direkt durch äussere Ursachen zu Stande gebracht werden. Es müssen die innern Faktoren verändert werden. Jedoch können erstere einen Anstoss zu letztern geben, also eine Variation indirekt bedingen.

Aus dem Gesagten lässt sich auch noch ohne Weiteres ableiten, dass niedere Pflanzen, in denen verhältnissmässig wenige Faktoren bei ihrer Entwicklung sich bethätigen, weniger Aussicht auf eine Abänderung derselben haben, als höhere Gewächse, wo die Faktoren sehr zahlreich und complizirt sind. Ein jeder sorgfältige Mycologe oder Algologe wird uns sagen, dass die niedern Gewächse, wie Pilze und Algen, constanter seien als die höhern Gewächse. So spricht also diese Thatsache nicht gegen die Descendenz, sondern macht eine solche nur noch wahrscheinlicher.

J. Schönholzer.

Ueber eine Anwendung der Formel von Cauchy.

I.

In einer Vorlesung im Sommersemester 1871 wurde von meinem hochverehrten Lehrer, Herrn Professor Schläfli, eine grössere Anzahl bestimmter Integrale dadurch ausgewerthet, dass er den Integrationsweg zu einer einen Unstetigkeitspunkt umschliessenden Curve erweiterte und dann die bekannte Formel von Cauchy

$$\int \frac{F(x)}{x-a}\, dx = 2i\pi\, F(a) \text{ anwandte.}$$

(Die Variable x wird in der Richtung der wachsenden Winkel um a herum geführt. Wenn nun aus den beiden Integrationswegen auf das Verhältniss der beiden Integrale geschlossen werden kann, so ist auch das erste Integral bestimmt.

Obige Formel geht aus folgender einfachen Betrachtung hervor. Wir setzen $x - a = \varrho e^{i\varphi}$; also $dx = i\varrho e^{i\varphi} d\varphi$. Wenn x in der Richtung der zunehmenden Winkel den Punkt A, der einen beliebigen reellen oder imaginären Werth a repräsentirt, umläuft, so wächst φ von o bis 2π. F(x) bleibe für x = a, sowie auch für alle zunächst liegenden Werthe endlich und stetig. Wenn wir daher ϱ klein genug wählen, so convergirt F(x) gegen einen bestimmten endlichen Werth F(a). Es ist daher

$$\int \frac{F(x)}{x-a} = iF(a) \int_0^{2\pi} d\varphi = 2i\pi \cdot F(a).$$

Ein einfaches Beispiel soll die oben erwähnte Methode näher erklären. Es sei (1) $A = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$. Wenn wir x durch — x ersetzen, so wird der Werth des Nenners nicht geändert; dx und die obere Grenze ändern das Zeichen.

Somit ist $A = -\int_0^{-\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2}$. Die obere Grenze dieses letzten Integrals stimmt mit der untern des gegebenen Integrals überein. Wir können daher addiren und erhalten:

$$(2) \qquad 2A = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$$

Für unendlich grosse Werthe von x verhält sich dieses Integral wie $\int \frac{dx}{x^2}$ oder wie $-\frac{1}{x}$; d. h. es verschwindet. Der Werth von (2) wird daher nicht geändert, wenn dem Integrationsweg noch der Halbkreis hinzugefügt wird, welcher von $+\infty$ über $i\infty$ nach $-\infty$ führt. Dann ist der Integrationsweg eine in sich selbst zurückkehrende Curve, welche den Unstetigkeitspunkt $x = i$ umschliesst. Die Variable läuft in der Richtung der zunehmenden Winkel. Der zweite Unstetigkeitspunkt $x = -i$ bleibt ausgeschlossen. Wir können daher den Integrationsweg um $+i$ zusammenziehen und die Formel von Cauchy anwenden. Da $x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$, so ist $F(x) = \frac{1}{x+i}$ u. $F(a) = \frac{1}{2i}$.

$$\text{Also: } 2A = \int \frac{dx}{x-i} \cdot \frac{1}{x+i} = 2i\pi \cdot F(a) = \pi,$$

$$\text{oder: } A = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Im vierten Band des Crelle'schen Journals bestimmt Lejeune-Derichlet das Integral

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-czi}\, dz}{(l^2+z^2)\,(k+iz)^a\,(k_1+iz)^{a_1}\,(k_2+iz)^{a_2}\ldots}$$

Dasselbe ist besonders geeignet, die Vortheile dieser Methode in einem äusserst günstigen Licht zu zeigen. Die Constanten c und l seien positiv; $k, k_1, k_2 \ldots$ und $a, a_1, a_2 \ldots$ sollen wenigstens eine positive, reelle Componente besitzen. Da $l^2+z^2 = (z+il)(z-il)$, so liefert dieser Faktor des Nenners die zwei Unstetigkeitspunkte $z = +il$ und $z = -il$. Die übrigen Faktoren des Nenners werden nur für solche Werthe der Variablen gleich Null, deren imaginäre Componente positiv ist. Die von ihnen herrührenden Unstetigkeitspunkte liegen somit oberhalb der Realitätsgeraden. Unterhalb derselben liegt nur e i n Unstetigkeitspunkt $z = -il$. Wir sehen nun leicht ein, dass der Integrand für alle Werthe von z, welche auf einem Halbkreis liegen, der von $+\infty$ über $-i\infty$ nach $-\infty$ führt, unendlich klein von höherer Ordnung ist. Für diese Strecke ist daher auch der Werth des Integrals gleich Null. Das gegebene Integral wird daher denselben Werth beibehalten, wenn wir dem Integrationsweg von $-\infty$ nach $+\infty$ noch den südlich von der Realitätsgeraden liegenden Halbkreis, auf welchem die Variable von $+\infty$ nach $-\infty$ zurückläuft, hinzufügen. Nun ist aber der Integrationsweg eine geschlossene Curve, welche den Unstetigkeitspunkt $z = -il$ in der Richtung der abnehmenden Winkel umschliesst. Wenn wir, um den Satz von Cauchy anwenden zu können, die Richtung des Integrationsweges ändern, so müssen wir das Integral mit dem Faktor -1 multipliziren. Wir erhalten nun:

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ciz}\, dz}{(l^2+z^2)\,(k+iz)^a\,(k+iz)^{a_1}\,(k+iz)^{a_2}\ldots}$$

$$= -\int \frac{dz}{(z+il)} \cdot \frac{e^{-ciz}}{(z-il)\,(k+iz)^a\,(k_1+iz)^{a_1}\ldots}$$

F(z) ist also $= \dfrac{e^{-ciz}}{(z-il)\,(k+iz)^a \cdot (k_1+iz)^{a_1}\ldots}$, und

$F(-il) = \dfrac{e^{-lc}}{-2il\,(k+l)^a\,(k_1+l)^{a_1}\ldots}$ Die Formel von Cauchy liefert unmittelbar

$$S = -2i\pi \cdot F(-il)$$

$$S = \frac{\pi e^{-lc}}{l(k+l)^a\,(k_1+l)^{a_1}\,(k_2+l)^{a_2}\ldots}$$

Bei dieser Art der Integration, die an Kürze gewiss nichts zu wünschen übrig lässt, haben wir den weitern Vortheil, dass sich die Convergenzbedingungen unmittelbar aus der Lage der Unstetigkeitspunkte ergeben. Die Constanten können auch so gewählt werden, dass nördlich von der Realitätsgeraden nur ein Unstetigkeitspunkt auftritt und der Integrationsweg mit Hülfe eines Halbkreises, welcher von $+\infty$ über $i\infty$ nach $-\infty$ führt, in eine geschlossene Curve verwandelt werden kann.

II.

Häufige Anwendungen der bei den vorhergehenden Integrationen vorgeführten Methode brachten mich auf den Gedanken, auf ähnliche Weise solche Integrale zu bestimmen, bei denen der Faktor des Nenners, welcher den Unstetigkeitspunkt liefert, nicht in der ersten, sondern in einer höhern Potenz vorkommt.

Durch wiederholte Differentiation nach a erhalten wir aus der Formel von Cauchy:

$$\int \frac{F(x)\,dx}{x-a} = 2i\pi \cdot F(a).$$

$$\int \frac{F(x)\,dx}{(x-a)^2} = 2i\pi \cdot F'(a).$$

$$1.\,2.\int \frac{F(x)\,dx}{(x-a)^3} = 2i\pi \cdot F''(a).$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$n!\int \frac{F(x)\,dx}{(x-a)^{n+1}} = 2i\pi\, F^n(a),$$

$$\text{(I.)}\quad \text{oder} \int \frac{F(x)\,dx}{(x-a)^{n+1}} = 2i\pi \cdot \frac{F^n(a)}{n!}.$$

Bei allen diesen Integralen führt der Integrationsweg rechtläufig, d. h. in der Richtung der wachsenden Winkel um a herum; $F^n(a)$ ist der n^{te} Differentialquotient von $F(x)$, in welchem x durch a ersetzt worden ist.

Mit Hülfe derselben ist es leicht, den Werth des Integrals

$A = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$, in welchem n eine ganze positive Zahl bedeutet, zu finden. Es ist offenbar wieder

$A = \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$, wenn wir für x die neue Variable — x einführen. Daraus folgt:

$2\,A = \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}$. Für jeden unendlich grossen Werth von x ist dieses Integral gleich Null; denn es verhält sich, abgesehen von einem endlichen Faktor, wie $\frac{1}{x^{2n+1}}$. Es darf also dem Integrationsweg noch der Halbkreis hinzugefügt werden, welcher von $+\infty$ über $+i\infty$ nach $-\infty$ führt, ohne dass der Werth des Integrals verändert wird. Dadurch wird er zu einer geschlossenen Curve, welche den Unstetigkeitspunkt $x = i$ umschliesst und um denselben zusammengezogen werden darf.

Wenn wir x^2+1 in zwei Faktoren zerlegen und $\frac{1}{(x+i)^{n+1}} = F(x)$ setzen, so können wir auf unser Integral unmittelbar die Formel (I) anwenden. Wir finden

$$2\,A = \int \frac{dx}{(x-i)^{n+1}} \cdot \frac{1}{(x+i)^{n+1}} = \frac{2i\pi}{n!}\, \mathrm{D}_a^n \frac{1}{(x+i)^{n+1}},$$

wo D_a^n die n-malige Differentiation und die nachherige Substitution $x = a = i$ bezeichnen soll. Nun ist

$$\mathrm{D}_x^n (x+i)^{-(n+1)} = (-1)^n (n+1)(n+2)(n+3)\ldots 2n \cdot (x+i)^{-(2n+1)}$$

und $\mathrm{D}_a^n (x+i)^{-(n+1)} = (-1)^n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\ldots$

$2n \cdot (2i)^{-(2n+1)}$, daher: $2\,A = \frac{2i\pi}{n!}\;\frac{(-1)^n (n+1)(n+2)\,..\,2n}{2^{2n+1} \cdot i^{2n+1}}$

$$= \frac{2n!}{n!\;n!\;2^{2n}}\,\pi, \text{ da } i \cdot (-1)^n = i^{2n+1}$$

und Zähler und Nenner mit n! multiplizirt werden dürfen.

Die einzelnen 2 von 2^{2n} reichen gerade aus, um jeden Faktor der beiden Fakultäten des Nenners zu verdoppeln. Dividiren wir noch Zähler und Nenner durch 2 . 4 . 6... 2n, so bekommen wir

$$2\,A = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7 \ldots (2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8 \ldots 2n} \cdot \pi$$

und $A = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7 \ldots (2n-1)}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8 \ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$

$$= \binom{n-{}^1\!/_2}{n} \frac{\pi}{2}.$$

Eine ähnliche Behandlung gestattet das Integral $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n}\varphi \, d\varphi$, das bekanntlich mit $\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$ identisch ist. Durch die Substitution $\sin\varphi = \frac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$ erhalten wir zunächst

$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{tg^{2n}\varphi\,.\,d\varphi}{(1+tg^2\varphi)^n}$. Wir setzen $tg\,\varphi = x$; also $\varphi =$ arc tg x und $d\varphi = \frac{1}{1+x^2}\,dx$. Dann ist

$$A = \int_0^\infty \frac{x^{2n}\,dx}{(1+x^2)^{n+1}} \text{ und } 2\,A = \int_{-\infty}^\infty \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n+1}}.$$

Aehnlich wie oben kann der Integrationsweg zu einer geschlossenen Curve ergänzt und dann um den Unstetigkeitspunkt x = i zusammengezogen werden.

$$2\,A = \int \frac{x^{2n}}{(1+x^2)^{n+1}} = \int \frac{dx}{(x-i)^{n+1}} \cdot \frac{x^{2n}}{(x-i)^{n+1}}$$

Die Variable x wird rechtläufig um i herum geführt.

Um die Formel (I) anwenden zu können, setzen wir $F(x) = x^{2n}\,(x+i)^{-(n+1)} = (-i)^{n+1}\,x^{2n}\,(1-ix)^{-(n+1)}$, oder wenn wir nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln:

$$F(x) = (-i)^{n+1}\,x^{2n}\,(1-(n+1)\,(-ix) + \frac{(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2}\,(-ix)^2 - \frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3}\,(-ix)^3 + \ldots)$$

$$= (-i)^{n+1} \left\{ x^{2n} - (n+1)\,(-ix)\,x^{2n} + \frac{(n+1)\,(n+2)}{1\,.\,2}\,(-ix)^2\,x^{2n} - \frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3}\,(-ix)^3\,x^{2n} + \ldots \right\}.$$

Nun können wir leicht n-mal differentiren, und nach der Differentiation $2n\,.\,(2n-1)\ldots(n+1)\,x^n$ als gemeinschaftlichen Faktor absondern.

$$F^n(x) = (-i)^{n+1}\,2n\,.\,(2n-1)\ldots(n+1)\,x^n \left\{ 1 - (2n+1)\,(-ix) + \frac{(2n+1)\,(2n+2)}{1\,.\,2}\,(-ix)^2 - \frac{(2n+1)\,(2n+2)\,(2n+3)}{1\,.\,2\,.\,3}\,(-ix)^3 + \ldots \right\}$$

Der in der Klammer befindliche Ausdruck ist offenbar $(1-ix)^{-(2n+1)}$; daher

$$F^n(x) = (-i)^{n+1}\,.\,2n\,.\,(2n-1)\ldots(n+1)\,x^n\,(1-ix)^{-(2n+1)}$$

und wenn wir x durch i ersetzen:

$$F^n(i) = (-i)\,2^{-(2n+1)}\,.\,2n\,.\,(2n-1)\ldots(n+1).$$

Setzen wir diesen Werth in (I) ein, so bekommen wir

$$2\,A = \frac{2\pi\,.\,2n\,.\,(2n-1)\ldots(n+1)}{n!\;2^{n+1}}$$

$$A = \frac{(2n)!}{n!\;n!\;2^n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4\,.\,5\ldots 2n}{2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n\,.\,2\,.\,4\,.\,6\ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots . (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots \ldots 2n} \cdot \frac{\pi}{2} = \binom{n-1/2}{n} \frac{\pi}{2}.$$

So können zahlreiche andere Integrale leicht bestimmt werden. Passende Beispiele finden sich z. B. in der Differential- und Integralrechnung von Spitz. Glaisher hat in der „Educational Times“ die Auswerthung einiger bestimmten Integrale als Aufgaben gestellt. So verwickelt dieselben beim ersten Anblick erscheinen, so führt doch das oben angegebene Verfahren leicht zum Ziel.

Edmund v. Fellenberg.

Bericht an die Tit. Direktion der Entsumpfungen über die Ausbeutung der Pfahlbauten des Bielersees

im Jahre 1873 und 1874.*)

Mit einer Profiltafel.

Einleitung.

Durch die Arbeiten der Juragewässercorrection war im Jahre 1873 der Spiegel des Bielersees bereits so tief gesunken, dass eine Anzahl der dortigen Pfahlbauten theilweise oder in ihrer ganzen Ausdehnung trocken gelegt waren. Schon im Herbste 1872 war beim damaligen tiefsten Wasserstand ein grosser Theil der beträchtlichen Pfahlbauten vor dem Dorfe Lüscherz trocken gelegt worden, und da seit dem Sommer des Jahres 1869, in welchem der Berichterstatter auf diesem Pfahlbau bei 4—5′ Wasser nach Artefacten suchen und

*) Vergl. Protokoll vom 28. Februar und 14. März 1874.