kosten hat sich Herr Edmund von Fellenberg entschlossen seine werthwolle Mineraliensammlung schon jetzt dem Museum seiner Vaterstadt zum Geschenk zu machen.

Diese Sammlung ist die Frucht vieljährigen enthusiastischen Eifers, ausgedehnter Reisen und sehr bedeutender ökonomischer Opfer. Sie enthält einzelne Unica, manche seither nicht mehr gefundene Vorkommnisse und es darf ihr Werth auf über 8000 Fr. angeschlagen werden. Die stete Anerkennung der Mitbürger, der Dank der Vertreter der Wissenschaft und die fortdauernde lebhafte Theilnahme an der Förderung unserer städtischen Mineraliensammlung gewähren dem wohlwollenden Donator die edelste Befriedigung. Vivat sequens !

J. H. Graf.

Vertauschung von Parameterweg und Argumentweg bei einem Normalintegral 3. Art algeb. Funktionen.

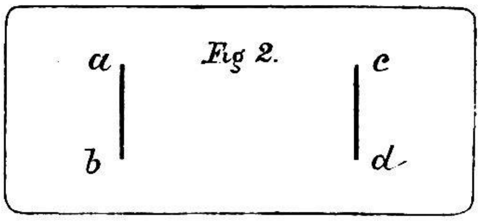
(Vorgetragen in der mathem. Sectionssitzung vom 28. März 1877.)

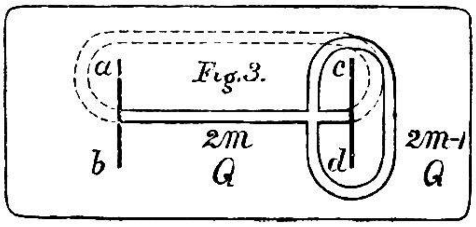
Denken wir uns eine homogene algebraische Gleichung

$$f(x, y, z)^{n} = 0.$$

Setzen wir $z = 1$, dann ist durch diese Gleichung, wo x die unabhängige Variable bedeutet, y als algebraische Function von x gesetzt. Zu jedem Werthe von x gehören n verschiedene Werthe von y und wir haben zur Notirung dieser Werthe n verschiedene Blätter nöthig. Wo 2 oder mehrere solche Werthe zusammenfallen, da gehen die Blätter in einander über; diese Stellen sind die Verzweigungspunkte. Dieser Uebergang muss aber nothwendig längs einer Linie, der Uebergangslinie geschehen. Wir erhalten so eine n-blättrige Fläche, die Riemann'sche Fläche. Dieselbe kann nun durch ein System von 2p Schnitten, die um die Uebergangslinien gelegt sind, einfach zusammenhangend gemacht werden, d. h. so umgestaltet werden, dass sich eine Curve, längs des neuen Randes gelegt, nach innen auf einen Punkt zusammenziehen lässt, so dass sich die so umgestaltete Fläche verhält wie ein begränztes Ebenenstück. Ein einfaches Beispiel wird die Sache klar machen.

Legen wir uns eine zweiblättrige Fläche vor mit zwei Uebergangslinien, Fig. I sei ein Durchschnitt derselben, so wird sie sich von oben so präsentiren, wie es Fig. II darstellt, wo somit *a b* und *c d* die zwei Uebergangslinien sind. Um nun diese Fläche einfach zusammenhangend zu machen, nehmen wir folgendes vor: Fig. III.





Wir legen im ersten Blatt um die Uebergangslinie *cd* einen klaffenden Schnitt, dann gehen wir vom linken Ufer dieses Schnittes durch die Uebergangslinie *cd* hindurch und gelangen in's untere Blatt, kehren zur Uebergangslinie *ab* zurück, durch dieselbe in's erste Blatt und langen endlich auf dem rechten Ufer unseres ersten Schnittes wieder an. Fahren wir dem erhaltenen Rande nach, so sehen wir, dass unser Weg sich schliesst, also die Fläche nun einfach zusammenhangend gemacht worden ist. — Ist nun die Fläche n-blättrig, so wird der nämliche Process einfach eine genügende Anzahl mal wiederholt. Nun hat sich gezeigt, dass ein System von 2 p Querschnitten nöthig ist, um die Riemann'sche Fläche einfach zusammenhangend zu machen. Nach Clebsch und Gordan ist

$$p = \frac{(n-1)\,(n-2)}{2} - d$$

d. h. gleich dem Maximum der Doppelpuncte einer Curve n^{ten} Grades weniger die wirkliche Anzahl derselben. —

Wir unterscheiden nun algebraische Integrale 1ter, 2ter und 3ter Art. Integrale erster Art sind solche, welche im endlichen nirgends unendlich gross werden; man kann zeigen, dass deren p existiren, von denen jedes eine lineare Relation der p — 1 übrigen ist. Integrale 2ter Art sind solche, welche im endlichen nur algebraische Unstetigkeiten haben und endlich Integrale 3ter Art sind solche, die mit logischen Unstetigkeiten behaftet sind. Verweilen wir bei der 3ten Art. Ein algebr. Integral 3ter Art ist auf folgende Weise definirt:

$$\underset{A A'}{S} = \int \frac{V}{(a\,b'\,z)} \; \frac{z\,dx - x\,dz}{f_y}$$

wo V ein Polynom vom Grade n — 2 in (x, y, z) und

$$(a\,b'\,z) = \begin{vmatrix} a \cdot b \cdot c \\ a' \cdot b' \cdot c' \\ x \cdot y \cdot z \end{vmatrix}$$

und $$f_y = \frac{d\,f(x, y, z)}{d\,y}^{n}$$ bedeutet.

Man kann nun zeigen, dass ein solches Integral nur zweimal log. unstetig wird, nämlich
im Puncte A wie — log (a b′ z)
„ „ A′ „ log (a b′ z). Diese beiden Puncte heissen Parameterpuncte des Integrals 3ter Art. Setzt man $c = 1$, $c' = 1$, $z = 1$, so gehen die Unstetigkeitslogarithmen bei Vernachlässigung einer Constanten über in — log (x — a)
\+ log (x — a′)

Setze ich endlich statt a und a′ die Werthe α und β, so heissen die Unstetigkeitslog. — log (x — α)
log (x — β), wo α der untere und β der obere Parameterpunct ist.

Was das Verhalten dieses Integrals an dem gelegten Querschnittsystem anbetrifft, so sei der Betrag desselben z. B. bei einem Querschnitt
Q^1 auf dem linken Ufer um $\int^1_{\alpha\beta}$ grösser als auf dem rechten,
bei Q^2 auf dem l. Ufer um $\int^2_{\alpha\beta}$ „ „ „ „ rechten,

d. h. es ist

$$\overset{(1)}{\int} d\,S_{\alpha\beta} = \int^2_{\alpha\beta} \text{ und } \overset{(2)}{\int} d\,S_{\alpha\beta} = -\int^1_{\alpha\beta}$$ wo (1)

und (2) die Querschnitte, längs welchen das Integral geführt wird, bedeuten. Diese Beträge nun sind die sogen. Periodicitätsmasse und der obere Index varirt von 1 — ••• 2 p. Das Normalintegral 3ter Art lässt sich folgendermassen definiren:

$$\Pi_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \frac{1}{i\pi} \sum_{m=1}^{m=p} \int_{\alpha\beta}^{2m-1} U_m$$ d. h. es ist ein Integral 3ter Art, wo die Periodicitätsmasse an den ungeraden der 2p Querschnitte 0 sind und dann lässt sich zeigen, dass die Perioden an den geraden Querschnitten das doppelte desjenigen Integrals 1ter Art betragen, welches den Parameterweg zum Integrationsweg und den Zeiger dem Querschnitt entsprechend hat. Gehen wir nun zur Untersuchung des folgenden Integrals über:

$$\int \Pi_{\alpha\beta} \, d\, \Pi_{\gamma\delta}$$

längs des Randes der einfach zusammenhangend gemachten Riemann'schen Fläche.

Wir haben hier 2 Parameterwege $\alpha\,\beta$ und $\gamma\,\delta$. Wir setzen voraus, dass dieselben sich nicht begegnen und auch mit dem von uns gelegten Querschnittsystem nicht in Conflict kommen. Betrachten wir also vorerst jenes Integral als dem Rande der durch ein System von 2 p Querschnitten einfach zusammenhangend gemachten n-blättrigen Riemann'schen Fläche entlang geführt. Da nun die Fläche sich verhält wie ein begrenztes Ebenenstück, so kann man den Integrationsweg vom Rande herein ins Innere der Fläche bewegen, nur muss man sich vor den kritischen Puncten in Acht nehmen. Es sind nämlich auf der Fläche die log. Pole $\alpha\,\beta\;\gamma\,\delta$. Es zeigt sich bald, dass sich der Weg trennen und in mehrere Curven auflösen lässt. Der Weg zerfällt in eine geschlossene Curve um den log. Schnitt von α bis β. Da sich ferner das Integral in δ verhält wie

$\Pi_{\alpha\beta}^{\delta} \dfrac{dx}{x-\delta}$, so hat man weiter einen kleinen Kreis um δ und ebenso einen kleinen Kreis um γ herum. Der Weg sieht somit so aus wie ihn Fig. IV darstellt.

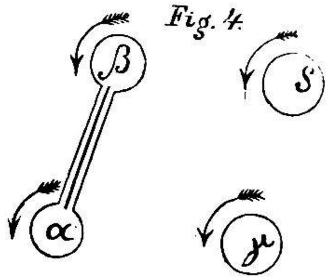


Fig. 4

Mitteln wir nun den Betrag aus. Bezeichnen wir das rechte Ufer mit $+$ und das linke mit $-$, so hat man vorerst bei Umlauf des log. Schnittes

$$\int \left(\overset{+}{\Pi}_{\alpha\beta} - \overset{-}{\Pi}_{\alpha\beta} \right) d\, \Pi\gamma\delta = 2 i \pi \int_{\beta}^{\alpha} d\, \Pi\gamma\delta$$

$$= -2 i \pi \int_{\alpha}^{\beta} d\, \Pi\gamma\delta$$

$$= -2 i \pi\, \Pi_{\gamma\delta}^{\alpha\beta} \qquad (1.)$$

Auf den kleinen Kreis um δ herum fällt, da dort der Integrand die Gestalt

$$\Pi_{\alpha\beta}^{\delta} \frac{dx}{x-\delta} \text{ hat, der Betrag}$$

$$\Pi_{\alpha\beta}^{\delta} \cdot 2 i \pi$$

Ebenso auf den kleinen Kreis um γ herum, da der Integrand von der Form

$$-\Pi_{\alpha\beta}^{\gamma} \frac{dx}{(x-\gamma)} \text{ ist,}$$

der Betrag: $\quad -2 i \pi\, \Pi_{\alpha\beta}^{\gamma}$, folglich zusammen auf die beiden Kreise:

$$2\,i\,\pi\,\overset{\delta}{\Pi}_{\alpha\beta} - 2\,i\,\pi\,\overset{\gamma}{\Pi}_{\alpha\beta} =$$

$$2\,i\,\pi\left(\overset{\delta}{\Pi}_{\alpha\beta} - \overset{\gamma}{\Pi}_{\alpha\beta}\right) = 2\,i\,\pi\,\overset{\gamma\delta}{\Pi}_{\alpha\beta} \qquad (2.)$$

Wir haben somit im Innern als Betrag des Integrals: (1.) + (2.) oder

$$-2\,i\,\pi\,\overset{\gamma\delta}{\Pi}_{\alpha\beta} + 2\,i\,\pi\,\overset{\alpha\beta}{\Pi}_{\gamma\delta} \qquad (3.)$$

Das Integral lässt aber noch eine andere Betrachtung zu: Wir können es auch bei dem Querschnittsystem verfolgen und da sich die nämliche Betrachtung bei allen Querschnittpaaren wiederholt, so ist es uns erlaubt, das Integral nur bei einem Querschnittpaar näher zu ermitteln. Da nun die Normalintegrale 3ter Art so definirt sind, dass sie bei ungeraden Querschnitten eine Periode $= 0$, bei geraden hingegen eine Periode besitzen: nämlich die doppelte u-Function genommen längs des Parameterweges, der Zeiger entspricht dem geraden Querschnitt, so haben wir bei einem ungeraden Querschnitte (Fig. III) $\overset{2m-1}{Q}$ eben 0, denn es ist

$$\int\left(\overset{+}{\Pi}_{\alpha\beta} - \overset{-}{\Pi}_{\alpha\beta}\right) d\,\Pi_{\gamma\delta} = 0,$$ weil die Π-Function auf beiden Ufern des Querschnittes den gleichen Werth hat. Bei $\overset{2m}{Q}$ wird das Resultat analog; so ist das Integral längs des Querschnittsystems genommen $= 0$. und daher muss (3.) $= 0$ sein, also

$$-2\,i\,\pi\,\overset{\gamma\delta}{\Pi}_{\alpha\beta} + 2\,i\,\pi\,\overset{\alpha\beta}{\Pi}_{\gamma\delta} = 0$$ somit folgt

$$\Pi_{\alpha\beta}^{\gamma\delta} = \Pi_{\gamma\delta}^{\alpha\beta}$$

Wir haben so auf einfache Weise den Satz erwiesen, dass man bei einem Normalintegral 3ter Art den Parameterweg mit dem Argumentweg vertauschen kann.*)

*) H. Clebsch und P. Gordan, Theorie der Abel'schen Funktionen, Pag. 117.

Rothen.

Ueber Ableitungen des elektrischen Stroms auf Telegraphenlinien.

(Vorgetragen in der Sitzung vom 14. April 1877.)

Eine absolute Isolirung der Telegraphenleitungen ist nicht möglich und zur ungehinderten Korrespondenz zwischen zwei entfernten Punkten auch nicht gerade nothwendig. Jeder Stützpunkt, auf dem der Draht ruht, öffnet dem Strom einen Weg nach der Erde, der indessen, bei normalem Isolator, einen elektrischen Widerstand von vielen Millionen Stromeinheiten repräsentirt und der daher, selbst wenn er durch die grosse Zahl der Isolatoren einer langen Linie dividirt wird, immer noch viel zu bedeutend über dem Widerstand des Leitungsdrahtes liegt, um den ankommenden Strom erheblich schwächen zu können.

Anders verhält es sich dagegen mit den zufälligen Ableitungen, die selbst auf der bestgebauten und