphi = \psi = b^2$.)

Aus dem Gesagten ergiebt sich eine neue Construction der Krümmungscurven. Man lege an das Ellipsoid parallel mit den beiden Kreisschnitten 4 Berührungsebenen und schreibe denselben elliptische Cylinder ein, welche die Lage der Axen mit dem Ellipsoid gemein haben, so werden dieselben das letztere in seinen Krümmungscurven schneiden.

Wenn man durch den Punkt P des Ellipsoids zwei Gerade parallel mit den Normalen desselben in den vier Kugelkrümmungspunkten zieht, durch jede von beiden und durch die Normale im Punkt P zwei Ebenen legt und ihre Winkel halbirt, so schneiden die zwei Halbirungsebenen die Berührungsebene in den Richtungen der grössten und kleinsten Krümmung. Der Grund hievon liegt darin, dass die dem Punkt P conjugirte Diametralebene von den beiden Kreisschnitten in zwei gleichen Durchmessern geschnitten wird, deren Winkel somit von den beiden Axen der Diametralebene halbirt werden müssen.

Die beiden zum Punkt (xyz) des Ellipsoids gehörenden Mittelpunkte grösster und kleinster Krümmung sind bestimmt durch den Durchschnitt der Normale mit einem veränderlichen Kegel zweiten Grades, der durch die drei Axen geht und dessen Gleichung

$$\frac{x^3}{a^4}y'z' + \frac{y^3}{b^4}z'x' + \frac{z^3}{c^4}x'y' = 0$$

ist, wo x', y', z' die Coordinaten des Krümmungsmittelpunkts bezeichnen.

§. 2. Construction des Orts der Mittelpunkte grösster und kleinster Krümmung beim Ellipsoid.

Wenn durch die drei positiven Scheitel des gegebenen Ellipsoids eine Ebene gelegt, und auf diese Ebene aus demjenigen Punkte, dessen Projectionen auf die Axen die genannten Scheitel sind, eine Senkrechte errichtet und verlängert wird, so bestimmt jeder beliebige Punkt dieser Senkrechten durch seine Projectionen auf die drei Axen die Scheitel eines Ellipsoids, das mit dem gegebenen die Lage der Axen gemein hat. Die einhüllende Fläche dieses veränderlichen Ellipsoids ist der Ort aller Mittelpunkte grösster und kleinster Krümmung des gegebenen Ellipsoids.

Jene Senkrechte schneidet der Reihe nach die Ebenen des ersten, zweiten und dritten Hauptschnitts, und in jedem dieser drei Momente degenerirt das veränderliche Ellipsoid in die Ebenen der respectiven Hauptschnitte. Nur in den beiden zwischen diesen drei Momenten enthaltenen Stadien schneiden sich die consecutiven Ellipsoide realiter und geben dadurch die erzeugende Curve der Ortsfläche.

Man zeichne in den Ebenen der Hauptschnitte die drei Ellipsen, in welche die erzeugende Curve in den drei vorhin angegebenen Momenten degenerirt, und die Evoluten der drei Hauptschnitte des gegebenen Ellipsoids, welche der erzeugenden Curve während ihrer Bewegung gleichsam zur Leitung dienen, weil sie stets durch zwei derselben geht: man wird dann finden, dass im zweiten Hauptschnitt der elliptische Riss der Ortsfläche von der concaven Evolute umschlossen und in den 4 Punkten berührt wird, welche den 4 Kugelkrümmungspunkten des gegebenen Ellipsoids entsprechen, ferner, dass je nachdem b^2 kleiner oder grösser ist als $\frac{a^2+c^2}{2}$, im ersten oder dritten Hauptschnitt der elliptische Riss und die Evolute sich schneiden, während im andern Hauptschnitt der elliptische Riss ganz von der Evolute umschlossen wird. Wenn man nach dieser Vorbereitung die Bewegung der erzeugenden Curve verfolgt und dabei beachtet, dass dieselbe im ersten Stadium mit den entsprechenden Curven kleinster Krümmung des ursprünglich gegebenen Ellipsoids und im zweiten Stadium mit den Curven grösster Krümmung ungefähr ähnliche Gestalt und Lage hat, so bekömmt man ein deutliches Bild von der gesuchten Ortsfläche, welches etwa auf folgende Weise ausgesprochen werden mag.

Jeder Hauptschnitt besteht aus drei coincidirenden Ellipsen und einer Kegelschnittsevolute; der Grad derselben ist also $2+2+2+6=12$. Folglich ist die Ortsfläche eine Fläche des *zwölften* Grades, welche drei auf einander senkrechte Diametralebenen hat. Sie besitzt *drei elliptische Kanten der Rückkehr*, welche in den Diametralebenen liegen, und schneidet sich selbst in einer aus zwei geschlossenen Stücken bestehenden *Doppelcurve*, welche entweder um die grösste oder um die kleinste Axe des ursprünglich gegebenen Ellipsoids herumgeht, je nachdem das Quadrat der mittlern Halbaxe dieses letztern kleiner oder grösser ist als die halbe Summe der Quadrate der beiden andern Halbaxen, d. h. je nachdem der Winkel, den die Normale im Kugelkrümmungspunkt mit der grössten Axe bildet, weniger oder mehr als 45^0 beträgt.

§. 3. Endgleichung der Ortsfläche.

Da die Theilung der Evolute der Ellipse $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right)$ in der einfachen Form

$$(ax')^{2/3}+(by')^{2/3}=(a^2-b^2)^{2/3}$$

erscheint, so dünkt es einem wohl der Mühe werth zu sein, auch eine Gleichung für die besprochene Ortsfläche aufzusuchen. Der vorige § war die geometrische Interpretation des Systems der beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{(ax')^2}{(a^2-\varphi)^2}+\frac{(by')^2}{(b^2-\varphi)^2}+\frac{(cz')^2}{(c^2-\varphi)^2}&=1,\\ \frac{(ax')^2}{(a^2-\varphi)^3}+\frac{(by')^2}{(b^2-\varphi)^3}+\frac{(cz')^2}{(c^2-\varphi)^3}&=1,\end{aligned}\right\}$$

welches für ein constantes φ die erzeugende Curve darstellt, und, wenn man φ daraus eliminiren könnte, eine einzige Gleichung zwischen den Coordinaten x', y', z' der Ortsfläche selbst geben würde. Wenn man aber in beiden Gleichungen die Nenner wegschafft, so werden beide in Beziehung auf φ vom *sechsten* Grade. Ohne Verlust der Symmetrie kann man auf folgende Art stufenweise den Grad der Gleichungen erniedrigen. Es sei der Kürze wegen

$$a^2-\varphi=A,\ b^2-\varphi=B,\ c^2-\varphi=C,$$

$$\mathfrak{A}=\Sigma B^3C^3(ax')^2,$$

$$\mathfrak{B}=A^2B^2C^2-\Sigma B^2C^2(ax')^2,$$

und dann setze man

$$ABC.\mathfrak{C}=\quad\mathfrak{A}\quad+(BC+CA+AB).\mathfrak{B},$$

$$ABC.\mathfrak{D}=-(A+B+C).\mathfrak{B}+(BC+CA+AB)\mathfrak{C},$$

so ergeben sich aus den ursprünglichen Gleichungen sechsten Crades, $\mathfrak{A}=0$, $\mathfrak{B}=0$, die beiden andern $\mathfrak{C}=0$, $\mathfrak{D}=0$, welche resp. vom fünften und vierten Grade sind. Wenn man nun

$$\omega=\frac{A+B+C}{3}$$

statt φ als zu eliminirende Grösse einführt, so sieht man bald, dass die Gleichungen in Beziehung auf ω sich auf den dritten Grad herabbringen lassen. Wenn nämlich der Kürze wegen

$$s=(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2+(a^2-b^2)^2,$$
$$p=(b^2+c^2-2a^2)(c^2+a^2-2b^2)(a^2+b^2-2c^2)$$

ist, und man setzt

$$\mathfrak{E}=-2\mathfrak{C}+\omega\mathfrak{D},$$
$$\omega\mathfrak{F}=4p\mathfrak{D}+9s\mathfrak{E},$$

so bekömmt man $\mathfrak{E}=0$, $\mathfrak{F}=0$, Gleichungen, die in Beziehung auf ω vom *dritten* Grad und in Beziehung auf $(ax')^2$, $(by')^2$, $(cz')^2$ *linear* sind. Nun seien überhaupt

$$\left.\begin{array}{r}\alpha\omega^3+\beta\omega^2+\gamma\omega+\delta=0\\ \alpha'\omega^3+\beta'\omega^2+\gamma'\omega+\delta'=0\end{array}\right\}$$

zwei cubische Gleichungen, aus denen ω eliminirt werden soll, und man setze der Kürze wegen

$$\begin{array}{r|l}\alpha\beta'-\alpha'\beta=\varepsilon & \gamma\delta'-\gamma'\delta=\varepsilon'\\ \alpha\gamma'-\alpha'\gamma=\zeta & \beta\delta'-\beta'\delta=\xi'\\ \alpha\delta'-\alpha'\delta=\eta & \beta\gamma'-\beta'\gamma=\vartheta\end{array}$$

so ergeben sich neben der identischen Gleichung

$$\varepsilon\varepsilon'-\zeta\zeta'+\eta\vartheta=0$$

die drei quadratischen Gleichungen

$$\begin{array}{ll}\varepsilon\omega^2+ & \zeta\omega+\eta=0,\\ \eta\omega^2+ & \zeta'\omega+\varepsilon'=0,\\ \zeta\omega^2+ & (\eta+\vartheta)\,\omega+\zeta'=0,\end{array}$$

aus welchen man ω^2, ω wie zwei von einander unabhängige Grössen eliminiren kann. Die Endgleichung wird daher in Bezug auf ε, ζ, ... von der dritten Dimension. Da nun in der vorliegenden Aufgabe α, β, ... sämmtlich lineare Functionen von (ax'^2), etc. sind, so werden ε, ζ, ... quadratische Functionen derselben Grössen sein; folglich muss die Endgleichung in Bezug auf die genannten Grössen vom *sechsten* Grade sein.

§. 4. Die Doppelcurve der Ortsfläche enthält die Punkte, in denen jeweilen eine erzeugende Curve des ersten Stadiums von einer solchen des zweiten Stadiums geschnitten wird. Da nun die erzeugende Curve durch den Werth von φ spezialisirt wird, so entsteht die Frage, durch welche Bedingungsgleichung zwei verschiedene Werthe von φ verknüpft sein müssen, damit die beiden zu denselben gehörenden erzeugenden Curven einander schneiden. Wenn φ, $\varphi_{,}$ die beiden verschiedenen Werthe bezeichnen, und wiederum $a^2-\varphi=A$, $a^2-\varphi_{,}=A_{,}$, etc. gesetzt wird, so ist

$$\Sigma A_{,}BC+\Sigma AB_{,}C_{,}=0$$

die verlangte Bedingungsgleichung, für welche es einen sehr einfachen Beweis giebt. Dieselbe giebt freilich, wenn φ als gegeben vorausgesetzt wird, für $\varphi_{,}$ eine quadratische Gleichung und somit im Allgemeinen zwei verschiedene Werthe; aber die Discussion zeigt, dass höchstens nur einer derselben einen reellen Durchschnitt giebt.

Wenn man

$$\tfrac{1}{2}\,\Sigma(BC_{,}+B_{,}C)=w$$

als einzige unabhängige Variable zur Darstellung der Doppelcurve einführt, so erhält man zur Bestimmung von φ oder $\varphi_{,}$ quadratische Gleichungen; und man kann die Coordinaten des laufenden Punkts der Doppelcurve als Functionen der einzigen Variablen w darstellen, welche nur Quadratwurzeln impliciren.

§. 5. Berechnung des von 6 confocalen Flächen zweiten Grades eingeschlossenen Körpers.

Wenn $a^2 > \psi > b^2 > \varphi > c^2 > v$ ist, so stellen die Gleichungen

$$\frac{x^2}{a^2 - v} + \frac{y^2}{b^2 - v} + \frac{z^2}{c^2 - v} = 1,$$
$$\frac{x^2}{a^2 - \varphi} + \frac{y^2}{b^2 - \varphi} - \frac{z^2}{\varphi - c^2} = 1,$$
$$\frac{x^2}{a^2 - \psi} - \frac{y^2}{\psi - b^2} - \frac{z^2}{\psi - c^2} = 1,$$

drei confocale Flächen der drei Gattungen dar, welche sich daher in einem Punkte schneiden, für dessen Coordnaten man durch Elimination die Ausdrücke

$$x^2 = \frac{(a^2 - v)(a^2 - \varphi)(a^2 - \psi)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}, \text{ etc.}$$

findet. Lässt man nun jede der drei Grössen v, φ, ψ zwischen zwei beliebigen Werthen variiren, so werden die sechs entsprechenden Gränzflächen einen Körper einschliessen, dessen Element ein rechteckiges Parallelepipedum ist. Für die Kanten desselben ergeben sich, wenn der Kürze wegen

$$\Upsilon = (a^2 - v)(b^2 - v)(c^2 - v),$$
$$\Phi = (a^2 - \varphi)(b^2 - \varphi)(\varphi - c^2),$$
$$\Psi = (a^2 - \psi)(\psi - b^2)(\psi - c^2)$$

gesetzt wird, die Ausdrücke

$$\frac{dv}{2}\sqrt{\frac{(\varphi - v)(\psi - v)}{\Upsilon}}, \text{ etc.}$$

Das Product derselben ist das körperliche Element. Für den Körper selbst ergiebt sich ein dreifaches Integral, welches auf den ersten Anblick ein Aggregat von dreifachen Producten elliptischer Integrale zu sein scheint. Es lässt sich aber in die Form

$$\frac{1}{12}\iiint\left\{-\frac{d\sqrt{\Upsilon}}{dv}\cdot\frac{\psi-\varphi}{\sqrt{\Phi\Psi}} -\frac{d\sqrt{\Phi}}{d\varphi}\cdot\frac{\psi-v}{\sqrt{\Upsilon\Psi}} -\frac{d\sqrt{\Psi}}{d\psi}\cdot\frac{\varphi-v}{\sqrt{\Upsilon\Phi}}\right\} dv\, d\varphi\, d\psi$$

bringen, welche nur binäre Producte elliptischer Integrale enthält.

Wenn man dieses Integral von $v=o$ bis $v=c^2$, von $\varphi=c^2$ bis $\varphi=b^2$, von $\psi=b^2$ bis $\psi=a^2$ ausdehnt, so muss sich der achte Theil des ganzen vom Ellipsoid umschlossenen Raums ergeben. Da nun dieser bekanntlich $=\frac{abc}{3}\cdot\frac{\pi}{2}$ ist, so resultirt hieraus ein bekannter Satz über vollständige elliptische Functionen der ersten und zweiten Art, deren Moduln zu einander Complemente sind.

§. 6. Quadratur der von Krümmungscurven eingeschlossenen Vierecke auf dem Ellipsoid.

Um ein festes Ellipsoid zu haben, setze ich in den Formeln des vorigen § $v=o$. Dann ist das Flächenelement das Product der beiden auf einander senkrechten Elemente der Curven grösster und kleinster Krümmung:

$$\frac{d\varphi}{2}\sqrt{\frac{\varphi(\psi-\varphi)}{\Phi}} \quad \text{und} \quad \frac{d\psi}{2}\sqrt{\frac{\psi(\psi-\varphi)}{\Psi}}.$$

In diesem Producte lassen sich die Variablen trennen, und es ergiebt sich

$$\int\frac{d\varphi}{2}\sqrt{\frac{\varphi}{\Phi}}\times\int\frac{\psi d\psi}{2}\sqrt{\frac{\psi}{\Psi}} -\int\frac{\varphi d\varphi}{2}\sqrt{\frac{\varphi}{\Phi}}\times\int\frac{d\psi}{2}\sqrt{\frac{\psi}{\Psi}}$$

als Inhalt des fraglichen Vierecks, durch binäre Producte elliptischer Integrale ausgedrückt. Lässt man φ von c^2 bis

b^2 und ψ von b^2 bis a^2 wachsen, so erhält man den achten Theil der Oberfläche des Ellipsoids.

§. 7. Rectification der Curve kleinster Krümmung, Lauf und Rectification der kürzesten Curve auf dem Ellipsoid.

Wenn $\varphi = \alpha$ die Gleichung einer bestimmten Curve kleinster Krümmung ist, so wird der Bogen derselben durch das Integral

$$\int \frac{d\psi}{2} \sqrt{\frac{\psi(\psi-\alpha)}{\psi}} = S$$

ausgedrückt. Wird das Radical des Zählers in den Nenner geschafft, so steigt hier ψ unter dem Wurzelzeichen auf die fünfte Potenz. S lässt sich also nur in den Gränzfällen, wo die Krümmungscurve in einen Hauptschnitt fällt, auf elliptische Integrale zurückführen. Wenn α zwischen c^2 und b^2 liegt, so wird für das reelle geschlossene Stück der Krümmungscurve der Werth von ψ zwischen den beiden Gränzen b^2 und a^2 oscilliren, während S fortwährend wächst. Die Natur der zwischen S und ψ bestehenden Verknüpfung wird am deutlichsten, wenn man

$$\psi = a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v$$

setzt; denn dadurch erhält man

$$S = \int \sqrt{\frac{\psi(\psi-\alpha)}{\psi-c^2}} \cdot dv,$$

wo das Radical stets einen positiven Werth behält und somit S und v ununterbrochen mit einander fortschreiten, während ψ oscillirt.

Für die Function S giebt es noch ein zweites reelles Gebiet, in dem sie sich bewegen kann, dem aber kein reelles Stück der Krümmungscurve ($\varphi = \alpha$) entspricht. Dasselbe befindet sich zwischen $\psi = c^2$ und $\psi = \alpha$. Da aber das Zeichen ψ bisher für die zwischen b^2 und a^2 liegenden

Werthe galt, so soll für diesen Fall dasselbe durch φ ersetzt, und die in diesem Gebiet befindliche Function S durch $S_{,}$ bezeichnet werden. Dann ist

$$\int \frac{d\varphi}{2} \sqrt{\frac{\varphi(\alpha-\varphi)}{\Phi}} = S_{,}.$$

Man erinnere sich wieder an das in §. 2 über jene Raute Gesagte, welche die Projectionen der Krümmungscurven auf die Ebene des zweiten Hauptschnitts einhüllt, und man wird sehen, dass die Projectionen der beiden Bogen S und $S_{,}$ auf der nämlichen Ellipse ($\varphi = \alpha$) liegen, jene innerhalb der elliptischen Hauptschnittsfigur, diese in einiger Entfernung ausserhalb derselben zwischen den Punkten, in denen die Projection ($\varphi = \alpha$) die Seiten der Raute berührt. Die Länge des Bogens $S_{,}$ und seine Projection auf den zweiten Hauptschnitt sind somit reell; nur seine Form und Lage ist imaginär. Dieses lässt sich auch daraus begreifen, weil seine Elemente wirklich kleiner sind als die Projectionen derselben. — Während $S_{,}$ ununterbrochen fortschreitet, oscillirt φ zwischen den Werthen c^2 und α. Man sieht dieses am deutlichsten, wenn man

$$\varphi = c^2 \cos^2 u + \alpha \sin^2 u$$

setzt. Denn dadurch wird

$$S_{,} = (\alpha - c^2) \int \sqrt{\frac{\varphi}{(a^2-\varphi)(b^2-\varphi)}} \cdot \cos^2 u \, du,$$

wo das noch stehen gebliebene Radical keines Durchgangs durch den Nullwerth fähig ist.

Aehnliche Betrachtungen sind über den Bogen der Curve grösster Krümmung zu machen.

Da die Elemente der Curven kleinster und grösster Krümmung überall zu einander senkrecht sind, so ergiebt sich für das Element des Bogens einer beliebigen Curve auf dem Ellipsoid sehr leicht der Ausdruck

$$ds = \frac{1}{2} \sqrt{(\psi-\varphi)\left(\frac{\varphi d\varphi^2}{\Phi} + \frac{\psi d\psi^2}{\Psi}\right)}$$

und zugleich, wenn w den Winkel bezeichnet, den dieses Element mit der Curve kleinster Krümmuug bildet,

$$\mathrm{tang}^2\,\mathrm{w} = \frac{\frac{\varphi d\varphi^2}{\Phi}}{\frac{\psi d\psi^2}{\Psi}}.$$

Wenn man, um die Gleichung der kürzesten Curve zu bekommen, das Integral, welches den Werth von s ausdrückt, nach φ und ψ zugleich variirt, so erhält man, $ds = \frac{1}{2}\sqrt{K}$ setzend, zwei identische Gleichungen, die man so schreiben kann, dass jede den Ausdruck dlogK zur linken Seite hat. Durch Subtraction beider erhält man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die in einer zur Integration passenden Form sich darbietet. Wenn man, um abzukürzen, den Winkel w einführt, so ist das erste Integral

$$\varphi\cos^2 w + \psi\sin^2 w = \alpha,$$

wo α die arbiträre Integrationsconstante bezeichnet, welche zwischen den Gränzen c^2 und α genommen werden muss. Die letzte Gleichung kann auch so geschrieben werden:

$$\mathrm{tang}\,\mathrm{w} = \sqrt{\frac{\alpha-\varphi}{\psi-\alpha}},$$

und liefert dann die Differentialgleichung (erster Ordnung) der kürzesten Curve, nämlich

$$\sqrt{\frac{\varphi}{(\alpha-\varphi)\Phi}}\cdot d\varphi - \sqrt{\frac{\psi}{(\psi-\alpha)\Psi}}\cdot d\psi = 0,$$

worin die Variabeln gesondert sind. Liegt die Constante α zwischen c^2 und b^2, so kann sich φ nur zwischen den Gränzen c^2 und α bewegen, hingegen ψ hat seinen vollen Spielraum von b^2 bis a^2. In diesem Falle kann die kürzeste Curve die beiden Curven *kleinster* Krümmung, welche durch $\varphi = \alpha$ bestimmt sind, nicht überschreiten; sie wird vielmehr dieselben bald diesseits bald jenseits des ersten Hauptschnitts berühren und im Allgemeinen unzählige Male um das Ellipsoid herumgehen, ohne in sich selbst zurückzukehren. — Im andern Falle, wenn die Constante α zwischen b^2 und a^2 sich befindet, so ist die Variable ψ zwischen α und a^2 eingeschränkt, während die andere φ ihren vollen Spielraum hat. Alsdann muss die kürzeste Curve die beiden Curven *grösster* Krümmung, welche durch die Gleichung $\psi = \alpha$ bestimmt sind, berühren und zwischen denselben in der Richtung des dritten Hauptschnitts um das Ellipsoid herumgehen. — In dem besondern Falle, wo $\alpha = b^2$ ist, enthält die Gleichung der kürzesten Curve elliptische Integrale der dritten Art. Die Curve geht alsdann durch zwei entgegengesetzte Kugelkrümmungspunkte des Ellipsoids, wird aber bei jedem wiederholten Durchgang durch einen derselben ihre Richtung geändert haben.

Ich will jetzt für die Gleichnng der kürzesten Curve einen kurzen synthetischen Beweis geben, indem ich mich auf den Fall, wo α zwischen c^2 und b^2 liegt, beschränke. Wenn man nämlich wieder auf die Functionen S und $S_{,}$ zu Anfang dieses § zurückkömmt, so lässt sich das Element des Bogens einer beliebigen Curve auf dem Ellipsoid auch so ausdrücken:

$$ds = \sqrt{\left((dS + dS_{,})^2 + 4(\alpha - \varphi)(\psi - \alpha)\left[d\,\frac{d(S + S_{,})}{d\alpha}\right]^2\right)}.$$

Man denke sich nun zwei feste Punkte auf dem Ellipsoid, und zwischen diesen eine beliebige Curve gezogen, so wird das Integral des vorliegenden Ausdrucks, zwischen den entsprechenden Gränzwerthen von φ und ψ genommen, die Länge dieser Curve richtig geben, welchen besondern Werth auch α haben mag, und zwar immer grösser als $S + S_{,}$, wenn dieser Ausdruck zwischen denselben Gränzen genommen wird. Hieraus ergiebt sich sogleich

$$\frac{d(S + S_{,})}{d\alpha} = \text{const.}$$

als Gleichung der kürzesten Curve auf dem Ellipsoid, in welcher die beiden arbiträren Constanten so zu bestimmen sind, dass die Curve durch die beiden festen Punkte geht. Dann stellt

$$S + S_{,}$$

die Länge der kürzesten Curve zwischen den beiden festen Punkten dar. Dieser Beweis wird nur dadurch möglich, dass die Variabeln in den beiden Integralen S und $S_{,}$ getrennt sind. Denn sonst kämen nicht nur die Werthe von φ und ψ, welche für die beiden festen Punkte stattfinden, sondern auch die zwischenliegenden Paare von Werthen in Anschlag, deren Verknüpfung vom Lauf der jeweiligen Curve abhängt, welche die beiden festen Punkte verbindet.

Verzeichniss einiger für die Bibliothek der Schweiz. Naturf. Gesellschaft eingegangenen Geschenke.

(Fortsetzung zu Nr. 73 und 74.)

Von Herrn Professor Wydler in Bern.

1) Orfila, traité des poisons ou toxicologie générale. 3. édit. 2 Tom. Paris 1827. 8.

2) Medicus, kritische Bemerkungen über Gegenstände aus dem Pflanzenreiche. I. 2. Mannheim 1793. 8.

Von Herrn Hamberger in Bern.

Brambilla, Geschichte der von den berühmtesten Männern Italiens gemachten Entdeckungen in der Physik, Medicin, Anatomie und Chirurgie. Aus dem Italienischen von Helfenstein. I. Wien 1789. 4. (Complet.)

Von Herrn Professor Fischer in Bern.

Der Schweizerischen Gesellschaft in Bern Sammlungen von landwirthschaftlichen Dingen. 32 Bände. 8.