Alfred Jonquière.

Mathematische Betrachtungen über den Bau der Bienenzellen.

Vortrag gehalten in der Sitzung vom 26. Januar 1884.

In der Sitzung der naturforschenden Gesellschaft vom 26. Januar d. J. wurde die nachfolgende Arbeit in einer etwas ausgedehnteren Form vorgetragen. In der Diskussion, welche sich an den Vortrag knüpfte, war Herr Prof. Dr. Grützner so freundlich, den Verfasser aufmerksam zu machen auf die in Pflügers „Archiv für Physiologie" erschienene Abhandlung von Dr. Müllenhoff, betitelt: „Ueber die Entstehung der Bienenzellen". Im mathematischen Theile der genannten Abhandlung bringt Dr. Müllenhoff mehrere Untersuchungen, die zufällig vom Verfasser nachstehender Betrachtungen, ganz unabhängig von der Schrift Müllenhoffs, auch gemacht wurden. Es mussten daher natürlicherweise diejenigen Untersuchungen, welche schon von Müllenhoff veröffentlicht wurden, vollständig weggelassen werden. Immerhin dürfte vielleicht die vorliegende kleine Arbeit als Ergänzung zum mathematischen Theil der Müllenhoff'schen Abhandlung nicht ganz ohne Interesse sein.

Es ist eine bekannte Thatsache, die jedem aufmerksamen Beobachter auffällt, dass die Bienen ihren Zellen die Form von geraden, regulären, sechsseitigen Prismen geben. Weniger in die Augen fallend und deshalb auch weniger bekannt wird es sein, dass der Boden der Zelle nicht, wie sich erwarten liesse, von einem ebenen, regulären Sechseck gebildet wird, sondern dass er eine Form besitzt, die am meisten Aehnlichkeit mit einer dreiseitigen Pyramide hat. Um uns ein anschauliches Bild dieses Zellenbodens zu machen, dürfte vielleicht folgende kurze Betrachtung nicht unzweckmässig sein:

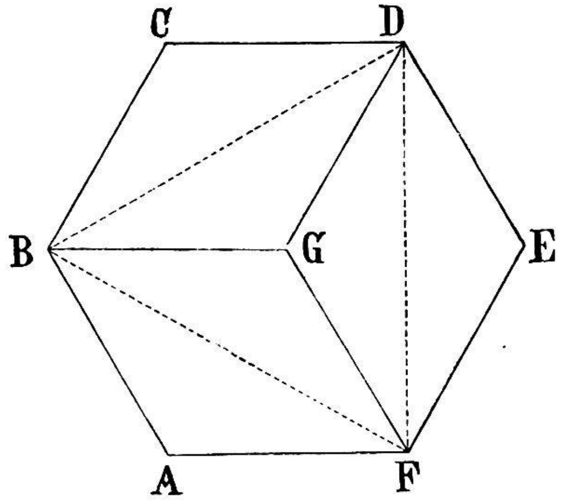

Fig. 1.

Es sei A B C D E F die obere Grundfläche eines regulären, sechsseitigen Prismas (Fig. 1). Wir verbinden den Mittelpunkt G mit B, D und F, wodurch das reguläre Sechseck in 3 Rauten zerfällt. Nehmen wir nun an, die Punkte B, D und F seien fest und der Mittelpunkt G werde senkrecht zur Zeichnungsebene um eine bestimmte Strecke p in die Höhe gehoben; dann müssen offenbar die 3 Rauten um D B, F D und B F als Axen eine Drehung machen und die Punkte A, C und E müssen sich längs den ihnen entsprechenden Kanten um dieselbe Strecke p abwärts bewegen. In Folge der Drehung der 3 Rauten haben die Winkel F A B, B C D und D E F, die ursprünglich 120^0 betrugen, um eine bestimmte Grösse abnehmen müssen. Denken wir uns die Drehung so lange fortgesetzt, bis die 3 genannten Winkel nur noch je $109^0\ 28'$ betragen, so haben wir ein genaues Bild des Zellenbodens vor uns. Wir stellen uns nun zunächst die Aufgabe, zu berechnen, wie gross die Strecke p, um welche der Mittelpunkt G aus der Ebene der Grundfläche eraustritt, sein muss, damit die Oberfläche der Bienenzelle ein Minimum wird.

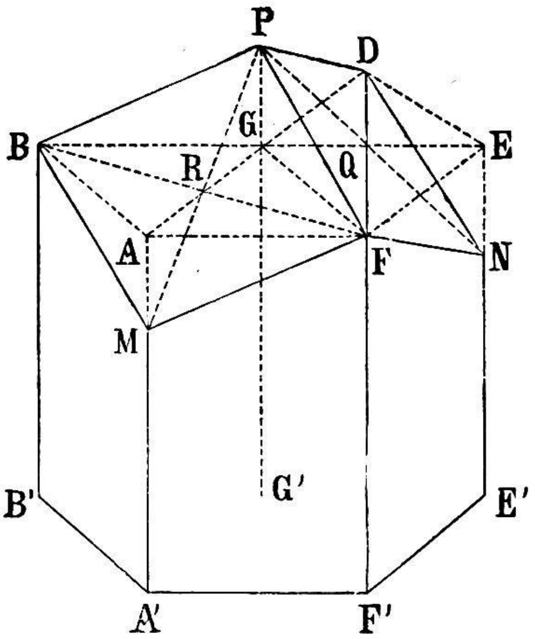

Fig. 2.

In Fig. 2 ist eine Bienenzelle sammt Zellenboden schematisch abgebildet. Die Strecke G P = A M = E N = p. Die Seite A B der Basis sei mit s, die Höhe A A' = F F' mit h bezeichnet. Die Oberfläche O der Zelle lässt sich nun leicht in den drei Grössen s, h und p ausdrücken.

Es besteht O offenbar

1) aus dem Flächeninhalte der Grundfläche A B C D E F (wenn wir die Zelle als geschlossen annehmen);
2) aus dem 6-fachen Inhalte einer der Seitenflächen, z. B. von A' B' B M;
3) aus dem 3-fachen Flächeninhalt der Raute M B P F.

Die Grundfläche $ABCDEF = 3 \times BF \times GR = 3 \times s\sqrt{3} \times \frac{s}{2}$

$$ABCDEF = \frac{3}{2} s^2 \sqrt{3}$$

$$\text{Die Seitenfläche } A'B'BM = s \times h - \frac{1}{2} s \times p$$

$$A'B'BM = \frac{s}{2}(2h - p)$$

$$\text{Die Raute } MBPF = BF \times PR = s\sqrt{3} \times \sqrt{\frac{s^2}{4} + p^2}$$

$$MBPF = \frac{s}{2}\sqrt{12p^2 + 3s^2}.$$

Somit ist die Oberfläche O der Bienenzelle

$$O = \frac{3}{2} s^2 \sqrt{3} + 3 s (2 h - p) + \frac{3}{2} s \sqrt{12 p^2 + 3 s^2} \quad (1)$$

In diesem Ausdruck sei p variabel, s und h konstant. Indem wir den ersten Differentialquotienten von O nach p bilden, diesen = 0 setzen und nach p auflösen, erhalten wir für p denjenigen Werth, für welchen O ein Minimum wird. Es ist offenbar

$$\frac{d O}{d p} = - 3 s + \frac{3}{2} s \times \frac{12 p}{\sqrt{12 p^2 + 3 s^2}}$$

$$= - 3 s \left(1 - \frac{6 p}{\sqrt{12 p^2 + 3 s^2}}\right) = 0$$

$$1 = \frac{6 p}{\sqrt{12 p^2 + 3 s^2}}$$

$$36 p^2 = 12 p^2 + 3 s^2$$

$$p^2 = \frac{s^2}{8}$$

$$p = \frac{s}{\sqrt{8}}$$

Für $p = \frac{s}{\sqrt{8}}$ wird somit die Oberfläche ein Minimum (dass von einem Maximum hier nicht die Rede sein kann, bedarf wohl kaum einer besondern Erwähnung).

Wir fragen uns nun, wie gross für den soeben gefundenen Werth von p der Winkel B M F wird. Bezeichnen wir den Winkel B M F mit x, so ist

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{B R}{B M} = \frac{\frac{s}{2} \sqrt{3}}{\sqrt{s^2 + \frac{s^2}{8}}}$$

$$= \frac{s \sqrt{3} \times \sqrt{8}}{6 s} = \sqrt{\frac{24}{36}}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{x}{2} = 54^0\ 44'\ 8''$$

und

$$x = 109^0\ 28'\ 16''$$

Im Falle des Minimum's der Oberfläche müssten also die stumpfen Winkel der 3 Rauten des Zellenbodens je $109^0\ 28'$ betragen. Da Letzteres nun in Wirklichkeit der Fall ist, so hat die Bienenzelle in der That (bei konstantem Rauminhalte) das Minimum von Oberfläche.

Dr. Müllenhoff weist in seiner höchst interessanten Arbeit nach, dass die Bienenzellen einfach aus Gründen des Gleichgewichts genau diejenige Form annehmen müssen, die sie in Wirklichkeit besitzen. Er macht aufmerksam auf die Analogie mit den Plateau'schen Gleichgewichtsfiguren, bei welchen die sich bildenden Seifenflächen auch stets das Bestreben zeigen, sich auf eine möglichst kleine Fläche zusammenzuziehen. Sehr auffallend ist die Thatsache, dass der Winkel von $109^0\ 28'$, der bei der Bienenzelle eine so wichtige Rolle spielt, auch bei den erwähnten Seifenfiguren sich zeigt. Taucht man ein aus Draht verfertigtes reguläres Tetraeder a b c d (Fig. 3) in eine Seifenlösung, so bilden sich bei langsamem Herausziehen 6 feine, nach dem Schwerpunkte s zusammenlaufende Seifenhäutchen, von denen jedes an einer der 6 Tetraederkanten anliegt. Die in s zusammenstossenden Winkel a s b, b s d, c s d u. s. f. sind nun genau $= 109^0\ 28'$, wie sich leicht nachweisen lässt.

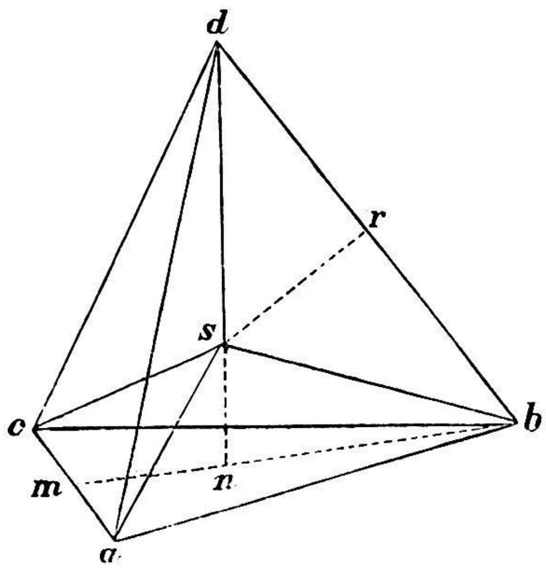

Fig. 3.

Bezeichnen wir nämlich die Seite c d des regulären Tetraeders mit S, den Winkel b s d mit x und ist n der Schwerpunkt der Grundfläche, so ist offenbar

$$m\,b = a\,b \times \sin 60^0 = \frac{S}{2}\sqrt{3}$$

$$n\,b = \frac{2}{3}\,m\,b = \frac{S}{3}\sqrt{3}$$

$$n\,d = \sqrt{d\,b^2 - n\,b^2} = \sqrt{S^2 - \frac{S^2}{3}} = S\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$s\,d = \frac{3}{4}\,n\,d = \frac{3}{4}\,S\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{r\,d}{s\,d} = \frac{\frac{S}{2}}{\frac{3}{4}\,S\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

woraus sich wiederum ergibt:

$$x = 109^0\;28'\;16''$$

also derselbe Werth, den wir schon oben für den stumpfen Winkel der Rauten fanden. Mehrere vom Verfasser angestellte Messungen führten zu demselben Resultate.

Obwohl nach Müllenhoff's Theorie der Entstehung der Bienenzellen die Möglichkeit einer andern Zellenform ausgeschlossen ist, so mag es doch, vom mathematischen Standpunkte aus betrachtet, von Interesse sein, sich die Frage: „ob eine kubische Form der Zelle der hexagonal-pyramidalen in Betreff des Materialverbrauchs vorzuziehen sei oder nicht“ zur Beantwortung vorzulegen. Bevor wir an die Lösung dieser Aufgabe gehen, müssen wir einen Ausdruck für die Oberfläche der Bienenzelle aufstellen. Zu diesem Zwecke haben wir nur in Gleichung (1) für p den Werth $\frac{s}{\sqrt{8}}$ einzusetzen. Es ist aber noch wohl zu berücksichtigen, dass alle Flächen, mit Ausnahme der obern Grundfläche, des Deckels, je 2 Zellen gemeinsam sind. Mit Rücksicht hierauf finden wir für die von einer Zelle zu liefernde Oberfläche O_z den Ausdruck

$$O_z = \frac{3\,s^2}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) + 3\,s\,h \quad (2)$$

Der Kubikinhalt J der Bienenzelle ist gleich dem Inhalt eines regulären sechsseitigen Prismas von derselben Basis und von der Höhe $F\,F' = h$ (Fig. 2); somit

$$J = \frac{3}{2}\,s^2\sqrt{3} \times h \quad (3)$$

Denken wir uns nun einen Würfel von demselben Rauminhalte und bezeichnen dessen Seite mit x, so ist

$$x^3 = \frac{3}{2}\,s^2\sqrt{3} \times h = h\,s^2\sqrt{\frac{27}{4}}$$

$$x^2 = 3\sqrt[3]{\frac{h^2\,s^4}{4}} \quad (4)$$

Würden alle Bienenzellen eine würfelförmige Gestalt besitzen, so wäre die von einer solchen Zelle zu liefernde Oberfläche

$$O_w = \frac{5}{2}\,x^2 + x^2 = \frac{7}{2}\,x^2$$

oder mit Berücksichtigung von (4)

$$O_w = 10{,}5\sqrt[3]{\frac{h^2\,s^4}{4}} \quad (5)$$

Die beiden Ausdrücke für O_w und O_z haben wir nun mit einander zu vergleichen. Wir setzen $\frac{h}{s} = z$ oder $h = z \times s$. Dann wird

$$O_z = \frac{3\,s^2}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) + 3\,s^2 z$$

$$= \frac{3\,s^2}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2\,z\right)$$

$$O_w = 10{,}5 \times \sqrt[3]{\frac{z^2 s^6}{4}} = \frac{21}{2} s^2 \sqrt[3]{\frac{z^2}{4}}$$

$$= \frac{3\, s^2}{2} \times 7 \sqrt[3]{\frac{z^2}{4}}$$

Somit ist $\frac{O_z}{O_w} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2\, z}{7 \sqrt[3]{\frac{z^2}{4}}}$

Es sei $\eta = 2\, z + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}$

$$y = 7 \sqrt[3]{\frac{z^2}{4}}$$

Wir werden das Verhältniss von O_z zu O_w am besten einsehen, wenn wir in einem rechtwinkligen Coordinaten-System verschiedene Werthe von z als Abscissen und die entsprechenden Werthe von η und y als Ordinaten auftragen. Die Gleichung $\eta = 2\, z + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}$ stellt dann offenbar eine Gerade, die Gleichung $y = 7 \sqrt[3]{\frac{z^2}{4}}$ eine Kurve dar, welche durch den Nullpunkt geht und oberhalb der Abscissenaxe verläuft. Wir untersuchen nun zunächst, für welche Werthe von z die Kurve von der Geraden geschnitten wird, d. h. für welche Werthe des Verhältnisses h : s $O_z = O_w$ wird.

$$7 \sqrt[3]{\frac{z^2}{4}} = 2\, z + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\frac{343}{4} z^2 = 8\, z^3 + 12\, z^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) + 6\, z \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^3$$

$$z^3 + \left(\frac{3}{4}\sqrt{2} + \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{343}{32}\right) z^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^2 z$$
$$+ \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^3 = 0$$

Die Auflösung dieser Gleichung liefert für z drei reelle Werthe:

$$z_1 = 6{,}3069$$
$$z_2 = 1{,}0318$$
$$z_3 = -0{,}2787$$

Die Kurve wird von der Geraden somit in 3 Punkten geschnitten, oder, was dasselbe ist, für 3 Werthe des Verhältnisses h : s wird die Oberfläche der Bienenzelle gleich der Oberfläche eines Kubus von demselben Rauminhalte. Da jedoch h und s positive Grössen sind, so kann z nie negatif werden und es fällt daher z_3 ausser Betracht. Es fragt sich nun, ob für Werthe von z, die zwischen 1,03 und 6,3 liegen, Kurvenordinaten grösser oder kleiner sind, als die Geradenordinaten. Um diese Frage zu entscheiden, brauchen wir nur die erste Ableitung von η nach z mit der ersten Ableitung von [illegible] ch z für z = 6,3069 zu vergleichen. Es ist

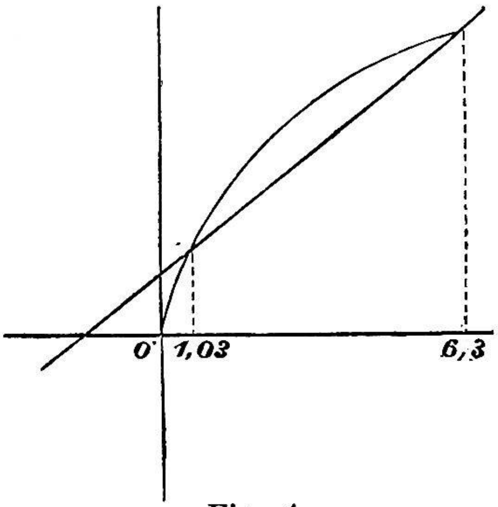

Fig. 4.

$$\frac{dy}{dz} = \frac{7}{\sqrt[3]{4}} \times \frac{2}{3\sqrt[3]{6{,}3069}}$$
$$= 1{,}59116$$

$$\frac{d\eta}{dz} = 2$$

$\frac{d\eta}{dz} > \frac{dy}{dz}$ für $z = 6{,}3$, d. h. die Richtungskonstante der Geraden ist grösser, als die Richtungskonstante der im Punkte $z = 6{,}3$ an die Kurve gelegten Tangente. Es ist daher klar, dass zwischen $z = 1{,}03$ und $z = 6{,}3$ die Kurve oberhalb der sie schneidenden Geraden liegt (Fig. 4). So lange also das Verhältniss der Höhe der Zelle zur Seite der Grundfläche grösser als 1,03 und kleiner als 6,3 ist, ist auch die Oberfläche der Zelle kleiner, als die Oberfläche eines Kubus von demselben Rauminhalte. Bei der Bienenzelle bleibt h : s stets innerhalb der angegebenen Grenzen; nehmen wir den durchschnittlichen Werth von z zu 3 an, so verhält sich

$$O_z : O_w = 8{,}4391 : 9{,}1726.$$

Wir können somit die uns vorgelegte Frage dahin beantworten, dass vom rein mathematischen Standpunkte aus die hexagonal-pyramidale Zellenform der kubischen entschieden vorzuziehen ist.

Es mag hier nur noch erwähnt werden, dass das hexagonale Prisma mit pyramidenförmiger Basis gegenüber dem Kubus noch den Vorzug einer grösseren Festigkeit und Widerstandsfähigkeit hat. Es ist hier nicht der Ort, auf diesen Punkt näher einzutreten.