Nr. 156—157.

R. Wolf, Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit.

[Vorgelegt den 2. Juni 1849.]

Unter mathematischer Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen eines Ereignisses versteht man bekanntlich das Verhältniss der Anzahl der diesem Ereignisse günstigen, d. h. dasselbe wirklich herbeiführenden Fälle zu der Anzahl aller möglichen Fälle, vorausgesetzt, dass alle Fälle gleich möglich sind. Wenn aber so für ein Ereigniss z. B. die Wahrscheinlichkeit $^2/_5$ gefunden wird, so soll damit durchaus nicht behauptet werden, dass unter 5 Fällen das Ereigniss unfehlbar 2mal eintreffen müsse, — sondern nur, dass bei einer ins Unendliche wachsenden Wiederholung die verhältnissmässige Anzahl des Eintreffens des Ereignisses sich der Zahl $^2/_5$ als Grenze nähere. Es scheint nun für die practische Anwendung, wo alle Wiederholung ihr bestimmtes Ziel finden muss, nicht unwichtig zu fragen, wie weit sie zu führen sei, um wenigstens eine Annäherung an diese Grenze zu erhalten. Anderseits gibt es Erscheinungen, für welche die Wahrscheinlichkeit auf theoretischem Wege gar nicht bestimmt werden kann, sondern der Erfahrung entnommen werden muss, und es entsteht auch da wieder die Frage: wie gross muss die Anzahl der herbeigeführten Erscheinungen sein, um daraus einen wenigstens angenähert richtigen Schluss zu machen? Fürs Dritte endlich sind alle Versuche, die wir machen können, in Folge der Unvollkommenheit unserer Sinne und Instrumente ebenfalls unvollkommen, und es kann die Frage gestellt werden: in wiefern sich diese Unvollkommenheit bei Vergleichung der auf theoretischem und practischem Wege gefundenen Wahrscheinlichkeit zeige, ja aus derselben bestimmt werden könne? Um etwas Licht über diese Fragen zu verbreiten, habe ich verschiedene Versuchsreihen angestellt, über die im folgenden Rechenschaft abgelegt werden soll.

Erste Versuchsreihe.

Bei der ersten Versuchsreihe stellte ich mit zwei ganz gewöhnlichen (absichtlich nicht mit zwei zu diesem Zwecke besonders sorgfältig construirten, und auch nicht mit zwei ganz schlechten oder gar gefälschten) [1] Würfeln 100 Versuche an, — von denen jeder darin bestand, dass ich so lange würfelte, bis jeder mögliche Wurf wenigstens Ein Mal zum Vorschein gekommen war, und mir jeden Wurf notirte. Die folgende Tafel stellt die aus dem ersten Versuche mit 118 Würfen, aus den 10 ersten Versuchen mit 948 Würfen und aus sämmtlichen Versuchen mit 10,223 Würfen erhaltenen Wahrscheinlichkeiten mit den theoretischen Zahlen zusammen:

[1]) Es ist mir von mehreren Freunden, die von meinen Versuchen hörten und sich dafür interessirten, die Bemerkung gemacht worden, dass ich möglichst vollkommene Würfel dazu hätte anwenden sollen. Ich erwiderte ihnen aber immer, dass dieses wohl der Fall sein müsste, wenn ich mit den Versuchen die Richtigkeit der Grundsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu prüfen beabsichtigte — gerade aber nicht sein dürfe, wenn die oben angegebenen Zwecke erreicht werden sollen.

Wurf.	Anzahl in den Versuchen.			Erfahrungswahrscheinlichkeit aus den Versuchen.			Mathematische Wahrscheinlichkeit.
	1	1—10	1—100	1	1—10	1—100	
1·1	1	19	219	0,0085	0,0200	0,0214	0,0278
1·2	4	50	505	339	527	494	556
1·3	12	53	479	1015	559	469	556
1·4	10	53	515	847	559	504	556
1·5	2	47	511	169	496	500	556
1·6	5	50	446	424	527	436	556
2·2	3	29	318	254	306	311	278
2·3	4	61	590	339	643	577	556
2·4	7	58	615	593	612	602	556
2·5	16	71	594	1356	749	581	556
2·6	13	65	577	1102	686	564	556
3·3	1	14	272	85	148	266	278
3·4	6	52	618	508	548	604	556
3·5	2	41	640	169	432	626	556
3·6	4	42	541	339	443	529	556
4·4	7	25	325	593	264	318	278
4·5	7	57	701	593	601	686	556
4·6	4	67	607	339	707	594	556
5·5	3	17	331	254	179	324	278
5·6	5	53	553	424	559	541	556
6·6	2	24	266	169	253	260	278
2	1	19	219	0,0085	0,0200	0,0214	0,0278
3	4	50	505	339	527	494	556
4	15	82	797	1271	865	780	833
5	14	114	1105	1186	1203	1081	1111
6	10	119	1398	847	1255	1367	1389
7	27	173	1658	2288	1825	1622	1667
8	22	131	1542	1864	1381	1508	1389
9	11	99	1242	932	1044	1215	1111
10	7	84	938	593	886	917	833
11	5	53	553	424	559	541	556
12	2	24	266	169	253	260	278
paar	17	128	1731	0,1441	0,1350	0,1693	0,1667
unpaar	101	820	8492	0,8559	0,8650	0,8307	0,8333
gerade	57	459	5160	0,4831	0,4842	0,5047	0,5000
ungerade	61	489	5063	0,5169	0,5158	0,4953	0,5000

Diese Tafel zeigt deutlich, wie die aus einer kleinen Anzahl von Versuchen geschlossene Wahrscheinlichkeit noch wenig Sicherheit darbietet, wie sogar noch für eine weniger wahrscheinliche Erscheinung eine grössere Wahrscheinlichkeit erhalten werden kann, — wie dagegen bei einer grössern Anzahl von Versuchen die Sicherheit ungemein zunimmt und jene Abnormitäten verschwinden, — wie endlich eine noch grössere Steigerung die Sicherheit nicht in demselben Maasse vergrössert, indem nun die constanten Unvollkommenheiten des Versuches allmälig dem noch übrig bleibenden Fehler gewachsen werden. Sie zeigt ferner, wie der 2te und 3te Fall je um so schneller eintritt, je grösser die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses ist. Manches Andere, wie z. B. dass 102,23 die mittlere Anzahl der zur Vollendung eines Versuches nöthigen Würfe war, soll bei den späteren Versuchsreihen einlässlich besprochen werden.

Zweite Versuchsreihe.

Haben mehrere Ereignisse die Wahrscheinlichkeiten $w_1\ w_2\ w_3 \ldots$, so kann man nach der Wahrscheinlichkeit fragen, dass bei zweifacher Herbeiführung entweder zuerst das erste oder dann doch nachher das zweite Ereigniss eintreffe. Die Wahrscheinlichkeit, dass das erste Ereigniss eintreffe, ist w_1, — die dass es nicht eintreffe $(1-w_1)$, — also die, dass das erste nicht, wohl aber das zweite eintreffe $(1-w_1)\ w_2$. Es ist daher die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$w=w_1+(1-w_1)w_2=w_1+w_2-w_1w_2$$

Wird auch noch in Frage gezogen, wie wahrscheinlich es sei, dass wenigstens in 3ter Linie das dritte Ereigniss eintreffe, so hat man auf gleiche Weise

$$w = [w_1 + w_2 - w_1 w_2] + w_3 - (w_1 + w_2 - w_1 w_2) w_3 = w_1 + w_2 + w_3 - [w_1 w_2 + w_1 w_3 + w_2 w_3] + w_1 w_2 w_3$$

und sofort nach dem bereits leicht ersichtlichen Gesetze für n Ereignisse

$$w = \overset{1}{C}(w_1 \ldots w_n) - \overset{2}{C}(w_1 \ldots w_n) + \overset{3}{C}(w_1 \ldots w_n) - \ldots + (-1)^{n+1} \overset{n}{C}(w_1 \ldots w_n)$$

Werden die Grössen $w_1 = w_2 = w_3 = \ldots = w_n$, so erhält man hieraus

$$W = \binom{n}{1} w - \binom{n}{2} w^2 + \binom{n}{3} w^3 - \ldots + (-1)^{n+1} \binom{n}{n} w^n = 1 - (1-w)^n$$

wo nun W die Wahrscheinlichkeit vorstellt, dass unter n Versuchen ein Ereigniss der Wahrscheinlichkeit w wenigstens Ein Mal eintreffe.

Auch die Werthe, welche diese letztere Formel in einzelnen Fällen gibt, wurden durch eine Reihe von Versuchen mit zwei Würfeln mit der Erfahrungswahrscheinlichkeit verglichen, und hieraus ergab sich folgende Zusammenstellung:

Die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten unpaaren Wurf mindestens Ein Mal zu werfen, ist

	nach Versuch					nach der Formel
	1	1—4	1—10	1—40	1—100	
in 10 Würfen	0,000	0,250	0,400	0,375	0,400	0,435
in 40 Würfen	1,000	1,000	1,000	0,950	0,930	0,898
in 100 Würfen	1,000	1,000	1,000	1,000	0,990	0,997

(Fortsetzung folgt.)