Einiges über Kreisprojectionen

Autor(en): **Benteli, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1878)**

Heft 937-961

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-318928

Alb. Benteli.

Einiges über Kreisprojectionen.

(Vorgetragen in der mathem. physikal. Section, den 13. Dezember 1878.)

Beim technischen Zeichnen, besonders in der Perspektive, in der Axonometrie, in der Schattenlehre, Steinschnitt, etc., kommt wohl nicht gerade eine Aufgabe so häufig vor, als diejenige der Kreisprojection, es ist daher wohl der Mühe werth, diesem Problem besondere Aufmerksamkeit zu schenken. Freilich fehlt es beim heutigen Stande der geometrischen Wissenschaft durchaus nicht an verschiedenartigen, mehr oder weniger vollkommenen Behandlungen des Kapitels über Kreisprojectionen, allein der Lehrer des Zeichnens empfindet eben bisweilen dennoch das Bedürfniss, Constructionen zu suchen, die möglichst einfach, gut und rasch zum Ziele führen und auch dem geometrisch weniger gebildeten Schüler begreiflich gemacht werden können. Wir finden im Anhang der zweiten Auflage des sehr verbreiteten und so reich mit Beispielen ausgestatteten Werkes über Perspective von G. Schreiber schon eine kleine Abhandlung über obigen Gegenstand, die dem eben angedeuteten Bedürfniss ihren Ursprnng verdanken mag. In ganz anderer Weise möchte nun der Vortragende durch folgende Mittheilungen ungefähr demselben Zwecke dienen.

Im zweiten Theile des interessanten Werkes über darstellende Geometrie von Professor K. Pohlke in Berlin finden wir unter dem Titel „Hauptaufgaben“ eine hübsche Construction von Kreistangenten mit ihren Berührungspunkten aus einem dem Kreise umschriebenen Quadrate.*)

Fig. 1. auf beigegebener Tafel enthält diese Construction in etwas stärker gezogenen Linien. Irgendwo zieht man eine Parallele EFG zum Durchmesser COD. Der Strahl von H über F gibt auf der Quadratseite QB den Schnittpunkt J, der mit E eine Kreistangente bestimmt, und endlich erhält man auf ihr durch Linie DG den Berührungspunkt K. Den Beweis für die Richtigkeit liefert Pohlke durch Rechnung. Da diese Construction sich ohne Weiteres auf Parallelprojectionen und unter Umständen auch leicht auf Centralprojectionen des Kreises übertragen lässt, so bietet sie uns ein ziemlich expedites Mittel zur richtigen Zeichnung von Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln.

Verfolgen wir nun aber die Construction weiter, fügen nur noch zwei Linien hinzu, so wird es uns leicht, einen anderen, rein geometrischen elementaren Beweis für die Richtigkeit zu geben und zugleich erhalten wir eine Construction, welche die Parallele EG zu CO überflüssig macht und daher viel leichter sich auf die Centralprojection des Kreises übertragen lässt. Ueberdiess ergeben sich für die Bestimmung der Tangenten-Berührungspunkte verschiedene Verfahren. Wir ziehen nämlich noch die Geraden AF und AN und sehen nach folgender Begründung ein, dass AF ebenfalls zum Berührungspunkt K und AN zum Punkte E führen muss.

---

*) Diese Construction, ohne Beweisführung, findet sich auch in der so reichhaltigen Sammlung geometrischer Constructionen von Busch, die sich vorzüglich eignet als Vorschule zur darstellenden Geometrie.

$\angle$ ALC = $\angle$ KLD und $\angle$ CAL = $\angle$LDK, da $\triangle$ ACF ähnlich $\triangle$ DOG, demnach $\angle$ ACL = $\angle$ LKD ; K muss also auf dem Kreise durch CAD liegen, da $\angle$ ACD = $\angle$ AKD. Aus der Congruenz der Dreiecke COE und OEK einerseits, und der Dreiecke OJK und OJB andererseits folgt $\angle$ OKE = 90° = $\angle$ OKJ, somit ist EKJ die Kreistangente in K.

Zur Begründung der eben angeführten Congruenzen beachte man erstens, dass $\angle$ COE = $\angle$ ODG = $\angle$ DKO = $\angle$ KOE und zweitens: $\triangle$ AFG ähnlich $\triangle$ OBJ,

$$\text{da } \frac{FG}{JB} = \frac{GM}{BM} = \frac{EH}{CH} = \frac{AG}{OB}$$

hieraus $\angle$ JOB = $\angle$ OAK = $\angle$ AKO = $\angle$ KOJ.

Es ist Winkel AKD = Winkel ACD = 45°, ferner, da EO $\parallel$ DK und JO $\parallel$ AK, auch Winkel EOJ = Winkel, AKD = 45°. Während also der Winkel ACD = 45° sich über AD dreht, der Scheitel C dabei stets auf dem Kreise durch ACD sich fortbewegt, schneiden die Schenkel eines zweiten Winkels von 45°, dessen Scheitel im Kreiscentrum liegt und dessen Schenkel denjenigen des ersten Winkels parallel laufen, die Quadratseiten HQ und QB in zwei Punkten, deren geradlinige Verbindung die Kreistangente zum Scheitel des ersten Winkels liefert.

Die Gerade AN schneide die Quadratseite HQ in $\mathfrak{E}$ und die Quadratseite BQ in P, PJ = AH = BQ, folglich PQ = JB; $\frac{Q\mathfrak{E}}{C\mathfrak{E}} = \frac{PQ}{NC} = \frac{BJ}{NC} = \frac{BF}{CF}$ also F$\mathfrak{E}$ $\parallel$ BQ; es ist aber schon FE $\parallel$ BQ, somit müssen $\mathfrak{E}$ und E zusammenfallen, und es ist zur Ermittluug einer Kreistangente die Parallele EFG zum Durchmesser CD überflüssig geworden. Wir construiren jezt Tangente und Berührungspunkt in folgender Weise. Von H und A ziehen wir Strahlen durch irgend einen Punkt N des

Durchmessers CD bis zu den Schnittpunkten E und J auf den Quadratseiten, so ist EJ eine Kreistangente. Ihr Berührungspunkt wird bestimmt durch den Strahl von A nach dem Schnittpunkt F des Strahls HN mit der Sehne CB. Durchläuft also N die ganze unbegrenzte Gerade DC, so bekommen wir in obiger Weise die ganze Gesammtheit der Kreistangenten mit ihren Berührungspunkten. Natürlich werden dabei die Strahlen AN und HN die Quadratseiten und CB auch in der Verlängerung schneiden. Fig. 2 zeigt je eine Construction für alle vier Quadranten.

Wenden wir nun noch die neuere Geometrie an, so erhalten wir zunächst eine ganz kurze Beweisführung für die Richtigkeit der eben mitgetheilten Tangentenconstruction, sodann ergibt sich eine neue Ermittlung der Berührungspunkte.

Die Punktreihe auf dem Durchmesser BD (Fig. 3.) wird von O_1 auf die Quadratseite O_2b_2 und von O_2 auf die Quadratseite c_1q_2 projicirt, dadurch erhält man auf diesen Quadratseiten zwei projectivische Punktreihen. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte a_1 und a_2, x_1 und x_2 etc. umhüllen daher einen Kegelschnitt und zwar sehen wir sofort die Bedingungen erfüllt, unter welchen ein Kreis umhüllt wird, denn:

1) Sehen wir die beiden nicht entsprechenden Endpunkte b_2 und c_1 der zwei entsprechend gleichen Strecken b_2c_2 und b_1c_1, welche die Gegenpunkte r_1 und q_2 (die entsprechenden Punkte zu den unendlich fernen Punkten je der anderen Punktreihe) ausschliessen, in einem Punkte vereinigt.

2) Die Neigung der beiden Punktreihenträger muss sich so herausstellen, dass das Quadrat des halben Abstandes der Gegenpunkte r_1 und q_2 gleich ist der Potenz

der projectivischen Beziehung $r_1x_1 \cdot q_2x_2$, d. h. es muss $\left(\frac{r_1 \; q_2}{2}\right)^2 = r_1x_1 \cdot q_2x_2$ sein. Diess ist hier so, da $\left(\frac{r_1 \; q_2}{2}\right)^2 = (r_1o)^2$ und $r_1x_1 \cdot q_2x_2 = r_1b_1 \cdot q_2b_2$, $(r_1o)^2$ ist aber wirklich $= r_1b_1 \cdot q_2b_2$.

Auf eine neue Construction der Berührungspunkte führt uns folgende Betrachtung:

Die geradlinigen Verbindungen a_1a_2, b_1b_2 etc., also zweier entsprechender Punkte der projectivischen Punktreihen $b_1a_1c_1x_1 \cdots$ und $b_2a_2c_2x_2 \cdots$ nennen wir in üblicher Weise Projectionsstrahlen. Ein Blick auf Fig. 3 überzeugt uns sofort, dass die Träger der beiden projectivischen Punktreihen selbst Projectionsstrahlen sind, denn rückt der von O_1 und O_2 zu projicirende Punkt auf dem Durchmesser BD nach B, so erhalten wir den Projectionsstrahl b_1b_2, rückt er aber in die Mitte C zwischen B und O, so bekommen wir den Projectionsstrahl c_1c_2. b_1 und c_2 sind die Berührnngspunkte beider Projectionsstrahlen und entsprechen beide dem Schnittpunkte b_2c_1 derselben.

Es kann nun zunächst leicht gezeigt werden, dass der Trägercharakter ganz ebenso gut sich auf zwei andere beliebige Projectionsstrahlen übertragen lässt, da durch projectivische Punktreihen auf Letztern dieselbe Gesammtheit von Projectionsstrahlen erzeugt werden kann. In Fig. 3 betrachten wir z. B. b_1b_2 und a_1a_2 als Träger, so erhalten wir die projectivischen Punktreihen zur Erzeugung der Projectionsstrahlen folgendermassen:

Der Projectionsstrahl x_1x_2 schneidet die beiden Träger b_1b_2 und a_1a_2 in den Punkten x_1 und x_3. Die Strahlbüschel x_1 $(b_2a_2c_2x_2)$ und x_3 $(b_1a_1c_1x_1)$ sind natürlich projectivisch und liegen, da zwei Elemente x_1x_2 und

x_3x_1 zusammenfallen, projectivisch, so dass die Schnittpunkte der entsprechenden Strahlen, nämlich b_1a_2 und $\mathfrak{x}$ in einer Geraden liegen. Umgekehrt sieht man nun, wie Strahlen von c_1 und c_2 aus durch $\mathfrak{x}$ auf den Trägern a_1a_2 und b_1b_2 die Punkte x_1 und x_3, d. h. einen Projectionsstrahl bestimmen. Durchläuft aber $\mathfrak{x}$ die Gerade $b_1a_2\,\mathfrak{x}$, so werden die Strahlen $c_1\mathfrak{x}$ und $c_2\mathfrak{x}$ auf diesen Trägern die ganze Gesammtheit von Projectionsstrahlen bestimmen.

Gleichwie nun die dem Schnittpunkte b_2c_1 der Träger b_1b_2 und c_1c_2 entsprechenden Punkte b_1 und c_2 die Berührungspunkte dieser Träger sind, so werden auch die dem Schnittpunkte a_1 der beiden Träger b_1b_2 und a_1a_2 entsprechenden Punkte die Berührungspunkte letzterer Träger sein. Um den Berührungspunkt auf dem Strahle a_1a_2 zu bekommen, hat man nur den a_1 entsprechenden Punkt des Trägers a_1a_2 zu suchen, man zieht demnach den Strahl c_2a_1, der die Axe $b_1a_2\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{a}$ trifft, und den Strahl $c_1\mathfrak{a}$, so gibt der Letztere auf a_1a_2 den a_1 entsprechenden Punkt, d. h. den Berührungspunkt für die Tangente a_1a_2.

In Fig. 4 sind nun die bis jetzt gefundenen Tangenten- und Berührungspunkt-Constructionen für eine Parallelprojection desKreises, für eineEllipse, zusammengestellt. Das rechtwinklige Durchmessersystem wird durch Parallelprojection zum System conjugirter Durchmesser AB und CD, das umschriebene Quadrat zum Parallelogramm 1234, Jeder Quadrant weist eine in etwas verschiedene Construction auf. In Quadrant I sehen wir Tangente und Berühruugspunkt nach Pohlke construirt. In Quadrant II, III und IV entstehen die Tangenten nach oben mitgetheilter Construction, in Quadrant II z. B. die Tangente FG durch die Strahlen

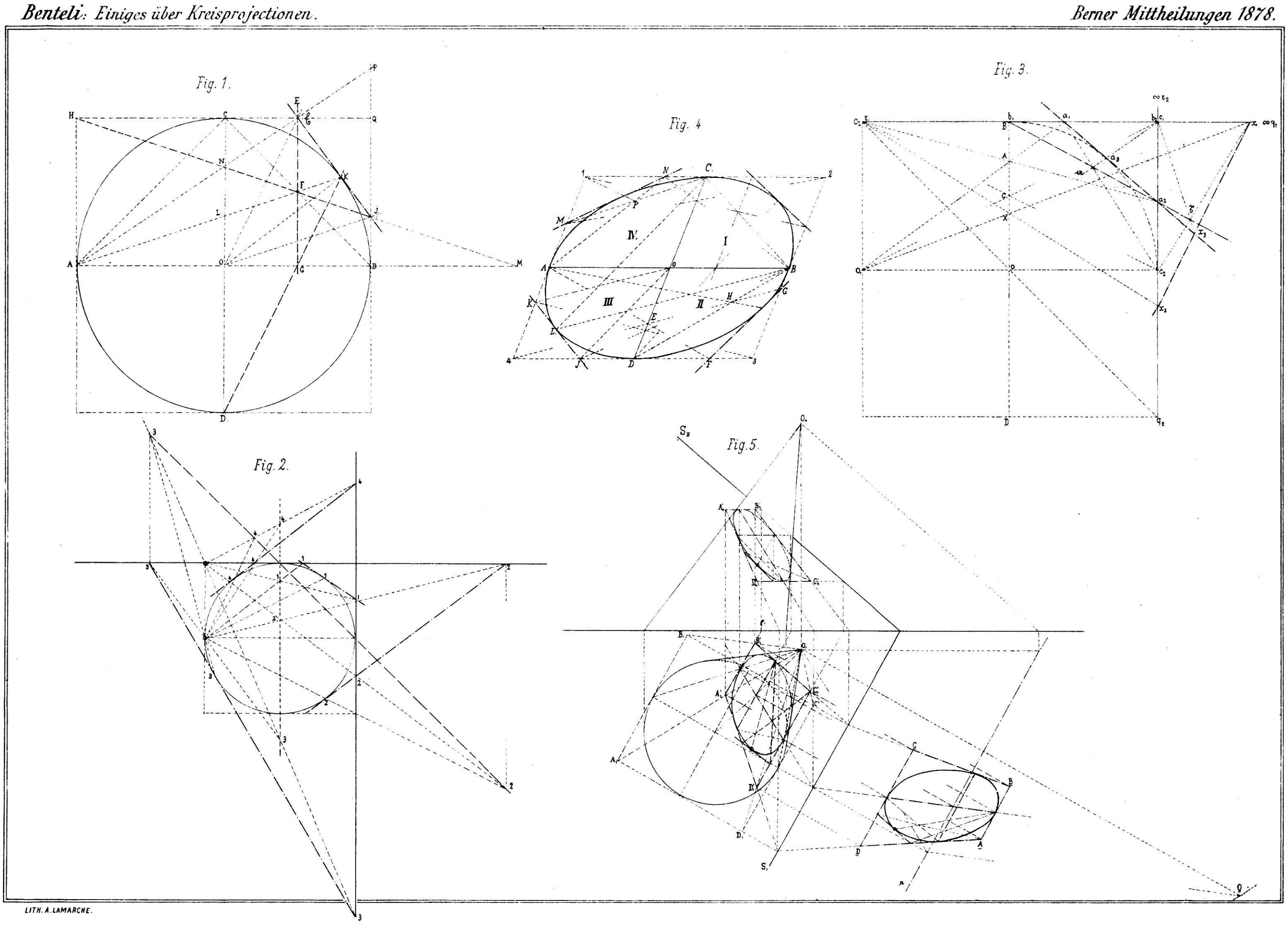
AEF und 4EG, die Berührungspunkte dagegen sind in allen diesen drei Quadranten verschiedenartig gefunden. In II durch die Verbindung von A mit dem Schnittpunkt H des Strahls 4E mit DB; in III durch die Parallele CL zu OJ oder durch die Parallele BL zu OK, in IV durch AN, CM und P1, also nach obiger durch die neuere Geometrie erhaltenen Construction, deren Richtigkeit beim Kreise sich übrigens auch mittelst des folgenden bekannten Satzes nachweisen lässt. Liegen drei Punkte auf den Seiten des Dreiecks so, dass das Produkt ihrer Punktwerthe (in Bezug auf die drei Eckpunkte) gleich —1 ist, so schneiden sich die Verbindungslinien dieser Punkte mit den Gegenecken in einem Punkte. Das Produkt der Punktwerthe von $b_1 a_3$ und c_2 (Fig. 3) auf den Seiten des Dreiecks $a_1 b_2 a_2$ ist $\frac{b_2 b_1}{a_1 b_1} \cdot \frac{a_1 a_3}{a_2 a_3} \cdot \frac{a_2 c_2}{b_2 c_2}$, dasselbe wird negativ, da $\frac{a_1 a_3}{a_2 a_3}$ ein negativer Factor ist, und, weil $b_2 b_1 = b_2 c_2$, $a_1 a_3 = a_1 b_1$, $a_2 c_2 = a_2 a_3$, so wird das ganze Produkt $= -1$; es muss somit die Verbindungslinie von b_2 nach dem Berührungspunkte a_3 durch den Schnittpunkt $\mathfrak{a}$ der Strahlen $c_2 a_1$ und $b_1 a_2$ gehen.

Die Constructionen in Fig. 4 lassen sich alle sehr gut anwenden, besonders in der Schattenlehre und in axonometrischen Projectionen. Für die Anwendung aber in der Centralprojection, also bei den Kreiskegelschnitten in der darstellenden Geometrie und — was zwar eigentlich dasselbe ist — in der Perspective sind nur die Constructionen in Quadrant II und IV, also die in dieser Abhandlung neu Gefundenen, leicht zu verwenden, da sie von rein graphischen Eigenschaften beim Kreise herstammen, bei denen keine Parallellinien nöthig sind.

Freilich ist zuerst immer die Centralprojection eines dem Kreise umschriebenen Quadrats zu construiren.

In Fig. 5 ist schliesslich noch ein Ellipsenschnitt eines Kreiskegels dargestellt, wobei nach obigem Verfahren die Projectionen des Kegelschnitts und die wirkliche Gestalt des Letztern aus dem dem Spurkreise umschriebenen Quadrate ABCD hergeleitet sind. Bei jeder Ellipse ist eine beliebige Tangentenconstruction eingezeichnet. Auch für den Parabel- und Hyperbel-Schnitt lässt sich derselbe Gang einschlagen, er wird aber wenigstens beim Hyperbelschnitt für den Zeichner etwas beschwerlich. Es sind überhaupt die hier mitgetheilten Resultate mehr für die Perspective, Axonometrie, Schattenlehre, Steinschnitt etc. von Werth, denn in der darstellenden Geometrie, wo gewöhnlich der Spurkreis des Kegels in einer gegebenen Projectionsebene angenommen wird, ist entschieden die Construction der ebenen Schnitte aus Systemen conjugirter Durchmesser oder besser noch aus den Axensystemen vorzuziehen. Näheres speziell darüber findet sich unter Anderem in einer besonderen Abhandlung des Vortragenden über ebene Schnitte der Strahlenflächen. (Kantonsschulprogramm 1875.)

Zum Schlusse möge nur noch erwähnt werden, dass, seitdem der Verfasser in seinem Unterrichte an den hiesigen Schulen die oben mitgetheilten Resultate benutzt, die Zeichnungen, denen Kreisprojectionen zu Grunde liegen — und diese kommen ja so häufig vor — entschieden richtiger und daher schöner ausfallen.



LITH. A. LAMARCHE.

FIGURENTAFEL.

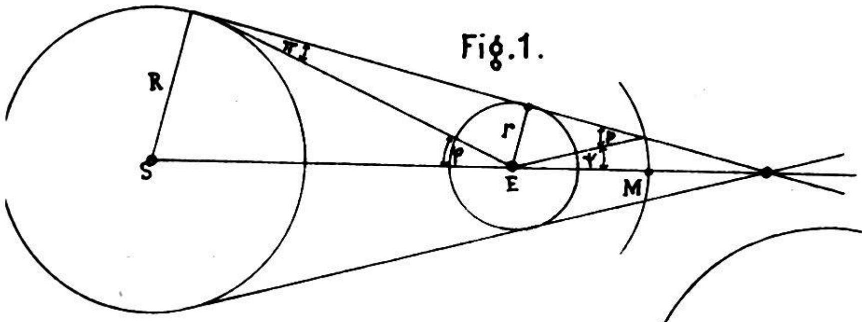


Fig. 1.

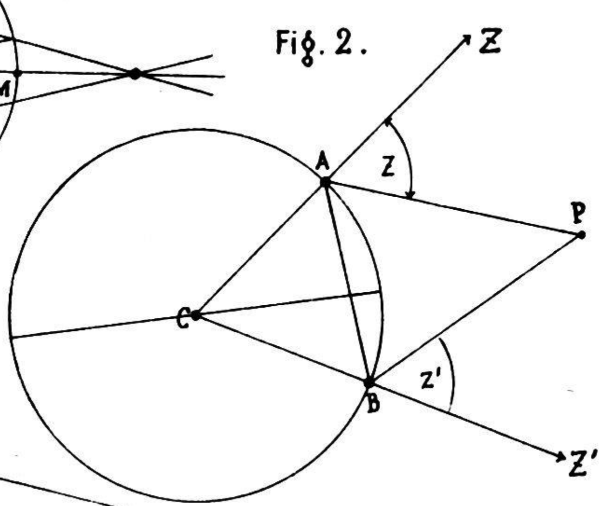
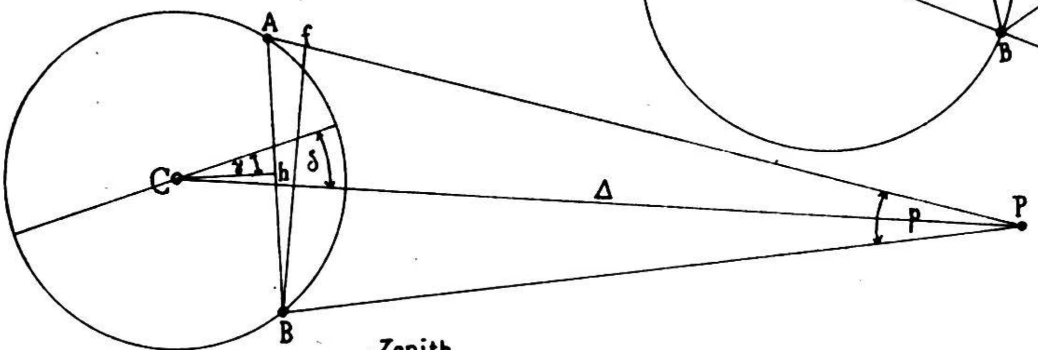


Fig. 2.

Fig. 3.



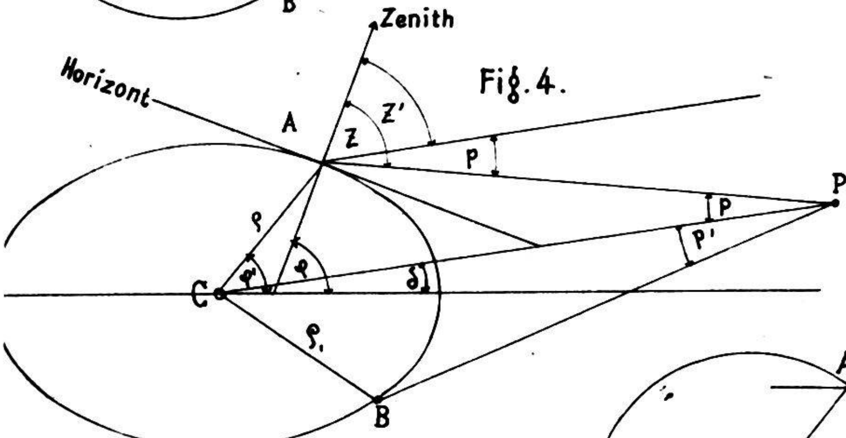


Fig. 4.

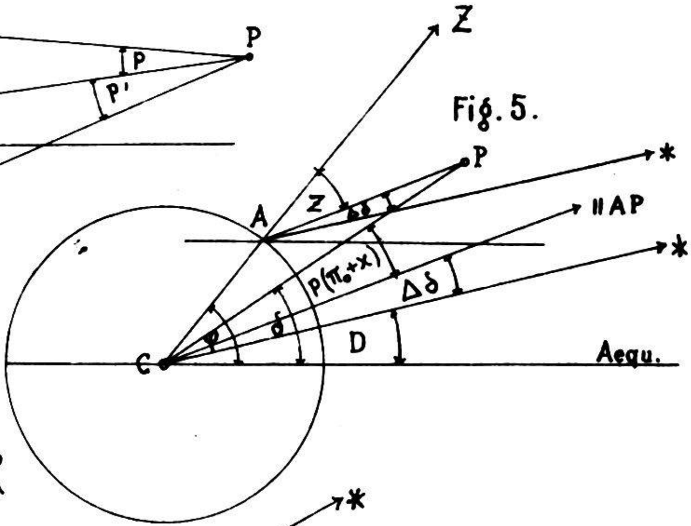


Fig. 5.

Fig. 6.