

# Trisektion eines Kreisbogens und die Kreisconchoide

Autor(en): **Sidler, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1873)**

Heft 812-827

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-318876>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

**Prof. Dr. G. Sidler.**  
**Trisektion eines Kreisbogens und  
die Kreisconchoide.**

---

Vorgetragen in der mathemat. Sektion am 11. Januar 1873.

---

(Mit 4 Tafeln.)

Von der Aufgabe, einen Kreisbogen in drei gleiche Theile zu theilen, hat neulich Herr Hippauf eine einfache Lösung mit Hülfe der Kreisconchoide gegeben.<sup>1)</sup> Wir wollen erst diese Lösung reproduziren, und dann weitere Eigenschaften der genannten Curve beifügen.

*§ 1. Trisektion eines Kreisbogens.*

1) Sei AUVB der zu theilende Kreisbogen (Fig. 1), C dessen Mittelpunkt und O der andere Endpunkt des durch A gehenden Durchmessers. Seien ferner U und V die gesuchten Theilpunkte, so dass Bogen  $AU = UV = VB$ , so ist, wenn wir die Geraden CU und OV ziehen,  $CU \parallel OV$ , denn  $\angle AOV = \frac{AV}{2} = \angle ACU$ . Ebenso ist Sehne  $UV \parallel AB$ . Ziehen wir also durch C einen **Strahl CP**  $\parallel$  Sehne **AB**, so ist CUV P ein Parallelogramm, also wenn R der Radius des Kreises,

- 1)  $PV = R$
- 2)  $CP = \text{Sehne } UV$ .

---

<sup>1)</sup> Lösung des Problems der Trisektion eines Kreisbogens mittelst der Conchoide auf cirkularer Basis, von Dr. H. Hippauf, Rektor der mittleren Bürgerschule zu Halberstadt. Leipzig bei Teubner 1872.

Wenn ferner die Radien CU und CV die Sehne AB in u und v schneiden, so ist  $\triangle UAu \simeq \triangle UCV$  wegen Gleichheit der entsprechenden Winkel, also  $Au = AU$ , aber  $AU = UV$ , und somit

$$3) \quad CP = Au = Bv.$$

2) Denken wir nun, dass der Endpunkt B des Bogens AB vom festen Punkte A aus den gegebenen Kreis umlaufe, so ist der Ort des Punktes P eine Curve, die entsteht, wenn wir vom andern Endpunkt O des Durchmessers AO aus nach einem variablen Punkte X des Kreises einen Strahl ziehen, und auf diesem Strahle von X aus eine konstante Strecke  $XP =$  dem Radius R in derjenigen Richtung auftragen, wo der Winkel  $CXP =$  der Hälfte des von X durchlaufenen Bogens AX wird. (Fig. 2.)

Während Bogen AX von  $0^\circ$  bis  $180^\circ$  wächst, ist  $\angle CXP$  spitz; wenn aber AX von  $180^\circ$  bis  $360^\circ$  wächst, ist  $\angle CXP$  stumpf. Während also X von A aus in rechtläufigem Sinn die Kreisperipherie umläuft, beschreibt P eine Curve CPOP'G. — Wenn der Bogen AX um  $360^\circ$  zugenommen hat, also X nach einem ganzen Umlauf an seinen frühern Ort zurückgekommen ist, so hat der Winkel CXP um  $180^\circ$  zugenommen; die entsprechenden Richtungen von XP sind also einander entgegengesetzt. Wenn daher X die Kreisperipherie zum zweiten Mal umläuft, so beschreibt P den zum frühern symmetrischen Curvenzweig GP''OC. — Nach zwei Umläufen des Punktes X kehrt die Ortscurve von P in sich selber zurück. — Diese Curve nennen wir nach Analogie der gewöhnlichen Conchoide, wo die Basis eine Gerade ist, eine **Kreisconchoide**.

Wenn X von A aus einen Bogen von  $120^\circ$  beschrieben hat, so dass  $\angle AOX = 60^\circ$ , so fällt P in O

hinein, und unmittelbar vorher wird der Punkt P unendlich nahe an O liegen. Im Doppelpunkte O bilden daher die Tangenten der Conchoide mit der Axe OA Winkel von  $60^\circ$ .

3) Haben wir für den gegebenen Kreis die Conchoide gezeichnet, so ziehen wir, um einen gegebenen Bogen AB dieses Kreises in drei gleiche Theile zu theilen (Fig. 3), vom Mittelpunkt C des Kreises aus parallel zur Sehne AB den Radius-Vektor CP der Conchoide. Dies vorausgesetzt, erhalten wir die Theilpunkte U und V,

a) indem wir im Bogen AB von A aus eine Strecke gleich dem Radius-Vektor CP dreimal als Sehne eintragen, Sehne  $AU = UV = VB = CP$ ;

b) der Strahl OP trifft den gegebenen Bogen im zweiten Theilpunkt V, und der zu OP parallele Radius CU des Kreises trifft den Bogen im ersten Theilpunkt U;

c) machen wir auf der Sehne AB die Strecken Au und Bv gleich CP, so gehen die Radien Cu und Cv durch die gesuchten Theilpunkte.

4) Da Au gleich und parallel CP, so ist, während der Endpunkt B des zu theilenden Bogens AB die Peripherie des Kreises umläuft, der Ort des Punktes u, wo der Radius CU die Sehne AB trifft, eine zur obigen Hülfscurve congruente Conchoide, die um eine Strecke gleich dem Radius des Grundkreises parallel zu jener verschoben ist.

Wenn B von A aus den Kreis beschreibt, so hat im Anfang (Fig. 4) die Sehne AB die vertikale Tangentenrichtung  $A\alpha$ , also CP die vertikale Tangentenrichtung  $C\gamma$ . Nun bleibt stets  $\angle \gamma CP = \alpha AB$ , d. h.: der Punkt P bewegt sich von C aus dergestalt, dass der Radius-Vektor CP von seiner Anfangsrichtung  $C\gamma$  aus einen Winkel  $\gamma CP$  beschreibt gleich und im gleichen Sinne, wie der Radius-Vektor AB von seiner Anfangsrichtung  $A\alpha$  aus, oder einen Winkel  $\gamma CP$ .

der halb so gross ist wie der zu theilende Kreisbogen AB. Dadurch ist für jeden Bogen AB der entsprechende Conchoidenpunkt P eindeutig bestimmt. Sei z. B. Bogen  $AB = 3 \cdot 180^\circ$ , so ist  $\angle \gamma CP = 3 \cdot 90^\circ$ , also geht der Radius-Vektor CP von C aus nach rechts zum Conchoidenpunkt G; die Sehne von  $\frac{AB}{3}$  ist also  $= CG = 2R$ , wie sein soll.

Eine durch C gehende Gerade trifft die vollständige Conchoide (Fig. 2) ausser in C noch in drei Punkten  $P_0, P_1, P_2$ . Die Radien-Vektoren  $CP_0, CP_1, CP_2$  sind gleich den Sehnen der Kreisbogen

$$\frac{AB}{3}, \frac{AB + 360^\circ}{3}, \frac{AB + 2 \cdot 360^\circ}{3}.$$

### § 2. Neue Erzeugungsarten der Kreisconchoide.

5) Sei OA ein Durchmesser des Grundkreises (Fig. 5), und O der Pol der Conchoide, so ziehen wir von O aus einen Strahl nach einem variablen Punkte X des Grundkreises, und tragen auf diesem Strahl von X aus nach beiden Seiten die Strecken XP und  $XP_1$  auf, gleich dem Radius CA des Kreises, so ist der Ort der Punkte P und  $P_1$  die Conchoide.

Beschreiben wir jetzt um A als Mittelpunkt einen Kreis mit demselben Radius AC, und ziehen durch A den Durchmesser  $TT_1 \parallel OX$ , und die Geraden TP, AX,  $T_1P_1$ , so sind AXPT und  $AXP_1T_1$  Parallelogramme (weil AT gleich und parallel XP), und da  $\angle AXO = 90^\circ$ , so sind dies Rechtecke; also ist TP die Tangente im Punkte T, und  $OP \perp TP$ . Die obige Conchoide ist daher auch der Ort der Fusspunkte P der Perpendikel, die vom festen Punkte O auf die variablen Tangenten TP eines um A als Mittelpunkt beschriebenen, mit dem frühern gleichgrossen, Kreises gefällt werden.

Den frühern Kreis um C wollen wir den **Grundkreis**, den jetzigen Kreis um A zum Unterschied den **Leitkreis** nennen. Dem in Bezug auf den Pol O convexen Theile des Leitkreises entspricht die innere, und dem in Bezug auf O concavem Theile des Leitkreises die äussere Schleife der Conchoide; die Berührungspunkte der von O an den Leitkreis gehenden Tangenten ergeben den Doppelpunkt der Curve. — Diese Auffassung der Kreisconchoide als Fusspunktencurve ergibt uns eine reiche Zahl von Eigenschaften derselben.

Denken wir uns von C und von G aus Perpendikel auf den Strahl OX gefällt, so liegen die Fusspunkte derselben zwischen P und  $P_1$ . Hieraus sehen wir, dass die innere Conchoidenschleife von einem Kreise um OC als Durchmesser ganz umschlossen wird, hingegen die äussere Schleife ganz ausserhalb eines um OG als Durchmesser beschriebenen Kreises liegt.

6) Die obige Betrachtung führt uns auf ein neues Verfahren, einen Winkel mittelst der Conchoide in drei gleiche Theile zu theilen.

Sei wieder (Fig. 6) Bogen  $AU = UV = VB$ , so ist  $CU \parallel OV$ . Machen wir nun nach Grösse und Richtung  $VP = CU$ , so ist CUPV ein verschobenes Quadrat, also  $CP \perp UV$ , d. h.  $CP \perp AB$ , und somit  $\angle ACP = \frac{1}{2}ACB$ .

Machen wir nun AT gleich und parallel CU, so ist ATPV ein Parallelogramm; aber  $AV \perp OV$ , und somit auch PT senkrecht zu AT und zu OP, also TP Tangente an den Ortskreis von T, und P der zu T gehörige Punkt der Fusspunktencurve dieses Kreises in Bezug auf den Pol O. Ferner ist CATU ein verschobenes Quadrat, also  $\angle ACT = \frac{1}{2}ACU$ .

Aber  $\angle ACU = \frac{1}{3}ACB$ . Die obigen Relationen  $ACT = \frac{1}{2}ACU$  und  $ACP = \frac{1}{2}ACB$ , ergeben also

$$\angle ACT = \frac{1}{3}ACP.$$

Sei also  $\text{GCP}$  der zu theilende Winkel (Fig. 7), so beschreiben wir um irgend einen Punkt  $A$  des einen Schenkels  $CG$  einen durch den Scheitel  $C$  gehenden Kreis, machen auf diesem Schenkel nach der entgegengesetzten Seite  $CO = CA$  und construiren die Fusspunktencurve jenes Kreises in Bezug auf den Pol  $O$ . Wenn nun der andere Schenkel  $CP$  diese Curve in  $P$  trifft, so ziehe man den Radius  $AT$  des Leitkreises parallel zur Geraden  $OP$ , und den Strahl  $CT$  nach dem Endpunkt  $T$  dieses Radius, so ist  $\angle \text{GCT} = \frac{1}{3} \text{GCP}$ . Dies ist die von Herrn Jouanne angegebene Construction.<sup>1)</sup>

7) Wir kehren zur Betrachtung der Conchoide als Fusspunktencurve des Punktes  $O$  in Bezug auf den Leitkreis  $A$  zurück. Es liegt  $P$  auf einem um  $OT$  als Durchmesser beschriebenen Kreise; wenn daher  $J$  die Mitte von  $OT$  (Fig. 8), so ist  $JP = JO$ , und während  $T$  den Leitkreis beschreibt, so beschreibt  $J$  einen Kreis ab von halb so grossem Radius um die Mitte  $C$  von  $OA$ , der in Bezug auf jenen den Punkt  $O$  zum äussern Aehnlichkeitspunkt hat. Es ist  $CJ$  parallel und gleichgerichtet mit  $AT$ , und daher auch  $CJ \parallel OP$ .

Das von  $J$  auf  $OP$  gefällte Perpendikel  $Jp$  ist die Symmetrieaxe des gleichschenkligen Dreiecks  $OJP$  und Tangente an den Ortskreis von  $J$ . Die Punkte  $P$  und  $p$  beschreiben ähnliche und ähnlich liegende Curven, von denen  $O$  der Aehnlichkeitspunkt und  $1 : 2$  das Aehnlichkeitsverhältniss ist.

Nehmen wir von  $C$  in Bezug auf die Tangente  $Jp$  den symmetrischen Punkt  $U$  und beschreiben um  $U$  als

---

<sup>1)</sup> Trisection de l'angle au moyen du Limaçon de Pascal, par M. Jouanne, prof. au lycée de Caën. Nouvelles Annales de Mathématiques par MM. Gerono et Bourget. IX. 1870. pag. 40.

Mittelpunkt einen Kreis durch J, der vom Strahl UP in  $\alpha$  getroffen werde, so haben wir zu beiden Seiten von Jp symmetrische Figuren. Es ist daher  $UP = CO = R$ , und Bogen  $J\alpha = \text{Bogen } Ja$ . Während nun J den Kreis um C beschreibt, rollt der Kreis U auf diesem Kreise, und der Punkt P hat zu dem rollenden Kreise eine feste Lage. Wenn daher ein Kreis vom Radius  $\frac{R}{2}$  auf einem gleichgrossen festen Kreise rollt (Fig. 9), so beschreibt ein mit dem rollenden Kreise fest verbundener Punkt P, der vom Mittelpunkt U dieses letztern in der Distanz R liegt, eine mit unserer Conchoide identische Curve. <sup>1)</sup>

Wenn der Punkt  $\alpha$ , wo der Strahl UP den rollenden Kreis schneidet, mit dem festen Kreis zur Berührung kommt, so geht P durch den innern Scheitel C, und wenn der diametrale Punkt von  $\alpha$  zur Berührung kommt, so geht P durch den äussern Scheitel G. Wenn CUP ein gleichseitiges Dreieck (Bogen  $aJ = 60^\circ$ ), so geht P durch den Doppelpunkt O.

§ 3. *Die Normalen der Curve, die doppelt berührenden Kreise u. s. f.*

8) Wir denken uns den Leitkreis A als Grenzcurve eines eingeschriebenen Polygons von unendlich vielen Seiten. Zwei aneinanderstossende Seiten, die den Punkt T des Kreises gemein haben (Fig. 10), stellen verlängert zwei benachbarte Tangenten TP und TP' dar. Fällt man nun von O die Perpendikel OP und OP' auf diese Tangenten, so liegen P und P' auf dem um OT als Durchmesser beschriebenen Kreise. Dieser Kreis hat

---

<sup>1)</sup> Vergl. Steiner: Von dem Krümmungsschwerpunkt ebener Curven § XXXVI. Crelles Journal für Mathematik, Band 21.



also zwei unendlich nahe liegende Punkte  $P$  und  $P'$  mit der Conchoide gemein und berührt daher die letztere in  $P$ . Die Normale der Conchoide im Punkt  $P$  fällt somit mit dem Radius  $PJ$  dieses Kreises zusammen. Wenn daher  $T$  der irgend einem Punkt  $P$  der Conchoide entsprechende Punkt des Leitkreises  $A$  ist, so geht die Normale des Punktes  $P$  durch die Mitte  $J$  der Geraden  $OT$ . (Fig. 11.)

Der Ort des Punktes  $J$  ist ein Kreis vom Radius  $\frac{R}{2}$  um  $C$  als Mittelpunkt, und es ist  $CJ$  parallel und gleichgerichtet mit  $AT$ , oder mit  $XP$ , wenn  $AX \perp OP$ . Beschreiben wir daher die Conchoide in der ursprünglichen Weise (Fig. 12), indem wir vom Punkte  $O$  Strahlen nach einem variablen Punkte  $X$  des Grundkreises  $C$  ziehen, und auf diesen Strahlen von  $X$  aus je eine Strecke  $XP$  gleich dem Radius dieses Kreises auftragen, so ist, wenn wir in einem concentrischen Kreise von halb so grossem Radius einen Radius  $CJ$  parallel und in gleicher Richtung wie  $XP$  ziehen,  $PJ$  die Normale der Conchoide im Punkte  $P$ .

Rufen wir uns die Erzeugung unserer Conchoide als epicykloidische Linie zurück, so stimmt dies mit dem bekannten Satz, dass die Normale eines Punktes einer durch Rollen erzeugten Curve durch den betreffenden Berührungspunkt der rollenden Curve geht.

9) Betrachten wir die Normale  $PY$  und  $P_1Y$  zweier Punkte  $P$  und  $P_1$  der Conchoide (Fig. 13), die demselben Punkte  $X$  des Grundkreises entsprechen. Da  $JJ_1 \parallel PP_1$  und  $C$  und  $X$  die Mitten von  $JJ_1$  und  $PP_1$  sind, so gehen diese Normalen durch den nämlichen Punkt  $Y$  der Geraden  $CX$ , und da  $CJ = \frac{1}{2} XP$ , so ist auch  $CY = \frac{1}{2} XY$ , d. h.:  $CY = XC$ . Es liegt daher  $Y$  ebenfalls auf dem Grundkreise und ist der Diametralpunkt

von X. Die Normalen der beiden Punkte P und P<sub>1</sub> der Conchoide, die irgend einem gegebenen Punkte X des Grundkreises entsprechen, gehen daher durch den andern Endpunkt Y des durch den Punkt X gehenden Durchmessers des Grundkreises (Fig. 14).

10) Die vorhergehende Betrachtung führt uns auf neue Eigenschaften unserer Curve. Sei Z der Punkt, wo die Normale PY den Grundkreis zum zweitenmal schneidet (Fig. 15), so sind die Dreiecke PZO und PXY einander ähnlich; aber  $XP = \frac{1}{2}XY$ , also

$$ZP = \frac{1}{2}ZO,$$

wo ZP in P normal zur Conchoide steht. Dies gilt, ob wir P auf der äussern oder auf der innern Schleife annehmen, und wir haben den Satz: **Jeder Punkt Z des Grundkreises ist von den beiden Schleifen der Conchoide gleich weit entfernt, und zwar halb so weit als vom festen Punkte O.**

Daher: Ein Kreis, den wir mit einem Radius  $= \frac{1}{2}ZO$  um irgend einen Punkt Z des Grundkreises als Centrum beschreiben, berührt sowohl die äussere als die innere Schleife der Conchoide; der Grundkreis ist der Ort der Mittelpunkte der die beiden Schleifen doppelt berührenden Kreise.

Oder: Wenn man von einem festen Punkte O eines Kreises Strahlen zieht nach einem variablen Punkte Z desselben, und um Z als Centrum je einen Kreis schlägt, der durch die Mitte des Strahls ZO geht, so ist unsere Conchoide die Einhüllungscurve dieser Kreisschaar.

Es ist  $OP \parallel AY$ , also  $\angle ZPX = ZYA$ , oder  
 $\angle ZPX = AOZ$ .

Da  $ZP = \frac{1}{2}ZO$ , so ist ferner  $2 \sin ZOP = \sin ZPX = \sin AOZ$ , d. h.:  $2 \sin \left( \frac{ZX}{2} \right) = \sin \left( \frac{AZ}{2} \right)$ , oder

Sehne ZX  $= \frac{1}{2}$  Sehne AZ.

Dasselbe gilt für den Berührungspunkt  $P_1$  des Kreises um  $Z$  mit der innern Schleife (Fig. 16). Also

Sehne  $ZX = \text{Sehne } ZX_1 = \frac{1}{2} \text{ Sehne } AZ$ . Daher

Die Radien Vektoren  $OP$  u.  $OP_1$  der beiden Berührungspunkte der Conchoide mit einem der obigen Kreise bilden gleiche Winkel mit dem Radius Vektor des Centrum  $Z$  dieses Kreises. Die Dreiecke  $OZP$  und  $OZP_1$  sind ein hübsches Beispiel von zwei verschiedenen Dreiecken, die zwei Seiten und den der kleinern Seite gegenüberstehenden Winkel gleich haben.

Wenn wir um irgend einen Punkt  $Z$  des Grundkreises einen Kreis mit dem Radius  $\frac{1}{2}ZO$  geschlagen haben, so trage man von  $Z$  aus nach beiden Seiten die Sehnen  $ZX$  und  $ZX_1$  gleich der Hälfte der Sehne  $AZ$  auf, so sind  $X$  und  $X_1$  die beiden Punkte des Grundkreises, die den Berührungspunkten der Conchoide mit jenem Kreise entsprechen.

Wir können die Berührungspunkte  $P$  und  $P_1$  des Kreises  $Z$  auch direkt erhalten: Da  $\angle ZPX = \angle ZP_1X_1$ , so sind  $OPZ$  und  $OP_1Z$  supplementäre Winkel, also  $OP_1ZP$  ein einschreibbares Viereck. Sei  $M$  der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, so ist  $MZ \perp PP_1$ . Aber  $PP_1$  steht auch senkrecht zur Tangente an den Grundkreis in  $Z$ , denn wir können  $PP_1$  als die Schnittsehne des Kreises  $Z$  mit dem unmittelbar benachbarten Kreise dieser Schaar ansehen. Es ist daher  $MZ$  eine Tangente an den Grundkreis, somit wird dieser vom Kreise um  $OP_1ZP$  rechtwinklig geschnitten, und daher ist auch  $MO$  eine Tangente an den Grundkreis, und  $M$  in Bezug auf diesen letztern der Pol der Geraden  $OZ$ . Legen wir daher durch  $O$  und  $Z$  einen Orthogonalkreis zum Grundkreise, so sind die Schnittpunkte dieses Kreises mit demjenigen, den wir um  $Z$  mit dem Radius  $\frac{1}{2}ZO$  geschlagen haben, die beiden Berührungspunkte  $P$  und  $P_1$  des letztern Kreises mit der Conchoide.

Sei endlich  $u$  der Winkel  $AOZ$ , und  $\varphi$ ,  $\varphi_1$  die Winkel der Radien Vektoren  $OP$ ,  $OP_1$  mit der Axe  $OCG$ .

Wir fanden oben  $2 \sin\left(\frac{ZX}{2}\right) = \sin\left(\frac{AZ}{2}\right)$  d. h.:

$$2 \sin\left(\frac{\varphi - \varphi_1}{2}\right) = \sin u = \sin\left(\frac{\varphi + \varphi_1}{2}\right),$$

woraus  $\sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi_1}{2} - 3 \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} = 0$ , oder

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 3 \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}.$$

Wenn also die beiden Schleifen je von einem nämlichen Kreise berührt werden, so stehen die Tangenten der Hälften der Winkel, die die Radien Vektoren  $OP$  und  $OP_1$  der beiden Berührungspunkte mit der Axe der Curve bilden, in dem konstanten Verhältniss 3 : 1 zu einander.

Wir haben ein zweites System von doppelt berührenden Kreisen, die je die nämliche Schleife in zwei zur Axe  $OCG$  symmetrischen Punkten tangiren. Der Ort der Mittelpunkte dieser zweiten Schaar ist die Symmetrieaxe der Curve. Wenn die Berührungspunkte vom innern Scheitel  $C$  aus bis zum äussern Scheitel  $G$  die Curve durchlaufen, so bewegt sich der Mittelpunkt des tangirenden Kreises auf der Curvenaxe vom Krümmungsmittelpunkt des Scheitels  $C$  aus nach links hin ins Unendliche, und kehrt dann aus dem Unendlich-fernen rechter Hand zurück bis zum Krümmungsmittelpunkt des Scheitels  $G$  (Fig. 29).

11) Es fällt uns nun leicht, die äussersten Punkte links in der Conchoide, sowie die höchsten und die tiefsten Punkte in den beiden Schleifen zu bestimmen.

Untersuchen wir zunächst die äussersten Punkte links oder die Doppeltangente der Curve. Die Tangente in einem solchen Punkte  $P$  steht senkrecht zum Durch-

messer OA des Grundkreises (Fig. 17), also ist die Normale PJY  $\parallel$  OA; anderseits CJ  $\parallel$  XOP. Also ist OPJC ein Parallelogramm, und daher:

$$OP = CJ = \frac{R}{2}, \text{ d. h.: } OX = OP = \frac{R}{2}.$$

Wir erhalten also eine sehr einfache Construction des Punktes X des Grundkreises, der dem gesuchten Punkte P der Conchoide entspricht.

Ferner ist AY = und  $\parallel$  OX, also AY = und  $\parallel$  OP, und somit YP = AO = 2R. Also ist PYX ein gleichschenkeliges Dreieck, und da O die Mitte von PX, so ist OY  $\perp$  PX. Sei nun PE  $\perp$  OA, so sind die rechtwinkligen Dreiecke OEP und POY einander ähnlich, denn sie haben die Winkel bei O und bei P gleich,

$$\text{also } \frac{OE}{OP} = \frac{OP}{PY} = \frac{1}{4}, \text{ woraus}$$

$$OE = \frac{R}{8} \text{ und } EP = \frac{R\sqrt{15}}{8}$$

Auch, falls wir die Conchoide als **Fusspunktencurve** construiren, erhalten wir in einfacher Weise den dem obigen Punkt P entsprechenden Punkt T des Leitkreises. Denn denken wir uns (Fig. 17) das Dreieck POY zum Parallelogramm, d. h. Rechteck OPTY ergänzt, so ist AYT eine Gerade = 2AY = R, also T jener Punkt des Leitkreises um A, und ferner ist OT = PY = OA. — Wenn wir also (Fig. 18) um O mit OA als Radius einen Kreis beschreiben, der den Leitkreis A in T trifft, so entspricht diesem Punkt T des Leitkreises in der in Bezug auf den Punkt O genommenen Fusspunktencurve der äusserste Punkt P links.

12) Untersuchen wir endlich die **höchsten und tiefsten Punkte der beiden Schleifen**. (Fig. 19 a u. b.) Die Normale PUY eines solchen Punktes P steht senkrecht zum

Durchmesser OCA des Grundkreises. Sei D der Punkt, wo dieselbe den Grundkreis zum zweitenmal schneidet, so ist  $XD \perp PY$ ; also  $XD \parallel OA$ , und daher  $\triangle XDP \sim \triangle OXA$  (denn jedes ist ähnlich  $\triangle OVX$ ), woraus

$$\frac{OX}{XD} = \frac{OA}{XP} = 2, \text{ d. h. } OX = 2XD.$$

Setzen wir also  $OX = r$ , so ist  $OV = R \mp \frac{r}{4}$ , wo das obere Zeichen der äussern und das untere der innern Schleife entspricht. Die Relation  $\overline{OX}^2 = 2R \cdot OV$

$$\text{gibt also } r^2 \pm \frac{Rr}{2} - 2R^2 = 0.$$

Die positiven Wurzeln dieser Gleichungen sind die Radien Vektoren der Punkte X und X' des Grundkreises, die den höchsten Punkten der beiden Schleifen entsprechen.

Für die äussere Schleife ist also

$$\text{a) } r = OX = \frac{-1 + \sqrt{33}}{4} R, \quad OP = r + R = \frac{3 + \sqrt{33}}{4} R.$$

und für die innere Schleife

$$\text{b) } r' = OX' = \frac{1 + \sqrt{33}}{4} R, \quad OP' = r' - R = \frac{-3 + \sqrt{33}}{4} R.$$

Endlich sind die auf O bezogenen rechtwinkligen Coordinaten der beiden Punkte P und P'

$$x = OU = R \pm \frac{r}{4}, \quad y = UP = \sqrt{(OP - x)(OP + x)},$$

woraus für die Coordinaten des höchsten Punktes P der äussern Schleife

$$\left\{ \begin{array}{l} x = OU = \frac{15 + \sqrt{33}}{16} R = 1,2965 R \\ y = UP = \frac{1}{16} \sqrt{414 + 66\sqrt{33}} R = 1,7602 R, \end{array} \right.$$

und für die Coordinaten des höchsten Punktes P' der

innern Schleife

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = O'U' = \frac{15 - \sqrt{33}}{16} R = 0,57846 R. \\ y' = U'P' = \frac{1}{16} \sqrt{414 - 66\sqrt{33}} R = 0,36900 R. \end{array} \right.$$

Um diese Punkte P zu **construieren**, ziehen wir aus den Formeln (a und b.)

$$\frac{r' - r}{2} = \frac{R}{4}, \quad \sqrt{rr'} = R\sqrt{2}, \quad \text{woraus}$$

$$\left(\frac{r' + r}{2}\right)^2 = \left(\frac{R}{4}\right)^2 + (R\sqrt{2})^2.$$

Im gegebenen Grundkreise ziehe man z. B. (Fig. 20) den Radius  $Cs \perp OA$ , mache auf  $OA$  die Strecke  $On =$  Sehne  $Os$ , ziehe durch  $n$  senkrecht zu  $OA$  die Gerade  $nm = \frac{R}{4}$ , und trage auf dem Strahle  $Om$  von  $m$  aus, respektive nach innen u. nach aussen die Strecken  $ma$  und  $ma' = mn$  auf. Dies vorausgesetzt, mache man Sehne  $OX = Oa$  und Sehne  $OX' = Oa'$ , und trage endlich auf ersterer von  $X$  aus nach aussen und auf letzterer von  $X'$  aus nach innen die Strecken  $XP$  und  $X'P' = R$  auf, so sind  $P$  und  $P'$  die höchsten oder tiefsten Punkte der beiden Schleifen.

#### § 4. *Krümmungsmittelpunkte und Evolute der Conchoide.*

13) Wenn wir in einem zum Grundkreise  $C$  concentrischen Kreise vom Radius  $\frac{R}{2}$  einen Radius  $CJ$  parallel und in gleicher Richtung wie  $XP$  ziehen, so ist  $PJ$  die Normale der Conchoide im Punkte  $P$ , und ferner ist  $JP = JO$  (Nr. 8).

Betrachten wir zuerst einen Punkt P der äussern Schleife (Fig. 21 a), so ist  $\angle CJO = JOP$ , und  $\angle CJY = JPO$ , also  $\angle CJY = CJO$ .

Wenn aber P ein Punkt der innern Schleife (Fig. 21b), so ist, wenn C' auf der Verlängerung des Radius CJ liegt,  $\angle C'JY = C'JO$ .

Denken wir uns daher den Punkt O als Lichtquell und den Ortskreis von J als reflektirende Curve, so ist JP die nach rückwärts gehende Fortsetzung des von diesem Kreise reflektirten Strahles OJ. Die Einhüllungskurve der Strahlen PJ ist daher einerseits die Evolute der Conchoide und andererseits die dem Lichtquell O entsprechende Reflexionsbrennlinie des Kreises J. **Die Evolute der Conchoide ist also die Brennlinie, welche durch Reflexion der vom Pole O ausgehenden Strahlen an einem zum Grundkreise concentrischen Kreise von halb so grossem Radius erzeugt wird.**<sup>1)</sup>

14) Um nun das **Krümmungscentrum** für irgend einen Punkt der Conchoide zu erhalten, denken wir uns die letztere wieder als Fusspunktenkurve des Leitkreises A (Fig. 22). Seien T und T' zwei benachbarte Punkte dieses Kreises, OP und OP' die von O auf die Tangenten an T und T' gefällten Perpendikel und J und J' die Mitten der Strahlen OT und OT', so sind PJ und P'J' zwei benachbarte Normalen der Conchoide, die sich im Krümmungsmittelpunkt M des Bogens PP' schneiden. Dies vorausgesetzt, ziehen wir TS und T'S parallel zu PM und P'M, so ist TST' ein zu JMJ' ähnliches und ähnlich liegendes Dreieck von doppelten Dimensionen

---

<sup>1)</sup> Vergleiche: Emil Weyr. Ueber die Identität der Brennlinien mit den Evoluten der Fusspunktenkurven. Zeitschrift für **Mathematik** von Schlömilch. Jahrgang 1869, pag. 376.



und  $O$  der Aehnlichkeitspunkt beider Dreiecke; es liegen daher  $O$ ,  $M$ ,  $S$  in einer Geraden, und  $M$  ist die Mitte von  $OS$ .

Da  $C$  die Mitte von  $OA$ , so ist  $AT \parallel CJ$ . Es gehöre nun  $P$  der äussern Conchoidenschleife an, oder es liege  $T$  auf dem in Bezug auf  $O$  concaven Theile des Leitkreises, so halbirt  $CJ$  den Winkel  $OJM$ , und somit halbirt auch  $AT$  den Winkel  $OTS$ , und analog  $AT'$  den Winkel  $OT'S$ . Nehmen wir von  $S$  in Bezug auf die Tangente  $TP$  den symmetrischen Punkt  $S_1$ , so erscheint die Summe  $OT + TS = OS_1$ , wenn man  $O$  und  $S$  festhält und  $T$  auf dem Leitkreise bewegt, als ein Minimum, und daher unterscheidet sich  $OT' + T'S$  von  $OT + TS$  nur um ein unendlich Kleines der zweiten Ordnung. Man kann somit  $O$  und  $S$  als die Brennpunkte einer **Ellipse** ansehen, die durch  $T$  und  $T'$  geht, und alsdann sind  $TA$  und  $T'A$  Normalen dieser Ellipse, und somit der Kreis  $A$  der Krümmungskreis derselben im Bogen  $TT'$ . — Würde aber  $T$  auf dem in Bezug auf  $O$  convexen Theile des Kreises  $A$  liegen, oder  $P$  der innern Conchoidenschleife angehören, so wären  $O$  und  $S$  die Brennpunkte einer durch  $T$  gehenden **Hyperbel**, die in diesem Punkte den Leitkreis  $A$  zum Krümmungskreise hätte. — Beschreiben wir daher um  $O$  als Brennpunkt einen Kegelschnitt, der durch einen Punkt  $T$  des Leitkreises geht, und hier diesen Kreis zum Krümmungskreise hat, so ist der Mittelpunkt  $M$  des Kegelschnittes das Krümmungscentrum des jenem Punkt  $T$  entsprechenden Conchoidenpunktes  $P$ .<sup>1)</sup> — Es ist  $PJ = \frac{1}{2} OT$  und  $JM = \frac{1}{2} TS$ , also ist der Krümmungsradius  $PM$  im Punkte  $P$  der Conchoide gleich der halben Hauptaxe des obigen Kegelschnittes.

<sup>1)</sup> Vergleiche: Emil Weyr, Konstruktion des Krümmungskreises für Fusspunktenkurven, Sitzungsberichte der Wiener Akademie für 1869, zweite Abtheilung, pag. 169.

Da die Figur OJM und der Ortskreis von J der Figur OTS und dem Ortskreis von T ähnlich sind im Verhältniss 1 : 2, so kann man den obigen Satz auch wie folgt aussprechen (Fig. 12): **Man beschreibe um O als Brennpunkt einen Kegelschnitt, der den zum Grundkreis C concentrischen Kreis vom Radius  $\frac{R}{2}$  in irgend einem Punkte J oskulirt so ist der andere Brennpunkt M dieses Kegelschnitts das Krümmungscentrum desjenigen Punktes P der Conchoide, dessen vom Grundkreis ausgehender Fahrstrahl XP parallel und gleichgerichtet mit dem Radius CJ jenes Hilfskreises ist. Der Krümmungsradius PM der Conchoide ist gleich der Hauptaxe dieses Kegelschnitts.**

Da wir für irgend einen Punkt P der Conchoide die Normale von vornherein kennen, so haben wir, um M zu erhalten, nach dem erstern der obigen Sätze die Richtung der Hauptaxe eines Kegelschnitts zu bestimmen, von dem uns der eine Brennpunkt O, ein Peripheriepunkt T und das Krümmungscentrum A von T gegeben ist. Aus der bekannten Konstruktion des Krümmungscentrums eines Kegelschnitts (v. Nr. 23) ergibt sich hiernach das folgende Verfahren (Fig. 23): Man konstruirt die Conchoide als Fusspunktenkurve des Punktes O in Bezug auf den Leitkreis A. Sei nun AT irgend ein Radius des Leitkreises, so fälle man von A ein Perpendikel AD auf den Strahl OT, und von D wieder ein Perpendikel DE auf AT; dann geht die Normale der Conchoide in dem zu T gehörigen Punkt P der Conchoide durch die Mitte J von OT, und **der Strahl OE schneidet diese Normale im Krümmungscentrum M.**

Der Ort des Punktes D ist der um OA als Durchmesser beschriebene Kreis. Construirt man daher die Conchoide mittelst des Grundkreises C (Fig. 24), so ziehe man durch A den Strahl AT = und gleichgerichtet

mit  $XP$ , und fälle von  $D$ , wo der Strahl  $OT$  den Grundkreis zum zweitenmal trifft, ein Perpendikel  $DE$  auf  $AT$ , so schneidet der Strahl  $OE$  die Normale  $PY$  im Krümmungscentrum  $M$  des Punktes  $P$ .

15) Für die Scheitel  $G$  und  $C$ , sowie für den Doppelpunkt  $O$  wird die obige Konstruktion des Krümmungscentrums illusorisch.

Für die Scheitel nehmen wir den Satz zu Hilfe, dass der Krümmungsradius eines Hauptscheitels einer Ellipse oder Hyperbel von den beiden Brennpunkten  $O$  und  $S$  harmonisch geteilt wird: Man lege daher durch  $O$  irgend eine Gerade (Fig. 25) und nehme auf derselben zwei willkürliche Punkte  $U$  und  $V$ . Wenn nun die Strahlen  $VA$  und  $UA$  von den Geraden  $UG$  und  $VG$  respective in  $u$  und  $v$ , und von den Geraden  $UC$  und  $VC$  in  $u'$  und  $v'$  geschnitten werden, so bestimmen die Geraden  $uv$  und  $u'v'$  auf  $OA$  die Punkte  $S$  und  $S'$ , so dass die Mitte  $M$  von  $OS$  das Krümmungscentrum des Scheitels  $G$ , und die Mitte  $M'$  von  $OS'$  dasjenige des Scheitels  $C$  ist.

Seien  $\rho$  und  $\rho'$  die Krümmungsradien der beiden Scheitel. Die harmonische Relation

$$\frac{1}{OS} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{OA} + \frac{1}{OG} \right) \text{ gibt } \frac{1}{OM} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{3R}, \text{ woraus für}$$

den Scheitel  $G$  der äussern Schleife:

$$OM = \frac{6}{5} R, \quad \rho = OG - OM = \frac{9}{5} R.$$

$$\text{Analog } \frac{1}{OM'} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OC} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{R}, \text{ woraus für den}$$

Scheitel der innern Schleife:

$$OM' = \frac{2}{3} R, \quad \rho' = OC - OM' = \frac{1}{3} R.$$

Die Krümmungsradien der beiden Scheitel erhält man auch direkt durch folgende Betrachtung (Fig. 26): Ziehen wir durch  $O$  einen Radius Vektor  $OC'G'$  der

Conchoide, der mit der Axe OCG einen unendlich-kleinen Winkel  $\omega$  bilde, und den Grundkreis zum zweiten Mal in A' treffe, und sei Y der Gegenpunkt von A', so sind nach Nr. 9 G'Y und C'Y die Normalen von G' und C', die die Axe in den Krümmungsmittelpunkten M und M' der Scheitel G und C treffen. Nun ist  $CC' = R\omega$ ,  $GG' = 3R\omega$  und  $OY = AA' = 2R\omega$ , und wir haben

$$\frac{GM}{GO} = \frac{GG'}{GG'+OY} = \frac{3\omega}{3\omega + 2\omega} = \frac{3}{5}, \text{ also } GM = \frac{3}{5}R.$$

$$\frac{CM'}{CO} = \frac{CC'}{CC' + OY} = \frac{\omega}{\omega + 2\omega} = \frac{1}{3}, \text{ also } CM' = \frac{1}{3}R.$$

16) Den **Doppelpunkt** der Conchoide erhalten wir, wenn wir von O aus Tangenten an den Leitkreis legen, indem die Schnittpunkte derselben mit dem von O auf dieselben gefällten Perpendikel in den Punkt O selber hineinfallen, und diese Tangenten an den Leitkreis sind zugleich die Normalen der beiden sich in O schneidenden Zweige der Conchoide (Nr. 8), und sind auch Tangenten an den um C mit dem Radius  $\frac{R}{2}$  beschriebenen Kreis; der Berührungspunkt J dieses letzteren Kreises ist die Mitte von OT.

Ziehen wir nun (Fig. 27) durch O einen Strahl, der im Leitkreise eine sehr kleine Sehne T'T'' bildet, so bildet derselbe im Ortskreise von J eine Sehne J'J'' =  $\frac{1}{2}$  T'T'', und wenn wir von O die Perpendikel OP' und OP'' auf die Tangenten an T' und T'' fällen, so sind P'J' und P''J'' die Normalen in den Punkten P' und P'' unserer Curve. Sei n der Schnittpunkt dieser Normalen, so ist J'nJ'' ein gleichschenkliges Dreieck, denn die Winkel bei J' und J'' sind doppelt so gross, als die

Winkel, die die Tangenten an  $T'$  und  $T''$  mit der Sehne  $T'T''$  bilden. Wenn nun die Sekante  $OT'T''$  zur gemeinsamen Tangente  $OJT$  an die beiden Kreise wird, so fällt  $n$  in den Berührungspunkt  $J$  hinein, und somit ist  $J$  das Krümmungscentrum des einen Conchoidenzweigs im Punkte  $O$ . Beschreibt man daher um  $C$  einen Kreis mit dem Radius  $\frac{R}{2}$ , so sind die Normalen im Doppelpunkte  $O$  der Conchoide die von  $O$  aus an diesen Kreis gehenden Tangenten, und die entsprechenden Krümmungscentra sind die Berührungspunkte  $J$  dieser Tangenten. Aus dem rechtwinkligen Dreieck  $OCJ$  erhält man für die Grösse dieser Krümmungsradien

$$\rho = \frac{R\sqrt{3}}{2} = 0,86603 R.$$

17) Auch für die Punkte  $B$  unserer Curve (Fig. 28), die vertikal oberhalb oder unterhalb  $O$  liegen ( $OB=R$ ), ergeben sich einfache Werthe des Krümmungsradius. Die Normale eines solchen Punktes  $B$  geht durch  $A$ . Sei nun  $OO' = 2\omega$  ein sehr kleiner Bogen des Grundkreises,  $B'$  der zu  $O'$  gehörige Punkt unserer Curve,  $u$  der Schnittpunkt von  $OB'$  mit  $BA$ , und  $ON = OB$ , so ist

$$BN = \omega, NB' = OO' = 2\omega, uN = \frac{BN}{2} = \frac{\omega}{2}, \text{ also } uB' = \frac{5\omega}{2}$$

Wenn ferner  $A'$  im Grundkreise der Gegenpunkt von  $O'$ , so ist  $B'A'$  die Normale in  $B'$ , und der Schnittpunkt  $M$  von  $BA$  und  $B'A'$  das Krümmungscentrum des Bogens  $BB'$ . Aber  $AA' \parallel OO'$ , d. h.  $\parallel uB'$ , also

$$\frac{uM}{MA} = \frac{uB'}{AA'} = \frac{5\omega}{2} : 2\omega = \frac{5}{4}, \text{ woraus } \frac{uM}{uA} = \frac{5}{9}.$$

Lassen wir nun  $B'$  unendlichnahe an  $B$  rücken, so erhalten wir für den Krümmungsradius des Punktes  $B$

$$BM = \frac{5}{9}BA = \frac{5\sqrt{5}}{9} R = 1,2423 R.$$

18) Jetzt haben wir eine klare Anschauung von der **Evolute unserer Curve.**

Betrachten wir zuerst (Fig. 29) die eine Hälfte CDOEFG der Conchoide, die einem ganzen Umlauf des erzeugenden Punktes X des Grundkreises im rechtläufigen Sinn entspricht. — Dem innern Scheitel C der Conchoide als dem Krümmungsmaximum ist ein **Rückkehrpunkt** c der Evolute zugeordnet,  $Cc = \frac{R}{3}$ . Das Krümmungscentrum d des höchsten Punktes D der innern Schleife ist **der äusserste Punkt links** in der Evolute. Im Punkte o, wo die Normale des Punktes O den um C mit dem Radius  $\frac{R}{2}$  beschriebenen Kreis berührt, wird **dieser Kreis selber von der Evolute berührt.** Das Krümmungscentrum e des äussersten Punktes links in der Conchoide ist **der tiefste Punkt** der Evolute. Das Krümmungscentrum f des tiefsten Punktes F der äussern Schleife ist **der äusserste Punkt rechts** in der Evolute. Das Krümmungscentrum g endlich des äussern Scheitels G ist wiederum ein **Rückkehrpunkt** der Evolute,  $Cg = \frac{R}{5}$ . — Der zweiten Hälfte GF'E'OD'C der Conchoide entspricht eine symmetrische Hälfte gf'e'o'd'c der Evolute. — Die genannten ausgezeichneten Punkte der Evolute, sowie alle Zwischenpunkte können wir mittelst des Vorhergehenden construiren.

Die beiden Punkte o und o', wo die Evolute den um C mit dem Radius  $\frac{R}{2}$  beschriebenen Kreis berührt, theilen die Evolute in zwei ungleiche Hälften, wovon die links liegende oder gegen O convexe Hälfte odcd'o, der innern Schleife und die gegen O concave Hälfte o'e'fg'feo der äussern Schleife der Conchoide zugehört.

Die **Bogenlänge der Evolute** zwischen irgend zwei Punkten ist gleich der Differenz der diesen Punkten entsprechenden Krümmungsradien der Stammkurve. Die obigen Werthe  $\rho_c = 1/3$ ,  $\rho_o = 1/2\sqrt{3}$ ,  $\rho_g = 9/5$  ergeben daher für die Evolutenbogen, die der halben innern Schleife CDO, und der halben äussern Schleife OFG der Stammkurve entsprechen,

$$\text{Bogen cdo} = (1/2\sqrt{3} - 1/3) R.$$

$$\text{Bogen oefg} = (9/5 - 1/2\sqrt{3}) R.$$

Die ganze in sich zurückkehrende Evolute hat die Bogenlänge  $= 44/15 R$ .

19) Die Polargleichung der Conchoide, auf den Punkt O als Pol und die Axe OCG als Anfangsrichtung bezogen, ist

$$\text{a) } r = R (r \cos \varphi \mp 1),$$

wo das obere Zeichen für die innere und das untere für die äussere Schleife gilt. Nach der bekannten Formel

$$\rho = \left( r^2 + \frac{dr^2}{d\varphi^2} \right)^{3/2} : \left( r^3 + 2 \frac{dr^2}{d\varphi^2} - r \frac{d^2 r}{d\varphi^2} \right)$$

erhält man hieraus für den Krümmungsradius irgend eines Punktes der innern Schleife

$$\text{b) } \rho = \frac{(5 - 4 \cos \varphi)^{3/2}}{9 - 6 \cos \varphi} \cdot R,$$

und für die äussere Schleife hat man  $\cos \varphi$  mit entgegengesetztem Zeichen zu nehmen.

Setzen wir den Radius R des Grundkreises  $= 1$ , so ist für den höchsten Punkt D der innern Schleife (Nr. 10)

$$r = \frac{-3 + \sqrt{33}}{4}, \text{ woraus } \cos \varphi = \frac{1 + \sqrt{33}}{8} \text{ d. h. } \varphi = 32^\circ 32',$$

$$\text{und } \rho_d = 1/2 \sqrt{\frac{186 - 26\sqrt{33}}{33}} = 0,52686.$$

Seien  $x$  und  $y$  die auf  $O$  bezogenen rechtwinkligen Coordinaten von  $D$  (v. Nr. 12), so sind die auf das Centrum  $C$  des Grundkreises bezogenen Coordinaten des entsprechenden Punktes  $d$  der Evolute,  $X = x - 1$ ,  $Y = y - \varrho$ , oder

$$X_d = -0,42154 \quad , \quad Y_d = -0,15786.$$

Für den äussersten Punkt links in der Conchoide ist  $r = OE = 1/2$ , woraus  $\cos \varphi = -1/4$ , und

$$\varrho_c = 16/15 = 1,0667,$$

und mit derselben Bezeichnung wie vorhin sind die auf  $C$  bezogenen Coordinaten des Evolutenpunktes  $e$ ,

$$X = x + \varrho - 1, \quad Y = y, \quad \text{woraus}$$

$$X_e = -7/120 = -0,06833, \quad Y_e = -1/8\sqrt{15} = -0,48412.$$

Für den tiefsten Punkt  $F$  der äussern Schleife ist  $r = \frac{\sqrt{33} + 3}{4}$ , woraus  $\cos \varphi = \frac{\sqrt{33} - 1}{8}$ , d. h.  $\varphi = -53^\circ 37'$ ,

$$\text{und} \quad \varrho_f = 1/2 \sqrt{\frac{186 + 26\sqrt{33}}{33}} = 1,5939,$$

und die auf  $C$  bezogenen Coordinaten des Evolutenpunktes  $f$  sind  $X = x - 1$ ,  $Y = y - \varrho$ , woraus

$$X_f = 0,2965 \quad , \quad Y_f = -0,1663.$$

Nehmen wir wieder den Punkt  $C$  zum Anfangspunkte rechtwinkliger Coordinaten, so ergibt sich als Gleichung der Evolute, oder der durch Reflexion erzeugten Brennlinie eines Kreises vom Radius  $\frac{R}{2}$ , wo der Lichtquell  $O$  auf der  $x$  Axe in der Distanz  $= -R$  vom Centrum  $C$  dieses Kreises liegt (v. Salmon, higher plane curves, pag. 116),

$$\{16(x^2 + y^2) - (x - R)^2 - y^2\}^3 = 108 \cdot y^2(x^2 + y^2 - R^2)^2.$$



§ 5. *Flächeninhalt und Bogenlänge der Kreisconchoide.*

2<sup>o</sup>) Für irgend eine Lage TP der den Leitkreis A umgleitenden Tangente (Fig. 30) ist AX gleich und parallel TP, und das von zwei benachbarten Radien Vektoren AX und AX' des Grundkreises begrenzte Flächenelement dieses letztern ist bis auf Unendlichkleines der zweiten Ordnung gleich dem von den entsprechenden Tangenten TP und T'P' des Leitkreises begrenzten Flächenelement der Fusspunktenkurve. Daher ist auch

$$\text{Fläche TLCP} = \text{Kreissegment AKX.}$$

Während TP den halben Leitkreis CTG umgleitet, überfährt AX die ganze Fläche des Grundkreises. Sei daher  $\frac{1}{2}F$  die von der halben Fusspunktenkurve CPOFG und der Axe CG begrenzte Fläche, so hat man

$$\frac{1}{2}F - \frac{1}{2} \text{Leitkreisfläche} = \text{Grundkreisfläche.}$$

In unserm Falle, wo der Leitkreis gleich dem Grundkreise, ist also

$$F = 3\pi R^2, \quad \text{d. h. :}$$

**Die Gesamtfläche der Kreisconchoide, d. h. die Summe der innern und der äussern Schleife, ist das Dreifache von der Fläche des Grundkreises.**

Wenn TP durch den Doppelpunkt O geht (Fig. 31), so nimmt AX die Lage AV an, wo Bogen  $AU = UV = VO = \frac{\pi}{3}$ , und die obige Betrachtung gibt:

$$\frac{1}{2} \text{Schleife OC} + \text{OTLC} = \text{Kreissegment AUV.}$$

Aber

{ Segm. AUV =  $\Delta$  AUV + Segm. AU + Segm. UV,  
 { Fläche OTLC =  $\Delta$  OCT — Segm. CT =  $\Delta$  AUV — Sgm. VO,  
 woraus durch Subtraction

$\frac{1}{2}$  Schleife OC = Segm. AU + Segm. UV + Segm. VO,  
 d. h. : **Die Fläche der innern Schleife ist gleich der Differenz**

zwischen der Fläche des Grundkreises und der Fläche des demselben eingeschriebenen regelmässigen Sechsecks. Daher:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Innere Schleife} = \pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2, \\ \text{Aeussere Schleife} = 2\pi R^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} R^2. \end{array} \right.$$

Der von der innern Schleife und dem Grundkreise umgrenzte Mond hat gleichen Flächeninhalt wie das dem Grundkreise eingeschriebene regelmässige Sechseck.

Aeuss. Schleife — inn. Schleife —  $\pi R^2 = 3\sqrt{3} \cdot R^2$ , d. h.: Die beiden krummlinigen Dreiecke (Fig. 32), welche der Leitkreis CG von der mondformigen Fläche zwischen beiden Schleifen ausschneidet, haben zusammen gleichen Flächeninhalt wie das dem Leitkreis umschriebene gleichseitige Dreieck.

21) Gemäss der Formel  $F = 3\pi R^2$  ist die Gesamtfläche der Conchoide gleich der Fläche einer Ellipse, deren halbe Axen  $3R$  und  $R$ , d. h. gleich der Axe OG der Conchoide und dem dazu senkrechten Radius Vektor OB derselben sind.

Auch in Bezug auf die Bogenlängen steht diese Ellipse in einer merkwürdigen Beziehung zur Conchoide. In der That, wenn wir O zum Pol und OG zur Anfangsrichtung von Polarcoordinaten nehmen, so ist die Gleichung unserer Conchoide

$$r = R (2 \cos \varphi - 1).$$

Von  $\varphi = 0$  bis  $\frac{\pi}{3}$ , wo  $\varphi$  in rechtläufigem Sinn von der Anfangsrichtung OC aus gezählt wird, durchläuft der Endpunkt P des Radius Vektors,  $OP = r$ , die halbe innere Schleife CDO. Von  $\varphi = \frac{\pi}{3}$  bis  $\pi$  nehmen wir den absoluten Werth von  $r$ , zählen aber  $\varphi$  in rechtläufigem

Sinne von der Richtung  $OC'$  aus, so durchläuft dann  $P$  die halbe äussere Schleife  $OFG$  (Fig. 33). Für das Bogenelement  $ds$  erhalten wir nun

$$ds^2 = r^2 d\varphi^2 + dr^2 = R^2 \{(2\cos\varphi - 1)^2 + 4\sin^2\varphi\} d\varphi^2 = \\ = R^2 (5 - 4\cos\varphi) \cdot d\varphi^2.$$

Der vom innern Scheitel  $C$  aus gezählte Conchoidenbogen  $CP$  ist also

$$s = R \int_0^\varphi \sqrt{5 - 4\cos\varphi} \cdot d\varphi,$$

oder, wenn wir  $\varphi/2 = v$  setzen,

$$a) \text{ Conchoidenbogen } CP = 6R \int_0^v \sqrt{1 - \frac{8}{9}(\cos v)^2} \cdot dv.$$

Bezeichnet aber  $v$  die excentrische Anomalie eines Punktes  $E$  der obigen Ellipse, so sind die auf  $O$  bezogenen rechtwinkligen Coordinaten dieses Punktes

$$x = 3R \cos v, \quad y = R \sin v,$$

woraus für das Bogenelement  $d\sigma$  der Ellipse

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 = R^2 (9 \sin^2 v + \cos^2 v) \cdot dv^2.$$

Somit haben wir

$$b) \text{ Ellipt. Bogen } GE = 3R \int_0^v \sqrt{1 - \frac{8}{9} \cos^2 v} \cdot dv.$$

Wir erhalten also

Conchoidenbogen  $CP = 2 \cdot$  Elliptische Bogen  $GE$ ,  
d. h.: **Ein Bogen  $CP$  der Conchoide ist doppelt so gross als ein Bogen  $GE$  der obigen Ellipse, wenn der Polarwinkel des Punktes  $P$  doppelt so gross ist als die excentrische Anomalie des Punktes  $E$ .**

Wenn  $P$  auf der innern Schleife  $CDO$  liegt, so ist  $\varphi = COP$ , und wenn  $P$  auf der äussern Schleife  $OFG$ , so ist  $\varphi = C'OP$ . Construiren wir die Conchoide als Fusspunktencurve von  $O$  in Bezug auf den Leitkreis  $CTG$ , so wird in beiden Fällen  $\varphi = CAT$ , also

$v = \frac{\varphi}{2} = \text{CGT}$ , und somit, wenn K in dem um die grosse Axe der Ellipse als Durchmesser beschriebenen Kreise dem Punkte E entspricht, o ist  $\text{OK} \parallel \text{GT}$ .

Wenn P den halben Umfang COG der Conchoide beschreibt, so durchläuft OK den Kreisquadranten; es ist daher der Bogen COG doppelt so gross als der Ellipsenquadrant GB, und somit die Gesamtlänge der Conchoide gleich dem Umfang der Ellipse.

**Construiren wir also eine Ellipse, deren halbe Axen die Symmetrieaxe OG und der hiezu senkrechte Radius Vektor OB der Conchoide sind, so hat die Conchoide mit dieser Ellipse gleichen Flächeninhalt und gleichen Umfang.**

Da Bogen  $\text{COG} = 2 \cdot \text{Bogen GB}$ , so hat man auch

}	Conchoidenbogen $\text{CP} = 2 \cdot \text{Ellipsenbogen GE}$ ,
}	Conchoidenbogen $\text{GP} = 2 \cdot \text{Ellipsenbogen BE}$ .

22) Bekanntlich hat Steiner Bogenlänge und Flächeninhalt der Fusspunktencurven mit Bogenlänge u. Flächeninhalt von Rollcurven in Verbindung gebracht<sup>1)</sup>: Der Kreis A (Fig. 34) rolle auf einer festen Geraden g, und O sei ein mit diesem Kreise starr verbundener Punkt, so betrachten wir die von O beschriebene Rolllinie. Sei T der irgend einer Lage von O entsprechende Berührungspunkt des Kreises A mit der Basis g, und T' ein unendlich nahe liegender Punkt des Kreises. Wenn T' mit g zur Berührung kommt, so nehme O die Lage O' an; dann hat sich T um den frühern Abstand des Punktes T' von g vertikal gehoben. Der Strahl OT nimmt also mit Vernachlässigung eines Unendlichkleinen

---

<sup>1)</sup> Steiner: Von dem Krümmungsschwerpunkt ebener Curven. Crelles Journal für Mathematik. Band 21, pag. 33 und 36.

der zweiten Ordnung die Lage  $O'T$  an; somit ist  $OTO'$  ein gleichschenkliges Dreieck, und  $OO' \perp OT$ , d. h.: **Die Normale der von  $O$  beschriebenen Rolllinie geht in jedem Momente durch den entsprechenden Berührungspunkt  $T$  des rollenden Kreises mit der Basis.**

Sei  $g'$  die Tangente von  $T'$ , so geht mit derselben Annäherung die Figur  $OTg'$  in  $O'Tg$  über, also ist der Winkel von  $OP$  mit  $g'$  gleich dem Winkel von  $O'T$  mit  $g$ , und daher  $\angle O'TO$  gleich dem Winkel  $\varepsilon$  zwischen den Tangenten  $g$  und  $g'$ , also

$$OO' = \varepsilon \cdot OT.$$

Fällen wir aber von  $O$  die Perpendikel  $OP$  und  $OP'$  auf die Tangenten  $g$  und  $g'$ , so liegen  $P$  und  $P'$  auf dem um  $OT$  als Durchmesser beschriebenen Kreis; wenn also  $J$  die Mitte von  $OT$ , und Winkel  $PJP' = \omega$ , so ist

$$PP' = \omega \cdot PJ.$$

Aber  $\omega = 2\varepsilon$ , und  $PJ = \frac{1}{2}OT$ ; daher

$$a) PP' = OO'.$$

Da ferner  $\angle JPO = JOP$ , und  $PP'$  und  $OO'$  respektive zu  $PJ$  und zu  $OJ$  senkrecht stehen, so sind die gleich langen Strecken  $PP'$  und  $OO'$  gegen  $OP$  gleich geneigt, und somit ist  $O'P' \parallel OP$ . Also Fläche  $POP' = \frac{1}{2}POO'P'$ ; oder wenn  $P$  und  $Q$  die Endpunkte der von  $O$  und  $O'$  auf die Basis  $g$  gefällten Senkrechten sind, so haben wir mit Weglassung von Unendlichkleinem der zweiten Ordnung

$$b) \text{ Fläche } POP' = \frac{1}{2}POO'Q.$$

Halten wir also einmal den Kreis  $A$  und den Punkt  $O$  fest, lassen die Tangente  $g$  den Kreis umgleiten, und nehmen den Ort der Fusspunkte  $P$  der von  $O$  auf diese variable Tangente gefällten Perpendikel; oder halten wir zweitens die Tangente  $g$  fest, lassen den Kreis  $A$ , mit dem der Punkt  $O$  in starrer Verbindung gedacht

wird, auf der Geraden  $g$  rollen, und betrachten die von  $O$  beschriebene Rollcurve, so ist jedem Punkte  $P$  der Fusspunktencurve ein Punkt  $O_p$  der Rolllinie zugeordnet, und umgekehrt (Fig. 35), und zwar so, dass wenn  $T_p$  im ersten Fall den Berührungspunkt des festen Kreises mit der vertikalen Tangente, und im zweiten Fall den Berührungspunkt des rollenden Kreises mit der festen Tangente bezeichnet,  $\angle OAT_p = T_pAO_p$  ist. Dies vorausgesetzt, ist das von irgend zwei benachbarten Punkten  $PP'$  begrenzte Bogenelement der Fusspunktencurve gleich dem von den entsprechenden Punkten  $O_p$  und  $O_{p'}$  begrenzten Bogenelement der Rollcurve. Und das von den Radien Vektoren  $OP, OP'$  begrenzte Flächenelement der Fusspunktencurve ist halb so gross, als das Flächenelement der Rollcurve, das von den zur Basis  $g$  senkrechten Ordinaten der Punkte  $O_p, O_{p'}$  begrenzt ist.

Wenn  $AO = 2R$ , so ist die Fusspunktencurve unsere Conchoide. Dem Scheitel  $C$  der innern Schleife entspricht der tiefste Punkt  $O_c$  der Rolllinie. Für den Doppelpunkt  $O$  der Fusspunktencurve geht die Tangente  $g$  durch den Punkt  $O$ ; diesem Punkt entspricht also der Durchschnittspunkt  $O_o$  der Rollcurve mit der Basis, und hier steht die Tangente der Rolllinie senkrecht zur Basis. Dem Scheitel  $G$  der äussern Schleife entspricht der höchste Punkt  $O_g$  der Rollcurve.

Lassen wir also den Leitkreis  $A$  auf einer festen Geraden rollen, und den mit erstem starr verbundenen Punkt  $O$ , dessen Distanz vom Centrum des Kreises gleich dem Durchmesser desselben ist, eine cykloidische Linie beschreiben, so ist irgend ein Bogen  $CDOP$  unserer Kreisconchoide gleich dem entsprechenden Bogen  $O_c O_o O_p$  dieser cykloidischen Linie, und die vom Radius Vektor  $OP$  überfahrene Fläche  $OCDP$  der Conchoide halb so gross als die von der Ordinate  $O_p P$  des entsprechenden Punktes  $O_p$  jener Rolllinie überfahrene Fläche  $T_c O_c O_o O_p P$ .

§ 6. *Elementare Ableitung der oben benutzten Konstruktion der Krümmungsradien einer Ellipse.*

23) Seien O und S die Brennpunkte, T irgend ein Peripheriepunkt einer Ellipse, und  $\chi$  und  $\psi$  die Winkel, welche die Brennstrahlen TS und TO dieses Punktes mit der grossen Axe bilden (Fig. 36). Die Normale TA halbirt den Winkel STO, und wenn wir mit u die beiden gleichgrossen Winkel STA und OTA bezeichnen, so erhalten wir für den Winkel  $\varphi$ , den die Normale mit der Hauptaxe bildet,  $\varphi = \chi - u = \psi + u$ , woraus

$$\varphi = \frac{1}{2} (\chi + \psi).$$

Sei nun T' ein benachbarter Punkt der Ellipse und  $\alpha, \beta$  die Winkel TST', TOT', so ergibt sich für den Winkel  $\varphi'$ , den die Normale T'A mit der Hauptaxe macht,  $\varphi' = \frac{1}{2} \{ (\chi + \alpha) + (\psi + \beta) \}$ , und somit für den Winkel TAT' =  $\gamma$ , den die Normalen TA und T'A mit einander bilden,

$$\gamma = \frac{1}{2} (\alpha + \beta),$$

Sei endlich  $\rho$  der Krümmungsradius TA, und s der Bogen TT', so ist  $s = \rho\gamma$ , also  $\frac{s}{\rho} = \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$ .

Denken wir uns aber von T Perpendikel auf die Strahlen T'S und T'O gefällt, so bilden diese Perpendikel, s unendlich klein vorausgesetzt, mit s ebenfalls Winkel = u, und wenn r, r' die Brennstrahlen ST, OT' darstellen, so erhalten wir für diese Perpendikel die Werthe  $r\alpha = s \cos u$ ,  $r_1\beta = s \cos u$ . Die Relation

$\frac{s}{\rho} = \frac{1}{2} (\alpha + \beta)$  gibt somit

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right) \cos u,$$

**d. h.:** Wenn man in den Brennpunkten S und O Senkrechte zu den Brennstrahlen ST und OT zieht, welche Senkrechten die Normale des

Punktes T in N und N<sub>1</sub> treffen, so wird der Krümmungsradius TA von den Punkten N und N<sub>1</sub> harmonisch getheilt.

Aber, wenn e die Excentricität, so dass OS = 2ae = e(r + r<sub>1</sub>), so sind die Abschnitte, in welche die Normale TA die Brenndistanz theilt (Fig. 37), SE = er und OE = er<sub>1</sub>. In der That, es ist einerseits SE + OE = e(r + r<sub>1</sub>), und andererseits, da TE den Winkel STO halbirte,  $\frac{SE}{OE} = \frac{r}{r_1}$ . Sei ferner n die von der Hauptaxe begrenzte Strecke TE der Normalen, so geben die Dreiecke STE und OTE

$$\begin{aligned} e^2 r^2 &= r^2 - 2 r n \cos u + n^2, \\ e^2 r_1^2 &= r_1^2 - 2 r_1 n \cos u + n^2. \end{aligned}$$

Es sind demnach r und r<sub>1</sub> die beiden Wurzeln der Gleichung  $(1 - e^2) r^2 - 2 r n \cos u + n^2 = 0$ , und somit ist  $(1 - e^2) r r_1 = n^2$ ,  $(1 - e^2) (r + r_1) = 2 n \cos u$ .

Führen wir diese Werthe in den obigen Ausdruck

$$\varrho = \frac{2 r r_1}{(r + r_1) \cos u} \text{ ein, so erhalten wir } \varrho = \frac{n}{\cos u^2}.$$

Wenn daher die Halbirungsgerade des Winkels STO die Hauptaxe in E schneidet, so ziehe man durch E einen Strahl ED senkrecht zu ET, und durch D, wo dieser Strahl den Brennstrahl OT trifft, eine Gerade DA senkrecht zu OT; dann schneidet diese letztere die Normale TE im Krümmungscentrum A des Punktes T.

Für die Scheitel der Hauptaxe versagt diese Construction. Die Perpendikel aber, die man in den Brennpunkten O und S auf den Brennstrahlen eines solchen Scheitels errichtet, treffen die Normale dieses Scheitels in den Punkten O und S selber. In diesem Falle gibt also der frühere Satz: **Der Krümmungsradius eines Hauptscheitels einer Ellipse wird von den Brennpunkten O und S harmonisch getheilt.**



### Resumé.

Zum Schlusse wollen wir die wesentlichsten Resultate der vorangehenden Untersuchung zusammenfassen:

Von einem festen Punkte  $O$  auf der Peripherie eines Kreises werden Strahlen nach einem variablen Punkte  $X$  dieses Kreises gezogen, und auf diesen Strahlen je von  $X$  aus die Strecken  $XP$  und  $XP_1$  gleich dem Radius des Grundkreises nach beiden Seiten aufgetragen. — Die Ortscurve der Punkte  $P$  und  $P_1$  ist auch die Fusspunktencurve des Punktes  $O$  in Bezug auf einen mit dem obigen gleich grossen Kreis, der den andern Endpunkt des durch  $O$  gehenden Durchmessers jenes zum Centrum hat (Nr. 5). — Die nämliche Curve entsteht beim Rollen eines Kreises vom Radius  $\frac{R}{2}$  auf einem mit dem rollenden gleich grossen Kreise; ein mit dem Rollkreise fest verbundener Punkt im Abstand  $R$  vom Centrum dieses beschreibt die Curve (Nro. 7).

Diese Curve kann in verschiedener Weise zur Dreitheilung eines Winkels verwerthet werden (Nr. 3 und 6).

Die Normalen der beiden Punkte  $P$  und  $P_1$  der Curve, die irgend einem gegebenen Punkte  $X$  des Grundkreises entsprechen, gehen durch den andern Endpunkt  $Y$  des durch  $X$  gehenden Durchmessers des Grundkreises (Nr. 9).

Ein Kreis, den wir um irgend einen Punkt  $Z$  des Grundkreises mit einem Radius  $= \frac{1}{2} ZO$  schlagen, berührt sowohl die äussere als die innere Schleife der Curve. Die Berührungspunkte  $P$  und  $P_1$  dieses Kreises sind die Schnittpunkte desselben mit einem neuen Kreise, den wir durch  $O$  und  $Z$  orthogonal zum Grundkreise legen. Die Radien-Vektoren  $OP$  und  $OP_1$  dieser Berührungspunkte bilden gleiche Winkel mit dem Radius-Vektor des Centrum  $Z$  des berührenden Kreises, und zwischen den Polarwinkeln  $\varphi$  und  $\varphi_1$  jener Punkte besteht die Relation  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 3 \operatorname{tg} \frac{\varphi_1}{2}$  (Nr. 10).

Die Evolute unserer Curve ist die durch Reflexion entstehende Brennlinie eines mit dem Grundkreise concentrischen Kreises von halb so grossem Radius, wenn die Strahlen vom Punkte 0 ausgehen (Nr. 13). — Diese Evolute wird auch von dem einen Brennpunkt eines Kegelschnitts beschrieben, der den obigen Hilfskreis in einem variablen Punkte oskulirt und den festen Punkt 0 zum anderen Brennpunkt hat (Nr. 14).

Die Gesamtfläche der Curve, d. h. die Summe der beiden Schleifen, ist das Dreifache von der Fläche des Grundkreises (Nr. 20). — Die Curve hat mit einer Ellipse, deren halbe Axen die Symmetrieaxe und der hiezu senkrechte Radius-Vektor der Curve sind, gleichen Flächeninhalt und gleichen Umfang (Nr. 21). — Wenn ein mit dem Grundkreise gleich grosser Kreis auf einer festen Geraden rollt, und ein mit diesem festverbundener Punkt, in einer Distanz vom Centrum gleich dem Kreisdurchmesser, eine verkürzte Cykloide beschreibt, so hat die obige Curve mit dieser Rollcurve gleiche Bogenlänge und halb so grossen Flächeninhalt (Nr. 22).

~~~~~  
**Prof. Dr. H. Dor.**

## Notiz über drei Schädel

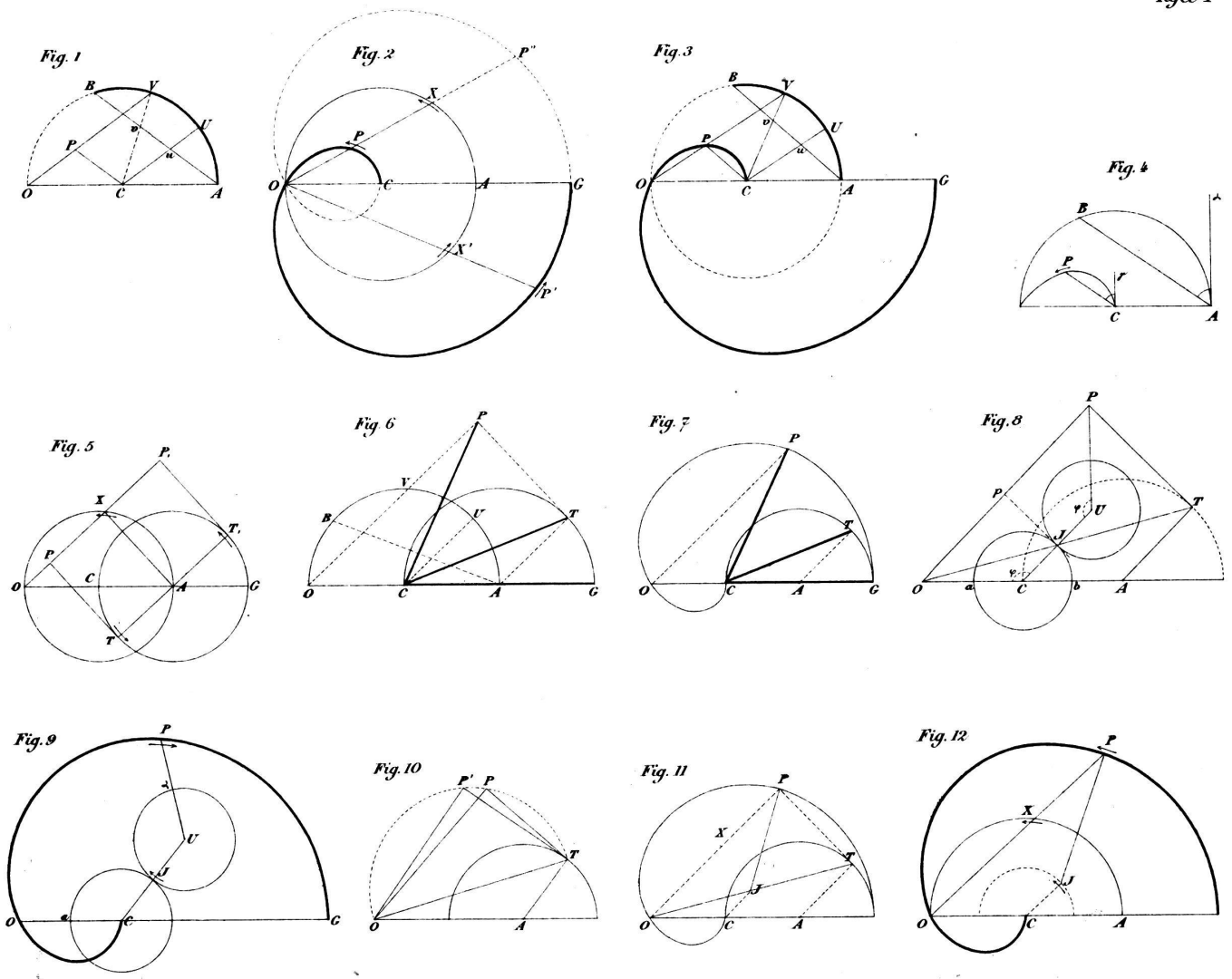
aus den schweiz. Pfahlbauten

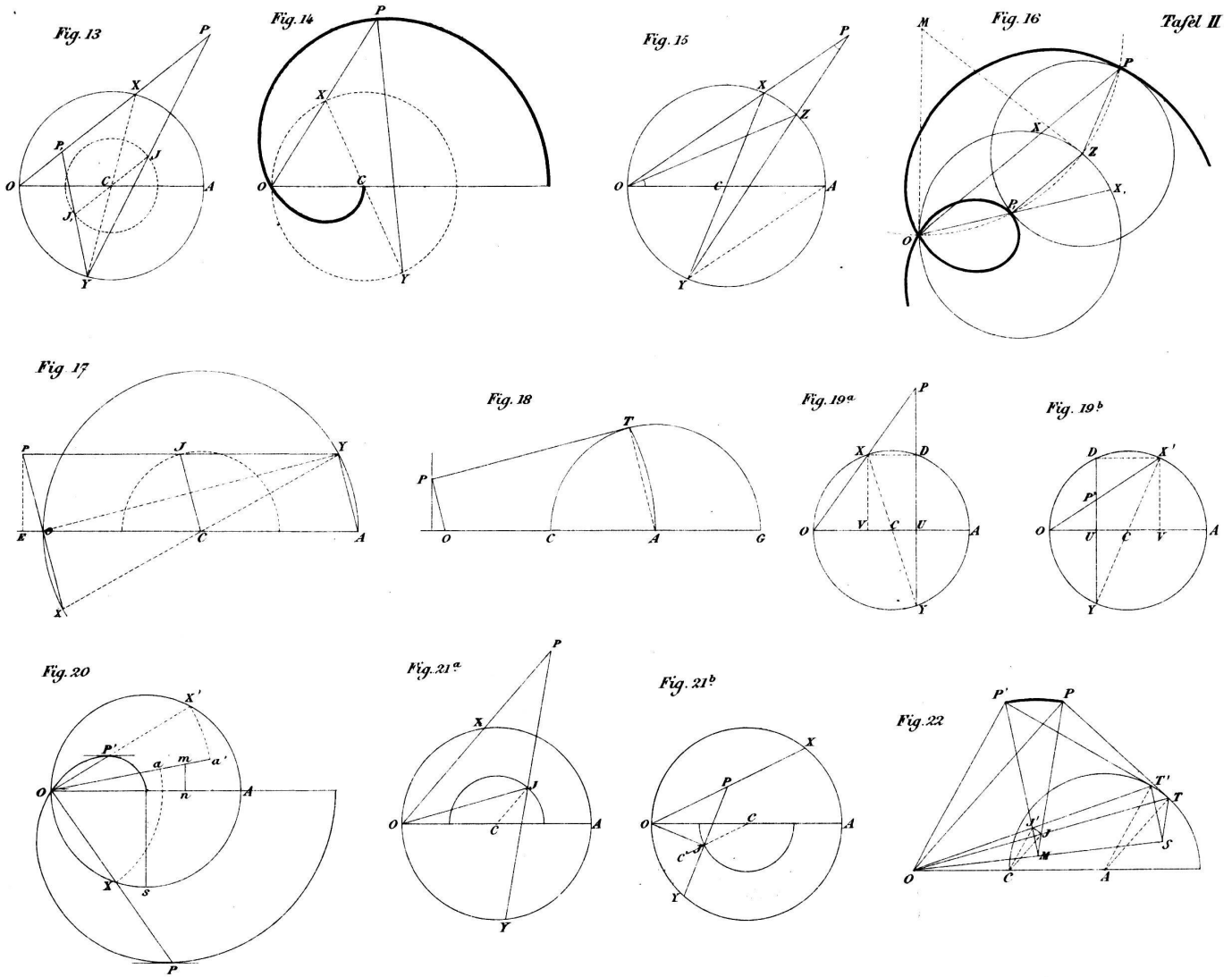
Greng bei Murten, Lüscherz und Mörigen am Bielersee.

~~~~~  
Vorgetragen in der Sitzung vom 28. Februar 1873.

~~~~~  
Die Seltenheit der menschlichen Ueberreste in den schweizerischen, wie ausländischen Pfahlbauten hat bekanntlich die Archäologen zur Ansicht gebracht, welche durch die zahlreichen Funde von Aschenurnen

Tafel I





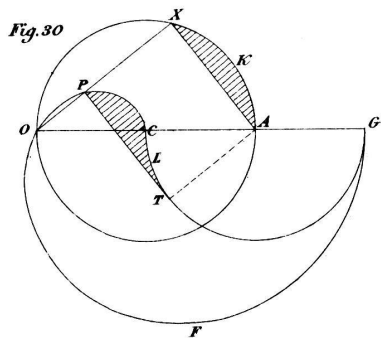
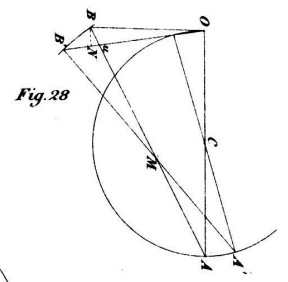
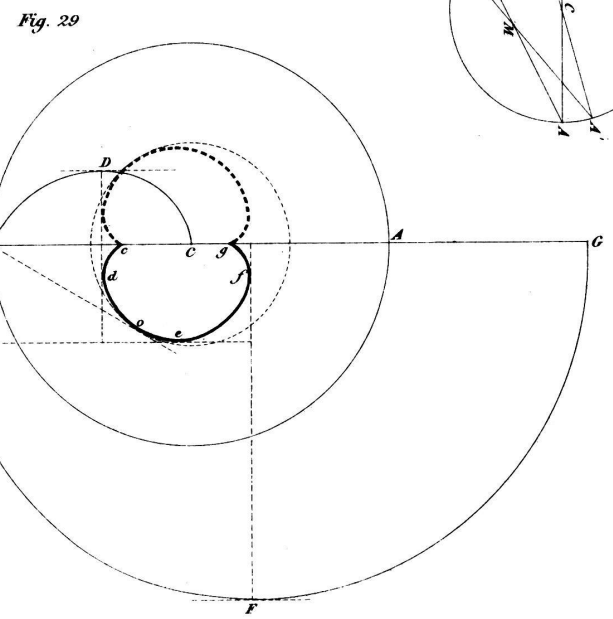
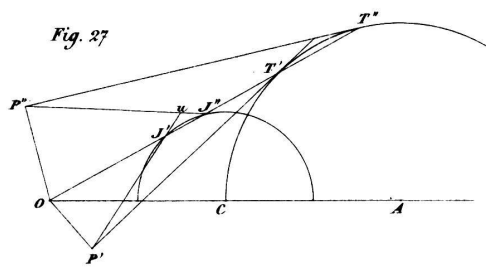
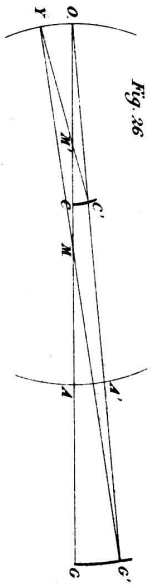
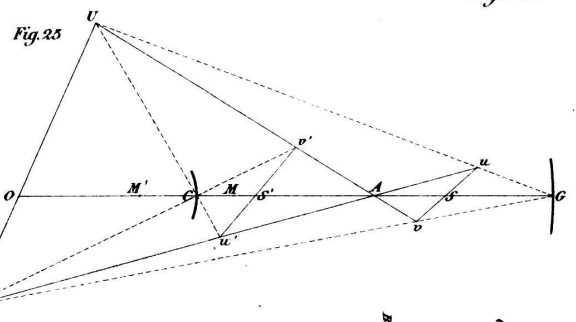
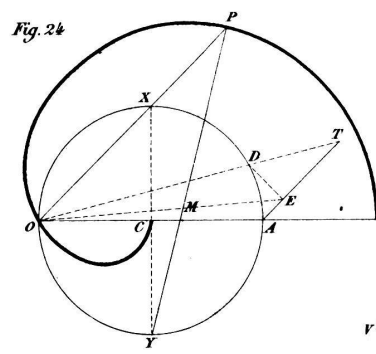
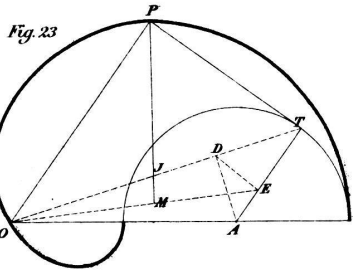


Fig. 31

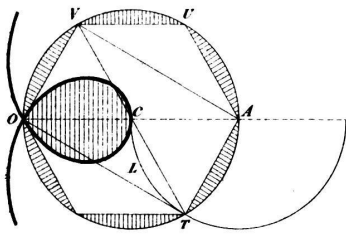


Fig. 32

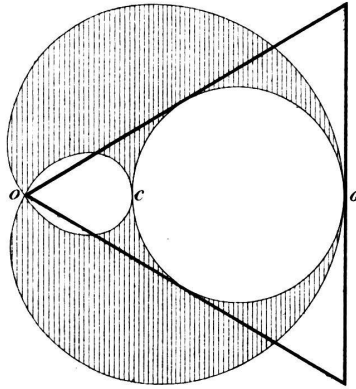


Fig. 33

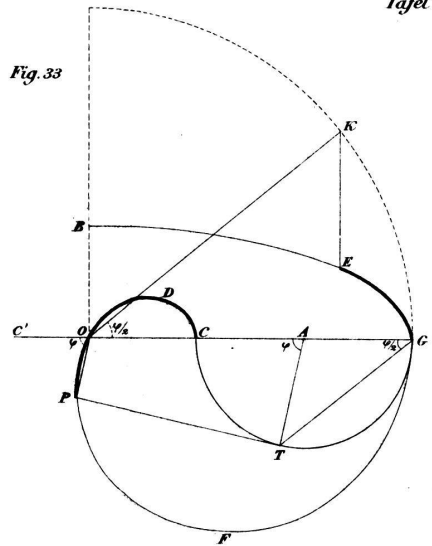


Fig. 34

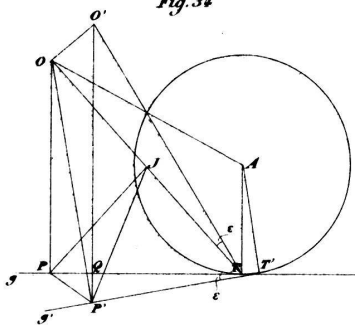


Fig. 37

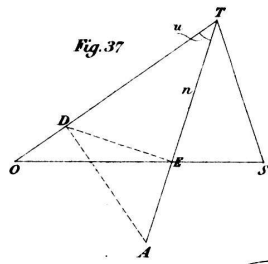


Fig. 36

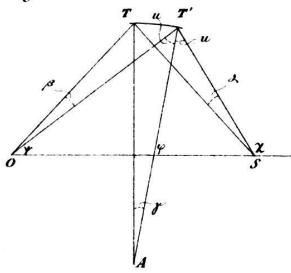


Fig. 35

