

**Zeitschrift:** Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern  
**Band:** - (1851)  
**Heft:** 197-199

**Artikel:** Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit. Fünfte Versuchsreihe  
**Autor:** Wolf, R.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-318333>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 06.10.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

## Nr. 197 bis 199.

---

### **R. Wolf, Versuche zur Vergleichung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit.**

#### *Fünfte Versuchsreihe.*

[Vorgelegt am 21. December 1850.]

Die fünfte Versuchsreihe entsprach durchaus der ersten, in Nr. 156 besprochenen; nur bestand sie einerseits aus 1000, anstatt aus 100 Versuchen sämtliche Würfe zu erschöpfen, und andererseits wurden die hiezu nöthigen 97,899 Würfe noch bis auf 100,000 vermehrt, um für einzelne Resultate eine leichtere Uebersicht zu erhalten.

Zunächst wurde diesen Versuchen entnommen, wie sich die einzelnen Resultate in Beziehung auf das Eröffnen und Schliessen der Versuche verhalten. Bei den 1000 Versuchen erschien

Wurf	1·1	als erster	Wurf	25mal,	als letzter	139mal
—	2·2	—	—	30—	—	84—
—	3·3	—	—	21—	—	181—
—	4·4	—	—	31—	—	97—
—	5·5	—	—	22—	—	101—
—	6·6	—	—	26—	—	118—
				<hr/>		<hr/>
Paar	—	—	—	155—	—	720—

(Bern. Mitth. Februar 1851.)

Wurf	1.2	als erster	Wurf	56mal,	als letzter	14mal
—	1.3	—	—	46—	—	32—
—	1.4	—	—	55—	—	24—
—	1.5	—	—	58—	—	16—
—	1.6	—	—	53—	—	26—
—	2.3	—	—	52—	—	14—
—	2.4	—	—	60—	—	7—
—	2.5	—	—	59—	—	11—
—	2.6	—	—	66—	—	16—
—	3.4	—	—	56—	—	20—
—	3.5	—	—	51—	—	29—
—	3.6	—	—	46—	—	18—
—	4.5	—	—	58—	—	14—
—	4.6	—	—	64—	—	19—
—	5.6	—	—	65—	—	20—
Unpaar	—	—	—	<u>845—</u>	—	<u>280—</u>

Es erschienen somit die unpaaren Würfe nahe  $5=30:6$ mal so viel als erste, — die paaren Würfe nahe  $2\frac{1}{2}=15:6$ mal so viel als letzte Würfe, als je die Andern.

In zweiter Linie wurden den 1000 Versuchen die mittlern Anzahlen von Würfeln entnommen, die nöthig sind, um jeden paaren, oder jeden unpaaren, oder jeden Wurf mindestens Ein Mal zu werfen.

Nennt man diese Zahlen der Reihe nach P, Q, R, so ergab sich

$$\begin{aligned}
 1000 P = & 2 \cdot 19 + 20 + 2 \cdot 21 + 5 \cdot 22 + 24 + 4 \cdot 25 + 2 \cdot 26 + 4 \cdot 28 + \\
 & 2 \cdot 29 + 3 \cdot 30 + 3 \cdot 31 + 2 \cdot 32 + 10 \cdot 33 + 4 \cdot 34 + 35 + \\
 & 2 \cdot 36 + 10 \cdot 37 + 4 \cdot 38 + 4 \cdot 39 + 10 \cdot 40 + 5 \cdot 41 + 7 \cdot 42 + \\
 & 12 \cdot 43 + 9 \cdot 44 + 10 \cdot 45 + 7 \cdot 46 + 11 \cdot 47 + 7 \cdot 48 + 6 \cdot 49 + \\
 & 8 \cdot 50 + 12 \cdot 51 + 4 \cdot 52 + 11 \cdot 53 + 21 \cdot 54 + 6 \cdot 55 + 13 \cdot 56 + \\
 & 11 \cdot 57 + 17 \cdot 58 + 9 \cdot 59 + 6 \cdot 60 + 14 \cdot 61 + 15 \cdot 62 + 13 \cdot 63 + \\
 & 8 \cdot 64 + 6 \cdot 65 + 19 \cdot 66 + 12 \cdot 67 + 6 \cdot 68 + 7 \cdot 69 + 12 \cdot 70 + \\
 & 14 \cdot 71 + 15 \cdot 72 + 11 \cdot 73 + 9 \cdot 74 + 6 \cdot 75 + 10 \cdot 76 + 16 \cdot 77 +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &13.78 + 8.79 + 12.80 + 12.81 + 6.82 + 9.83 + 15.84 + \\ &9.85 + 15.86 + 6.87 + 11.88 + 5.89 + 6.90 + 6.91 + \\ &9.92 + 11.93 + 6.94 + 8.95 + 9.96 + 11.97 + 6.98 + \\ &10.99 + 9.100 + 8.101 + 6.102 + 7.103 + 6.104 + \\ &5.105 + 9.106 + 8.107 + 7.108 + 4.109 + 7.110 + \\ &4.111 + 6.112 + 5.113 + 7.114 + 6.115 + 2.116 + \\ &6.117 + 8.118 + 8.119 + 3.120 + 4.121 + 5.122 + \\ &3.123 + 2.124 + 125 + 4.126 + 7.127 + 4.128 + \\ &6.129 + 5.131 + 2.132 + 3.133 + 134 + 3.135 + \\ &7.136 + 3.137 + 138 + 139 + 140 + 2.141 + 7.142 + \\ &2.144 + 145 + 2.146 + 2.147 + 4.148 + 4.149 + \\ &5.150 + 5.151 + 2.152 + 3.153 + 3.154 + 2.155 + \\ &3.156 + 3.157 + 158 + 6.159 + 160 + 5.161 + 2.162 + \\ &3.163 + 4.165 + 2.166 + 167 + 168 + 2.170 + 2.171 + \\ &173 + 3.175 + 3.176 + 4.177 + 4.178 + 179 + 3.180 + \\ &182 + 184 + 186 + 2.188 + 189 + 190 + 192 + 196 + \\ &197 + 198 + 199 + 2.200 + 202 + 2.203 + 3.204 + \\ &2.208 + 2.209 + 2.214 + 218 + 223 + 225 + 227 + \\ &231 + 232 + 233 + 250 + 254 + 255 + 259 + 288 + 302 + \\ &304 + 323 + 331 + 341 \end{aligned}$$

$$= 91265$$

$$\begin{aligned} 1000 Q = &3.22 + 2.23 + 24 + 2.25 + 4.26 + 27 + 7.28 + 4.29 + \\ &4.30 + 6.31 + 4.32 + 9.33 + 15.34 + 20.35 + 10.36 + \\ &12.37 + 18.38 + 15.39 + 28.40 + 25.41 + 18.42 + \\ &14.43 + 16.44 + 19.45 + 27.46 + 31.47 + 24.48 + \\ &20.49 + 28.50 + 32.51 + 20.52 + 23.53 + 16.54 + \\ &24.55 + 19.56 + 23.57 + 21.58 + 15.59 + 21.60 + \\ &13.61 + 14.62 + 20.63 + 19.64 + 18.65 + 20.66 + \\ &11.67 + 11.68 + 5.69 + 23.70 + 12.71 + 13.72 + \\ &13.73 + 10.74 + 5.75 + 16.76 + 10.77 + 8.78 + 10.79 + \\ &8.80 + 7.81 + 4.82 + 10.83 + 7.84 + 7.85 + 6.86 + \\ &5.87 + 7.88 + 5.89 + 5.90 + 7.91 + 3.92 + 5.93 + \\ &3.94 + 2.95 + 3.96 + 6.97 + 2.98 + 3.99 + 100 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 3 \cdot 101 + 103 + 2 \cdot 104 + 2 \cdot 106 + 3 \cdot 107 + 2 \cdot 108 + 110 + \\ & 4 \cdot 111 + 2 \cdot 113 + 2 \cdot 114 + 3 \cdot 115 + 116 + 117 + 120 + \\ & 122 + 123 + 128 + 132 + 2 \cdot 133 + 137 + 143 + 147 + \\ & 157 + 2 \cdot 169 + 171 + 219 \\ & = 59543 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1000 R = & 34 + 35 + 38 + 4 \cdot 39 + 40 + 2 \cdot 41 + 2 \cdot 43 + 3 \cdot 44 + 5 \cdot 45 + \\ & 3 \cdot 46 + 3 \cdot 47 + 6 \cdot 48 + 2 \cdot 49 + 6 \cdot 50 + 8 \cdot 51 + 7 \cdot 52 + \\ & 10 \cdot 53 + 9 \cdot 54 + 3 \cdot 55 + 14 \cdot 56 + 9 \cdot 57 + 17 \cdot 58 + 2 \cdot 59 + \\ & 11 \cdot 60 + 12 \cdot 61 + 15 \cdot 62 + 15 \cdot 63 + 11 \cdot 64 + 13 \cdot 65 + \\ & 24 \cdot 66 + 14 \cdot 67 + 11 \cdot 68 + 7 \cdot 69 + 20 \cdot 70 + 16 \cdot 71 + \\ & 19 \cdot 72 + 15 \cdot 73 + 14 \cdot 74 + 8 \cdot 75 + 18 \cdot 76 + 18 \cdot 77 + \\ & 14 \cdot 78 + 9 \cdot 79 + 17 \cdot 80 + 16 \cdot 81 + 5 \cdot 82 + 12 \cdot 83 + 18 \cdot 84 + \\ & 15 \cdot 85 + 17 \cdot 86 + 7 \cdot 87 + 17 \cdot 88 + 7 \cdot 89 + 8 \cdot 90 + 12 \cdot 91 + \\ & 11 \cdot 92 + 16 \cdot 93 + 7 \cdot 94 + 10 \cdot 95 + 10 \cdot 96 + 14 \cdot 97 + 8 \cdot 98 + \\ & 9 \cdot 99 + 9 \cdot 100 + 9 \cdot 101 + 6 \cdot 102 + 7 \cdot 103 + 6 \cdot 104 + 5 \cdot 105 + \\ & 10 \cdot 106 + 10 \cdot 107 + 8 \cdot 108 + 4 \cdot 109 + 7 \cdot 110 + 7 \cdot 111 + \\ & 6 \cdot 112 + 7 \cdot 113 + 9 \cdot 114 + 8 \cdot 115 + 3 \cdot 116 + 6 \cdot 117 + \\ & 8 \cdot 118 + 8 \cdot 119 + 3 \cdot 120 + 4 \cdot 121 + 6 \cdot 122 + 3 \cdot 123 + \\ & 2 \cdot 124 + 125 + 4 \cdot 126 + 7 \cdot 127 + 5 \cdot 128 + 5 \cdot 129 + 5 \cdot 131 + \\ & 3 \cdot 132 + 5 \cdot 133 + 134 + 3 \cdot 135 + 7 \cdot 136 + 4 \cdot 137 + 138 + \\ & 139 + 140 + 2 \cdot 141 + 7 \cdot 142 + 143 + 2 \cdot 144 + 145 + \\ & 2 \cdot 146 + 3 \cdot 147 + 4 \cdot 148 + 3 \cdot 149 + 5 \cdot 150 + 5 \cdot 151 + \\ & 2 \cdot 152 + 3 \cdot 153 + 3 \cdot 154 + 2 \cdot 155 + 3 \cdot 156 + 4 \cdot 157 + 158 + \\ & 6 \cdot 159 + 160 + 5 \cdot 161 + 2 \cdot 162 + 3 \cdot 163 + 4 \cdot 165 + 2 \cdot 166 + \\ & 167 + 168 + 2 \cdot 169 + 2 \cdot 170 + 2 \cdot 171 + 173 + 3 \cdot 175 + \\ & 3 \cdot 176 + 4 \cdot 177 + 4 \cdot 178 + 179 + 3 \cdot 180 + 182 + 184 + \\ & 186 + 2 \cdot 188 + 189 + 190 + 192 + 196 + 197 + 198 + \\ & 199 + 2 \cdot 200 + 202 + 2 \cdot 203 + 3 \cdot 204 + 2 \cdot 208 + 2 \cdot 209 + \\ & 2 \cdot 214 + 218 + 219 + 223 + 225 + 227 + 231 + 232 + \\ & 233 + 250 + 254 + 255 + 259 + 288 + 302 + 304 + 323 + \\ & 331 + 341 \\ & = 97899 \end{aligned}$$

Bedenkt man, dass die Anzahl P der paaren Würfe zwischen 6 und  $\infty$ , die Anzahl Q der unpaaren Würfe

zwischen 15 und  $\infty$ , und die Anzahl R aller Würfe zwischen 21 und  $\infty$  schwanken kann, so wird man sich über die engen Grenzen wundern, zwischen welchen sich die Versuche bewegten. Bei P findet sich keine Zahl unter 19, keine über 341, — bei Q keine unter 22, keine über 219, — bei R keine unter 34, keine über 341, und bei allen drei Zahlen ziehen sich diese Grenzen, namentlich von oben her, ungemein zusammen, wenn man nur auf die häufig wiederkehrenden Fälle Rücksicht nimmt. Ueberhaupt zeigen solche Versuche schlagend, wie sogar der sogenannte Zufall die Extreme scheut. Unter 1000 solchen Versuchen dürfte man z. B. erwarten, bald alle paaren Würfe vor dem ersten unpaaren, bald alle unpaaren Würfe vor dem ersten paaren, etc. zu erhalten; aber jede solche ausserordentliche Erscheinung zeigte sich entweder gar nie oder doch ungemein selten, obschon ich darauf aufmerksam war. Dass beim 161sten und beim 641sten Versuche die unpaaren Würfe vollständig erschienen, ehe die paaren an die Reihe kamen, ist das Einzige, was ich mir während den Versuchen hierüber notirte.

Um die drei Mittelzahlen P, Q und R auf theoretischem Wege darzustellen, gieng ich von dem Grundsatz aus, dass die Anzahl der Würfe, welche zum Hervorbringen eines bestimmten Wurfes erfordert werde, zur Wahrscheinlichkeit dieses Wurfes reciprok sei, dass so z. B. ein bestimmter unpaarer Wurf im Mittel 18 Würfe zum Hervorbringen erfordere, weil seine Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{18}$  sei. Da nun

$$\frac{6}{36} \quad \frac{5}{36} \quad \frac{4}{36} \quad \frac{3}{36} \quad \frac{2}{36} \quad \frac{1}{36}$$

die Wahrscheinlichkeiten waren, einen ersten, zweiten, dritten, . . . letzten paaren Wurf zu erhalten, so war nach jenem Grundsatz

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{36}{6} + \frac{36}{5} + \frac{36}{4} + \frac{36}{3} + \frac{36}{2} + \frac{36}{1} \\
 &= 6 + 7,2 + 9 + 12 + 18 + 36 \\
 &= 88,2
 \end{aligned}$$

Analog folgte aus den Wahrscheinlichkeiten

$$\frac{30}{36} \quad \frac{28}{36} \quad \frac{26}{36} \quad \dots \quad \frac{4}{36} \quad \frac{2}{36}$$

einen ersten, zweiten, dritten, . . . . letzten unpaaren Wurf zu werfen

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{36}{30} + \frac{36}{28} + \frac{36}{26} + \frac{36}{24} + \dots + \frac{36}{2} \\
 &= 1,2 + 1,286 + 1,385 + 1,5 + 1,636 + 1,8 + 2 + 2,25 + 2,571 + \\
 &\quad 3 + 3,6 + 4,5 + 6 + 9 + 18 \\
 &= 59,728
 \end{aligned}$$

Die Vergleichung der Glieder, aus denen P und Q zusammengesetzt erschienen, liess mich erkennen, dass, wenn u einen unpaaren, p einen paaren Wurf bezeichne, die wahrscheinlichste Ordnung der 21 Würfe

u u u u p u u u p u u u p u u p u u p u p

sei, und hieraus folgten für ihre Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \frac{36}{36} & \frac{34}{36} & \frac{32}{36} & \frac{30}{36} & \frac{28}{36} & \frac{27}{36} & \frac{25}{36} & \frac{23}{36} & \frac{21}{36} & \frac{20}{36} & \frac{18}{36} \\
 \frac{16}{36} & \frac{14}{36} & \frac{13}{36} & \frac{11}{36} & \frac{9}{36} & \frac{8}{36} & \frac{6}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{1}{36}
 \end{array}$$

so dass

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{36}{36} + \frac{36}{34} + \frac{36}{32} + \frac{36}{30} + \frac{36}{28} + \frac{36}{27} + \frac{36}{25} + \frac{36}{23} + \frac{36}{21} + \frac{36}{20} + \\
 &\quad \frac{36}{18} + \frac{36}{16} + \frac{36}{14} + \frac{36}{13} + \frac{36}{11} + \frac{36}{9} + \frac{36}{8} + \frac{36}{6} + \frac{36}{4} + \frac{36}{3} + \frac{36}{1} \\
 &= 1 + 1,059 + 1,125 + 1,2 + 1,286 + 1,233 + 1,44 + 1,565 + \\
 &\quad 1,714 + 1,8 + 2 + 2,25 + 2,571 + 2,769 + 3,273 + 4 + 4,5 + \\
 &\quad 6 + 9 + 12 + 36 \\
 &= 97,885
 \end{aligned}$$

wurde. Diese berechneten drei Zahlen stimmen mit den den Versuchen entnommenen auffallend schön zusammen, namentlich Q und R; die etwas grössere Abweichung der beiden P dürfte in der darauf besonders wirksamen Differenz zwischen den mathematischen und den angewandten Würfeln zu suchen sein, welche sich im Verlaufe der gegenwärtigen Untersuchung ergeben wird. Noch mag beigefügt werden, dass Herr Professor Rudolf Merian in Basel die Güte hatte ebenfalls die Zahlen P, Q, R zu berechnen, und nach ganz andern, mehr combinatorischen und für R zu grossen numerischen Rechnungen führenden Betrachtungen

$$P=88,2 \quad Q=59 \frac{14577}{20020} \quad R=95,0818$$

fand, also P und Q ganz übereinstimmend und R dagegen um etwas mehr als 2 Einheiten von meinem Werthe verschieden. Endlich erwähne ich noch der Merkwürdigkeit wegen, dass sich mir die oben benutzte Methode P, Q und R zu bestimmen schon im Sommer 1849 bei Betrachtung der ersten Versuchsreihe aufdrängte, — dass ich sie aber des durch einen Rechnungsfehler verursachten schlechten Resultates wegen glaubte verwerfen zu müssen, und nun einen ganz auf andern Grundlagen beruhenden Weg einschlug, auf den ich in einer spätern Mittheilung einzutreten gedenke; erst in den letzten Tagen kam ich bei Revision aller diese Versuche betreffenden Papiere auf jenes erste Verfahren zurück, entdeckte den Rechnungsfehler, und hatte nun alle Ursache für den vorliegenden Fall zu ihm zurückzukehren.

In dritter Linie wurden alle 100,000 Würfe nach ihrer Vertheilung auf die 21 möglichen Würfe untersucht. Es ergab sich hieraus folgende Tafel:



Wurf	Anzahl in den Würfeln							
	1	1—10	1—100	1—1000	1—10000	10001—20000	20001—30000	30001—40000
1.1	—	—	2	23	241	255	231	240
2.2	—	—	—	34	330	310	320	336
3.3	—	—	1	20	231	204	196	194
4.4	—	1	6	33	292	322	286	289
5.5	—	—	1	32	286	272	284	328
6.6	—	—	2	22	269	281	263	270
<b>Paar</b>	—	1	12	164	1649	1644	1580	1657
1.2	—	—	5	71	539	585	554	545
1.3	—	—	4	46	487	499	456	442
1.4	—	—	6	53	515	558	597	541
1.5	—	—	5	53	566	549	592	575
1.6	—	1	6	54	512	512	496	482
2.3	—	—	9	54	568	550	570	619
2.4	—	2	9	57	618	615	613	643
2.5	—	1	6	70	639	677	641	683
2.6	—	2	9	63	599	536	566	590
3.4	—	2	9	51	531	551	542	487
3.5	—	—	3	45	549	550	507	492
3.6	—	—	2	45	508	487	552	490
4.5	—	—	5	61	612	592	614	678
4.6	1	1	7	63	538	529	504	496
5.6	—	—	3	50	570	566	616	580
<b>Unpaar</b>	1	9	88	836	8351	8356	8420	8343

Wurf	Anzahl in den Würfeln							Mathematische Wahrscheinlichkeit.
	40001—50000	50001—60000	60001—70000	70001—80000	80001—90000	90001—100000	1—100000	
1.1	265	252	265	228	245	233	2455	} 0,02778
2.2	330	314	336	305	317	355	3253	
3.3	214	246	256	191	226	221	2179	
4.4	310	273	290	297	283	288	2930	
5.5	303	335	295	280	314	285	2982	
6.6	257	265	268	265	258	272	2668	
Paar	1679	1685	1710	1566	1643	1654	16467	0,16667
1.2	534	563	581	582	570	603	5656	} 0,05556
1.3	457	469	438	453	457	473	4631	
1.4	497	501	512	522	502	500	5245	
1.5	590	568	583	587	537	590	5737	
1.6	511	512	505	516	466	492	5004	
2.3	570	546	571	557	513	533	5597	
2.4	636	608	620	601	643	600	6197	
2.5	637	603	627	666	672	684	6529	
2.6	577	615	586	622	617	561	5869	
3.4	529	501	496	494	493	516	5140	
3.5	548	551	537	552	536	555	5377	
3.6	492	475	494	469	505	529	5001	
4.5	605	620	616	620	656	573	6186	
4.6	596	535	536	566	589	547	5436	
5.6	542	648	588	627	601	590	5928	
Unpaar	8321	8315	8290	8434	8357	8346	83533	0,83333

Aus dieser Tafel geht hervor, dass sich die paaren und unpaaren Würfe schon bei einer geringen Anzahl von Versuchen so ziemlich ins Gleichgewicht setzen; schon bei 100 Versuchen, wo bei den einzelnen Würfeln noch gar kein Gesetz ersichtlich ist, stimmt bei den paaren und unpaaren Würfeln die Erfahrungswahrscheinlichkeit auf eine Decimale mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit, — bei 1000 Versuchen, wo sich nun auch die einzelnen paaren und unpaaren Würfe bereits in bestimmten Verhältnissen zeigen, hat die Uebereinstimmung schon die Stufe erreicht, deren sie überhaupt fähig zu sein scheint. Bei den einzelnen Würfeln steigt dagegen die Uebereinstimmung der Erfahrungswahrscheinlichkeit mit der mathematischen Wahrscheinlichkeit noch merklich bis zu 10000 Versuchen, — nachher wird auch sie stagnirend, und es treten nun mit Bestimmtheit die durch die Ungleichheit der Würfel bedingten Eigenthümlichkeiten der einzelnen Würfe hervor, — so dass die aus den ersten 10000 Versuchen erhaltenen Wurfzahlen bereits genauer auf die allen 100000 Versuchen entsprechenden Wurfzahlen schliessen lassen, als die mathematischen Wahrscheinlichkeiten. Die folgende Vergleichung, wo je die erste Zahl den ersten 10000 Versuchen, die zweite allen 100000 Versuchen und die dritte der mathematischen Wahrscheinlichkeit entspricht, erweist diese Behauptung wohl mit hinlänglicher Sicherheit:

<u>1 • 1</u>	<u>2 • 2</u>	<u>3 • 3</u>
2410	3300	2310
2455 45	3253 47	2179 131
2778 323	2778 475	2778 599

<u>4 . 4</u>	<u>5 . 5</u>	<u>6 . 6</u>
2920	2860	2690
2930 10	2982 122	2668 22
2778 152	2778 204	2778 110
<u>1 . 2</u>	<u>1 . 3</u>	<u>1 . 4</u>
5390	4870	5150
5656 266	4631 239	5245 95
5556 100	5556 925	5556 311
<u>1 . 5</u>	<u>1 . 6</u>	<u>2 . 3</u>
5660	5120	5680
5737 77	5004 116	5597 83
5556 181	5556 552	5556 41
<u>2 . 4</u>	<u>2 . 5</u>	<u>2 . 6</u>
6180	6390	5990
6197 17	6529 139	5869 121
5556 641	5556 973	5556 313
<u>3 . 4</u>	<u>3 . 5</u>	<u>3 . 6</u>
5310	5490	5080
5140 170	5377 113	5001 79
5556 416	5556 179	5556 555
<u>4 . 5</u>	<u>4 . 6</u>	<u>5 . 6</u>
6120	5380	5700
6186 66	5436 56	5928 228
5556 630	5556 120	5556 372

denn sie zeigt, dass die aus den 10000 Versuchen gezogenen Zahlen von den geworfenen im Mittel um 107, die aus der mathematischen Wahrscheinlichkeit gezogenen

aber von den geworfenen im Mittel um 389 abweichen,—  
 oder dass die erstern einen mittlern Fehler von 0,02242,  
 die letztern einen mittlern Fehler von 0,08172 zeigen.  
 Das nämliche zeigt sich, wenn man die aus Combination  
 der Wurfzahlen der paaren Würfe entstehenden Zahlen  
 mit den Wurfzahlen der unpaaren Würfe vergleicht, —  
 ja, es lassen sich (wie dies schon in der Einleitung, zu  
 der ersten Versuchsreihe mit als Zweck aufgeführt wurde)  
 aus diesen mittlern Wurfzahlen die Abweichungen des  
 gebrauchten Würfels von dem mathematischen Würfel  
 bestimmen. Setzt man nämlich die Wahrscheinlichkeit des  
 Wurfes  $h$  am ersten Würfel gleich  $\frac{1}{6} + p_h$  und die des  
 Wurfes  $k$  am zweiten Würfel gleich  $\frac{1}{6} + q_k$ , so hat man  
 die Wahrscheinlichkeiten eines paaren Wurfes  $(h, h)$  und  
 eines unpaaren Wurfes  $(h, k)$ , wenn die zweiten Dimen-  
 sionen von  $p$  und  $q$  vernachlässigt werden,

$$\begin{aligned} w(h, h) &= \left(\frac{1}{6} + p_h\right) \left(\frac{1}{6} + q_h\right) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{6} (p_h + q_h) \\ &= 0,02778 + r_h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w(h, k) &= \left(\frac{1}{6} + p_h\right) \left(\frac{1}{6} + q_k\right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{6} + p_k\right) \left(\frac{1}{6} + q_h\right) \\ &= \frac{1}{18} + \frac{1}{6} (p_h + q_h) \\ &\quad + \frac{1}{6} (p_k + q_k) \\ &= 0,05556 + r_h + r_k \end{aligned}$$

und es bestehen somit die Gleichungen

$$\begin{aligned} 0,02455 &= 0,02778 + r_1 \\ 0,03253 &= 0,02778 + r_2 \\ 0,02179 &= 0,02778 + r_3 \\ 0,02930 &= 0,02778 + r_4 \\ 0,02982 &= 0,02778 + r_5 \\ 0,02668 &= 0,02778 + r_6 \\ 0,05656 &= 0,05556 + r_1 + r_2 \\ 0,04631 &= 0,05556 + r_1 + r_3 \\ 0,05245 &= 0,05556 + r_1 + r_4 \\ 0,05737 &= 0,05556 + r_1 + r_5 \\ 0,05004 &= 0,05556 + r_1 + r_6 \\ 0,05597 &= 0,05556 + r_2 + r_3 \\ 0,06197 &= 0,05556 + r_2 + r_4 \\ 0,06529 &= 0,05556 + r_2 + r_5 \\ 0,05869 &= 0,05556 + r_2 + r_6 \\ 0,05140 &= 0,05556 + r_3 + r_4 \\ 0,05377 &= 0,05556 + r_3 + r_5 \\ 0,05001 &= 0,05556 + r_3 + r_6 \\ 0,06186 &= 0,05556 + r_4 + r_5 \\ 0,05436 &= 0,05556 + r_4 + r_6 \\ 0,05928 &= 0,05556 + r_5 + r_6 \end{aligned}$$

oder, wenn man nach Maasgabe der ersten 6 Gleichungen

$$\begin{aligned} r_1 &= - 0,00323 + u \\ r_2 &= + 0,00475 + v \\ r_3 &= - 0,00599 + w \\ r_4 &= + 0,00152 + x \\ r_5 &= + 0,00204 + y \\ r_6 &= - 0,00110 + z \end{aligned}$$

setzt, und die Fehler der einzelnen Gleichheiten mit  $\alpha$  bezeichnet,

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= u \\
 \alpha_2 &= v \\
 \alpha_3 &= w \\
 \alpha_4 &= x \\
 \alpha_5 &= y \\
 \alpha_6 &= z \\
 \alpha_7 &= u + v + 0,00052 \\
 \alpha_8 &= u + w + 0,00003 \\
 \alpha_9 &= u + x + 0,00140 \\
 \alpha_{10} &= u + y - 0,00300 \\
 \alpha_{11} &= u + z + 0,00119 \\
 \alpha_{12} &= v + w - 0,00165 \\
 \alpha_{13} &= v + x - 0,00014 \\
 \alpha_{14} &= v + y - 0,00294 \\
 \alpha_{15} &= v + z + 0,00052 \\
 \alpha_{16} &= w + x - 0,00031 \\
 \alpha_{17} &= w + y - 0,00216 \\
 \alpha_{18} &= w + z - 0,00154 \\
 \alpha_{19} &= x + y - 0,00274 \\
 \alpha_{20} &= x + z + 0,00162 \\
 \alpha_{21} &= y + z - 0,00278
 \end{aligned}$$

Hieraus erhält man durch Quadriren und Addiren

$$\begin{aligned}
 \Sigma \alpha^2 &= 6(u^2 + v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2) \\
 &+ 2(uv + uw + ux + uy + uz + vw + vx + vy + vz + wx + \\
 &\quad wy + wz + xy + xz + yz) \\
 &+ 0,00002 [14u - 369v - 563w - 17x - 1362y - 99z] + \\
 &\quad 0,00005
 \end{aligned}$$

folglich, da nach der Methode der kleinsten Quadrate  $\Sigma \alpha^2$  ein Minimum werden soll,

$$\frac{d\Sigma\alpha^2}{du} = 0 = 12u + 2(v + w + x + y + z) + 2 \cdot 0,00014$$

$$\frac{d\Sigma\alpha^2}{dv} = 0 = 12v + 2(u + w + x + y + z) - 2 \cdot 0,00369$$

$$\frac{d\Sigma\alpha^2}{dw} = 0 = 12w + 2(u + v + x + y + z) - 2 \cdot 0,00563$$

$$\frac{d\Sigma\alpha^2}{dx} = 0 = 12x + 2(u + v + w + y + z) - 2 \cdot 0,00017$$

$$\frac{d\Sigma\alpha^2}{dy} = 0 = 12y + 2(u + v + w + x + z) - 2 \cdot 0,01362$$

$$\frac{d\Sigma\alpha^2}{dz} = 0 = 12z + 2(u + v + w + x + y) - 2 \cdot 0,00099$$

oder, wenn man der Kürze wegen

$$u + v + w + x + y + z = t$$

setzt,

$$u = -\frac{1}{5} (t + 0,00014)$$

$$v = -\frac{1}{5} (t - 0,00369)$$

$$w = -\frac{1}{5} (t - 0,00563)$$

$$x = -\frac{1}{5} (t - 0,00017)$$

$$y = -\frac{1}{5} (t - 0,01362)$$

$$z = -\frac{1}{5} (t - 0,00099)$$

woraus durch Addition

$$t = -\frac{1}{5} [6t - 0,02396] \quad \text{oder} \quad t = 0,00218$$

folgt, und somit



$$u = - 0,00041$$

$$v = + 0,00030$$

$$w = + 0,00069$$

$$x = - 0,00040$$

$$y = + 0,00229$$

$$z = - 0,00024$$

Man hat daher

$$r_1 = - 0,00364$$

$$r_2 = + 0,00505$$

$$r_3 = - 0,00530$$

$$r_4 = + 0,00112$$

$$r_5 = + 0,00433$$

$$r_6 = - 0,00124$$

in welchen Zahlen ein Maass für die Abweichungen der gebrauchten Würfel von den mathematischen liegt. Man kann diese Abweichungen gross finden, — man kann bemerken, dass wenn sorgfältiger construirte Würfel angewandt worden wären, auch die Resultate sich näher an die theoretischen Zahlen angeschlossen hätten; beides ist ganz richtig, aber ebenso richtig ist es, was bei der ersten Versuchsreihe schon bemerkt wurde, — nämlich, dass der Zweck dieser Versuche gerade gewöhnliche Würfel verlangte, — denn es handelt sich ja nicht um die Richtigkeit der Theorie, sondern um eine Vergleichung der Erfahrungen mit der Theorie, und in der Praxis kommen eben gewöhnliche Würfel, und überhaupt mit Fehlern behaftete Instrumente vor; ja, die ganze neuere Beobachtungskunst geht aus guten Gründen mehr darauf aus, den Fehlern Rechnung zu tragen, als dem Mechaniker ihre Beseitigung zuzumuthen.

Mit Benutzung dieser Werthe von  $r$  finden sich sodann nach den oben aufgestellten Beziehungen für die gebrauchten Würfel die Wahrscheinlichkeiten

$w(1,1) = 0,02414$	anstatt	2455
$w(2,2) = 0,03283$	—	3253
$w(3,3) = 0,02242$	—	2179
$w(4,4) = 0,02890$	—	2930
$w(5,5) = 0,03211$	—	2982
$w(6,6) = 0,02654$	—	2668
$w(1,2) = 0,05697$	—	5656
$w(1,3) = 0,04656$	—	4631
$w(1,4) = 0,05304$	—	5245
$w(1,5) = 0,05625$	—	5737
$w(1,6) = 0,05068$	—	5004
$w(2,3) = 0,05525$	—	5597
$w(2,4) = 0,06173$	—	6197
$w(2,5) = 0,06494$	—	6529
$w(2,6) = 0,05937$	—	5869
$w(3,4) = 0,05132$	—	5140
$w(3,5) = 0,05453$	—	5377
$w(3,6) = 0,04896$	—	5001
$w(4,5) = 0,06101$	—	6186
$w(4,6) = 0,05544$	—	5436
$w(5,6) = 0,05865$	—	5928

In vierter Linie endlich wurden die 100,000 Würfe noch darauf untersucht, wie oft jeder Wurf 2, 3, 4 . . . . Mal nach einander erschienen sei. Die Resultate wurden mit Beifügung der Wahrscheinlichkeiten für die mathematischen und die gebrauchten Würfel in der folgenden Tafel zusammengestellt :

(Bern. Mitth. Februar 1851.)

Wurf. wiederholt sich	Wahrscheinlichkeit für die mathemat.   gebrauchten Würfel.													
	1—10000	10001—20000	20001—30000	30001—40000	40001—50000	50001—60000	60001—70000	70001—80000	80001—90000	90001—100000	1—100000			
1. 1	2	2	6	5	5	4	4	4	4	2	3	39	0,00077	0,00058
	3	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1	002	001
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	000	000
2. 2	2	11	5	7	12	1	5	7	7	9	9	73	077	108
	3	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	2	002	004
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	000	000
3. 3	2	2	4	1	3	2	2	3	1	3	2	23	077	050
	3	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	002	001
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	000	000
4. 4	2	8	12	5	8	2	7	5	3	6	7	63	077	084
	3	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1	002	002
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	000	000
5. 5	2	6	4	9	11	11	9	6	5	8	8	77	077	103
	3	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	002	003
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	000	000
6. 6	2	6	5	3	5	9	5	5	5	6	4	53	077	070
	3	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	002	002
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	000	000
paar	2	35	36	30	44	29	32	30	25	34	33	328	462	473
	3	1	2	1	—	1	—	—	—	—	1	6	013	014
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	000	000
1. 2	2	27	25	22	33	25	22	30	29	25	26	264	309	325
	3	—	—	—	3	—	—	3	3	1	2	12	017	018
	4	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1	001	001
1. 3	2	22	33	19	18	18	12	14	24	16	16	192	309	217
	3	1	4	1	1	3	—	—	—	—	1	11	017	010
	4	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	001	000
1. 4	2	26	28	33	32	12	10	15	25	16	17	214	309	281
	3	1	1	3	4	—	2	—	1	—	—	12	017	015
	4	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1	001	001
1. 5	2	28	35	29	27	28	23	20	31	22	30	273	309	316
	3	1	2	1	1	—	—	—	3	3	—	11	017	018
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	001	001
1. 6	2	32	28	24	31	28	32	30	31	20	27	283	309	257
	3	2	—	—	2	5	3	2	5	—	2	21	017	013
	4	1	—	—	—	1	—	—	—	—	—	2	001	001

Wurf.	wiederholt sich	Wahrscheinlichkeit für die mathemat.   gebrauchten Würfel.												
		1—10000	10001—20000	20001—30000	30001—40000	40001—50000	50001—60000	60001—70000	70001—80000	80001—90000	90001—100000	1—100000		
2. 3	2	24	28	28	28	37	25	16	28	20	29	263	0,00309	0,00305
	3	—	1	1	1	2	1	—	4	1	—	11	017	017
	4	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	1	001	001
2. 4	2	28	35	38	41	36	41	35	21	33	26	334	309	381
	3	1	4	—	1	6	3	2	—	2	—	19	017	024
	4	—	1	—	—	1	—	—	—	—	—	2	001	001
2. 5	2	35	46	34	48	31	28	39	43	50	47	401	309	422
	3	1	6	2	2	2	—	1	3	1	5	23	017	027
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	001	002
2. 6	2	26	24	25	47	28	27	23	30	33	36	299	309	352
	3	2	—	2	6	3	—	2	—	1	2	18	017	021
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	001	001
3. 4	2	21	31	18	31	31	23	29	27	21	37	269	309	263
	3	—	1	—	2	3	3	1	1	—	6	17	017	014
	4	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1	2	001	001
3. 5	2	26	24	12	25	27	32	18	20	22	37	243	309	297
	3	2	3	—	4	2	1	—	—	—	3	15	017	016
	4	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	1	001	001
3. 6	2	17	22	24	21	25	22	18	21	18	21	209	309	240
	3	1	—	2	3	—	1	1	1	—	1	10	017	012
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	001	001
4. 5	2	38	37	36	36	32	27	40	42	44	25	357	309	372
	3	1	—	2	4	1	—	5	1	4	—	18	017	023
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	001	001
4. 6	2	30	34	23	23	27	18	15	22	34	27	253	309	307
	3	—	1	—	—	2	1	—	1	1	—	6	017	017
	4	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	001	001
5. 6	2	27	26	30	38	21	33	32	32	25	33	297	309	344
	3	3	2	3	2	—	1	3	2	—	3	19	017	020
	4	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	1	001	001
unp.	2	407	456	395	479	406	375	374	426	399	434	4151	0,04630	0,04680
	3	16	25	17	36	29	16	20	25	14	25	223	0257	0264
	4	1	3	—	3	2	1	—	1	—	1	12	0014	0015

Diese Tafel unterstützt offenbar die früher geäußerte Ansicht, dass die Anzahl der Versuche, welche gemacht werden muss um eine Wahrscheinlichkeit empirisch zu ermitteln, im umgekehrten Verhältnisse zu dieser letztern stehen soll; denn jetzt, wo die Wahrscheinlichkeiten kleiner geworden sind, reichen 10000 Würfe gerade noch hin, um die paaren und unpaaren Würfe von einander zu unterscheiden, — die 100000 Würfe aber noch nicht einmal völlig um die einzelnen Würfe aus den ihre zweifachen Wiederholungen zählenden Zahlen zu ordnen, geschweige aus den drei- oder vierfachen, wo noch förmliche Abnormitäten vorkommen. Im Ganzen zeigt sich, dass mit Ausnahme einiger wenigen Würfe die Wiederholungen etwas zu selten eintrafen, während man gerade das Gegentheil hätte erwarten sollen, — es mag dies wieder mit der Abneigung gegen extreme Erscheinungen zusammenhängen, welche sich wieder auffallend darin zeigte, dass kein einziger paarer Wurf viermal, kein einziger unpaarer Wurf fünfmal nach einander erschien, wie man es unter 100000 Würfeln wohl hätte erwarten dürfen, um so mehr, als die Wahrscheinlichkeit jedes nahe einmal erwarten liess.

Hiemit mag wenigstens für einstweilen die Betrachtung dieser Versuchsreihe geschlossen werden. Eine einzige Bemerkung sei mir noch erlaubt, — die Grösse der Zahl 100000 betreffend: Schon 100000 gehört zu den Zahlen, deren Grösse wir uns nicht mehr deutlich bewusst sind, wenn nicht besondere Erfahrungen darauf leiten. Wer daran zweifelt, möge, wie ich es machte, die Würfel zur Hand nehmen, 100000 Würfe machen und aufzeichnen, sie mehrfach zählen und ordnen, etc. — er wird nachher gewiss eingestehen müssen, er habe sich 100000 nicht so gross, so nahe an unendlich, vorgestellt.

---