Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern

Band: - (1849)

Heft: 160-161

Artikel: Note zur Methode der kleinsten Quadrate

Autor: Wolf, R.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-318301

R. Wolf, Note zur Methode der kleinsten Quadrate.

(Vorgelegt am 21. Juli 1849.)

Obschon aus mehreren Schriften hervorzugehen scheint, dass die Vermittlung, welche die Geometrie bietet, um auf leichte Weise von dem Prinzipe des arithmetischen Mittels auf das Prinzip der kleinsten Quadrate zu kommen, nicht unbekannt geblieben ist, so habe ich doch nirgends eine förmliche Darstellung derselben gefunden, und glaube daher, dass einige Worte über dieselbe nicht ohne Interesse sind.

Sind $x_1\ y_1\ z_1,\ x_2\ y_2\ z_2\ \cdots$ irgend welche auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem bezogene Punkte im Raume mit den zugeordneten Constanten $m_1\ m_2 \cdots$, und ist

$$x = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m} \qquad y = \frac{\Sigma my}{\Sigma m} \qquad z = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m}$$

ein Punkt der Constanten Σm, so findet sich bekanntlich, wenn man die Distanzen $d_1, d_2 \cdots$ der erstern Punkte und die Distanz d des leztern Punktes von irgend einer Ebene berechnet, sofort dass auch

$$d = \frac{\Sigma md}{\Sigma m}$$

oder es hat der letztere Punkt von *jeder* Ebene eine mittlere Entfernung, und heisst darum auch *Punkt der mittlern Entfernungen*, gewöhnlicher wegen seiner mechanischen Bedeutung *Schwerpunkt* des Systems der erstern Punkte. Bezeichnen ferner $x+\alpha$, $y+\beta$, $z+\gamma$ einen vom Schwerpunkte um r entfernten Punkt, $\varrho_1, \varrho_2 \cdots$ die Distanzen dieses Punktes von den Punkten des Systemes und $r_1\ r_2 \cdots$ die Distanzen der letztern vom Schwerpunkte, so findet sich durch eine leichte Rechnung, dass

$$\Sigma m\varrho^2 = \Sigma mr^2 + r^2\Sigma m$$

und die Summe der je mit der entsprechenden Constanten multiplizirten Quadrate der Abstände der Punkte des Systems ist somit für den Schwerpunkt ein Minimum, — für jeden von ihm equidistanten Punkt aber gleich gross.

Denkt man sich aber die Werthe, welche einer Grösse durch verschiedene Beobachtungen gegeben werden, auch im Raume ausgebreitet, so entspricht offenbar der wahrscheinlichste Werth für dieselbe, d. h. der Ort, welcher dem arithmetischen Mittel der Beobachtungswerthe zukömmt, dem frühern Schwerpunkte. Die Entfernungen der Punkte von dem Schwerpunkte werden nun durch die Abweichungen der Beobachtungswerthe von dem Mittel ersetzt, — die Constanten sind sämmtlich gleich 1, wenn den Beobachtungen gleiche Güte zugeschrieben werden muss, sonst sind es die Factoren, welche sie auf gleiche Güte reduciren, die sogenannten *Gewichte*. *Es muss also* nach obigem Satze *für den wahrscheinlichsten Werth die Summe der mit den Constanten multiplizirten Fehlerquadrate ein Minimum sein*, — und dieser Satz bildet das Fundament der Methode der kleinsten Quadrate.

Bei dieser Gelegenheit sei mir noch die Bemerkung erlaubt, dass nach meinem Dafürhalten jeder Versuch die Zulässigkeit des arithmetischen Mittels zu begründen, von vorn herein überflüssig erscheint. Ich glaube, dass nicht leicht ein Princip von so überzeugender Kraft wie dieses ist, ja dass es überhaupt kaum auf etwas Einfacheres und Ersichtlicheres (und darin soll doch am Ende die Begründung bestehen) zurückgeführt werden kann. Das Einzige was bei der ersten Aufstellung dieses Princips geschehen soll, ist darauf aufmerksam zu machen, dass es auf der Annahme beruht, die positiven und negativen Fehler seien in gleichem Maasse vorhanden, — dass es daher nur Anwendung finden kann, wenn einerseits die durch dasselbe zu eliminirenden Fehler wirklich nach beiden Seiten hin gehen können, und wenn anderseits die Anzahl der vorliegenden Werthe gross genug ist, um nach den Principien der Wahrscheinlichkeit hoffen zu dürfen, dass eine mehr oder weniger symmetrische Fehlermasse durch dieselben repräsentirt werde.

Jakob Herrmann *) *an Bourguet, Frankfurt an der Oder,* 14. *Mai* 1716: Pour ce qui est de la dispute de Mr. Leibnitz sur l'invention du calcul différentiel je le plains d'avoir à faire à un homme tel que M. Keil qui l'attaque toujours de la maniere du monde la moins obligeante, et presque toujours par des preuves de fait. M. Leibnitz a toute la raison du monde de ne rien répondre à ce Professeur anglais: mais je souhaiterais beaucoup qu'il eut un peu plus de soin de sa réputation et qu'il prisse la peine de refuter ou de faire refuter les faits qu'on allègue contre lui. Car franchement je ne trouve rien de solide a répondre aux preuves de fait tirées de vieilles lettres que Messieurs Leibnitz, Collins et Oldenbourg se sont écrit mutuellement sur les suites infinies et d'autres points sur lesquels la dispute roule, à moins que de s'inscrire en faux contre l'autenticité de ces lettres, autrement j'aurais déjà pris la plume pour la défense de M. de Leibnitz. Mr. Bernoulli le Prof. avoit entrepris de prouver que M. Newton n'entendoit pas la nature des secondes différences, mais il a été relancé par le même Keil de la bonne sorte, ainsi que vous le pouvez bien avoir vu dans le journal littéraire de la Haye. La même chose me pourrait arriver si je n'apporterais pas de bonnes preuves. Dans le dernier ou VIIme tome de ce journal il y a un long extrait du *Commercium Epistolicum* publié par ordre de la Société Royale de Londres pour justifier les prétentions de M. Newton, ou M. Leibnitz est poussé bien vivement. Je crois que je serai aussi attaqué par Keil, car il annonce dans ce même tome du Journal qu'il a vu mon livre et qu'il pourrait bien envoyer dans peu quelques remarques sur ce livre. Je ne seais pas quelle raison il peut avoir de s'accrocher aussi à moi. Si ce n'est peut-être pour me punir du crime que j'ai commis d'avoir osé aller plus loin que Son M. Newton. En effet, je me reconnais coupable de ce crime, car, en outre,

*) Vergleiche über Herrmann Nr. 59 der Mittheilungen (1846, pag. 21.)

que j'ai pris toujours un tour nouveau dans mes démonstrations, j'ai donné partout des Théorèmes infiniment plus généraux que ceux que M. Newton nous donne dans ses Principes de Philosophie et si je ne me trompe il y a dans mon livre tels problêmes que s'ils avaient été proposé même à M. Newton il aurait peut-être été embarrassé d'entrouver la solution, même sur la matière des forces centrales qu'il a pourtant tant méditée, par exemple le problème pour ces forces lors que leurs directions n'aboutissent pas à un même point, mais qu'elles touchent une courbe quelconque etc. (R. Wolf.)

Verzeichniss einiger für die Bibliothek der Schweiz. Naturf. Gesellschaft eingegangenen Geschenke.

Von Herrn Wolf in Bern.

4. Drobisch, Grundzüge der Lehre von den höhern numerischen Gleichungen. Leipzig 1834. 8⁰.
5. Steffens, Polemische Blätter zur Beförderung der spekulativen Physik. 1tes und 2tes Heft. Breslau 1835. 8⁰.
6. Girtanner, Anfangsgründe der antiphlogistischen Chemie. Berlin 1795. 8⁰.
7. Euler, Opuscula analytica. Tom. 1. Petropoli 1783. 4⁰.
8. Gerhardt, die Entdeckung der Differentialrechnung durch Leibnitz. Halle 1848. 4.
9. Gräffe, die Statik und Mechanik fester Körper für seine Schüler entworfen (Autographirt).
10. Wiegand, der geodätische Messapparat und sein Gebrauch. Halle 1848. 8.

Von den Herren Verfassern.

Schweizerische Zeitschrift für Medicin, Chirurgie und Geburtshülfe. Jahrgang 1849, erstes Heft. Zürich 1849. 8⁰.

Von dem naturhistorischen Verein der preussischen Rheinlande.

Verhandlungen, 5ter Jahrgang. Bonn 1848. 8⁰.
