Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Band: - (1889)

Heft: 1215-1243

Artikel: Erzeugung und Untersuchung einiger ebenen Curven höherer Ordnung

Kapitel: Der Kegelschnitt p sei die Ellipse, welche die Punkte A1,A2,E,E3 enthält und die Fundamentallinien A1A3 und A2A3 in A1 resp. A2 berührt

Autor: Leuch, Albert

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319023

III. Der Kegelschnitt p sei die Ellipse, welche die Punkte A_1, A_2, E, E_3 enthält und die Fundamentallinien A_1A_3 und A_2A_3 in A_1 resp. A_2 berührt.

Die Gleichung von p lautet:

1. p) $x_3^2 - x_1x_2 = 0$; die Curve p' ist mit p identisch.

Wir schreiben die Gleichung:

$$1 - \frac{x_1}{x_3} \cdot \frac{x_2}{x_3} = 0 \quad \text{und setzen wieder} \quad \frac{x_2}{x_3} = \lambda; \text{ diess gibt:}$$

$$1 - \lambda \cdot \frac{x_1}{x_3} = 0, \text{ woraus folgt: } \frac{x_1}{x_3} = \frac{1}{\lambda}.$$

Für einen Punkt P_λ auf p ist daher

$$x_1 : x_2 : x_3 = 1 : \lambda^2 : \lambda.$$

Da für die Ellipse p $(f = 0)$

$$f_1 = -x_2, \ f_2 = -x_1, \ f_3 = 2x_3,$$

so hat die Tangente der Ellipse in P_λ die Gleichung:

2. t_λ) $\lambda^2 x_1 + x_2 - 2\lambda x_3 = 0$; der ihr correspondirende Kegelschnitt heisst:

3. t_λ') $\lambda^2 x_2 x_3 + x_1 x_3 - 2\lambda x_1 x_2 = 0$.

Aus (2) und (3) folgt: $\lambda = \dfrac{x_3(x_1^2 - x_2^2)}{2x_2(x_1^2 - x_3^2)}$ und durch Substitution dieses Werthes in Gl. (2) erhält man:

$$\frac{x_1x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2}{4x_2^2(x_1^2 - x_3^2)^2} + x_2 - \frac{x_3^2(x_1^2 - x_2^2)}{x_2(x_1^2 - x_3^2)} = 0 \quad \text{oder}$$

III.) $x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2 - 4x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) = 0.$

Diess ist die Gleichung der im Falle (III) erzeugten Curve sechster Ordnung.

Aus der Erzeugungsweise der C_6 geht zunächst hervor, dass A_1 und A_2, weil auf p gelegen, Spitzen der C_6 werden und für beide ist $x_3 = 0$ Rückkehrtangente; diess bestätiget auch die Rechnung. Für die Schnittpunkte der Curve mit $x_3 = 0$ hat man nämlich

$$4x_1^3x_2^3 = 0, \text{ woraus folgt: } x_1^3 = 0 \text{ und } x_2^3 = 0,$$

d. h. $x_3 = 0$ hat in A_1 und A_2 mit der C_6 je drei zusammenfallende Punkte gemein. Ferner ergibt die Rechnung, dass das Tangentenpaar in jedem der Doppelpunkte A_1 und A_2 die Gleichung $x_3^2 = 0$ hat, dass also A_1 und A_2 Spitzen der C_6 sein müssen, deren Tangenten mit A_1A_2 zusammenfallen. — Wenn $u = 0$ die Gleichung (III) bedeutet, so ist

$$
\begin{aligned}
u_1 &= 4x_1x_3^2(x_1^2 - x_2^2) - 4x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - 3x_1^2)\\
u_2 &= -4x_2x_3^2(x_1^2 - x_2^2) - 4x_1(x_3^2 - x_1^2)(3x_2^2 - x_3^2)\\
u_3 &= 2x_3(x_1^2 - x_2^2)^2 - 8x_1x_2x_3 \,.\, (x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2)\\
u_{11} &= 4x_3^2(3x_1^2 - x_2^2) + 24x_2x_1(x_2^2 - x_3^2)\\
u_{12} &= -8x_1x_2x_3^2 - 4(x_3^2 - 3x_1^2)(3x_2^2 - x_3^2)\\
u_{13} &= 8x_1x_3(x_1^2 - x_2^2) - 8x_2x_3(3x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2)\\
u_{22} &= -4x_3^2(x_1^2 - 3x_2^2) - 24x_1x_2(x_3^2 - x_1^2)\\
u_{23} &= -8x_2x_3(x_1^2 - x_2^2) - 8x_1x_3(x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2)\\
u_{33} &= 2(x_1^2 - x_2^2)^2 - 8x_1x_2(x_1^2 + x_2^2 - 6x_3^2).
\end{aligned}
$$

Für den Doppelpunkt A_3 wird $u_{11} = 0$, $u_{12} = 4x_3^4$, $u_{13} = 0$, $u_{22} = 0$, $u_{23} = 0$, $u_{33} = 0$, daher hat sein Tangentenpaar die Gleichung $x_1 \,.\, x_2 = 0$. Der Fundamentalpunkt A_3 ist also ein Knotenpunkt der C_6 und die Tangenten in demselben sind A_2A_3 und A_1A_3; sie sind die respectiven Inversen der Tangenten A_3Q_3 und $A_3Q_3^*$ (Q_3 fällt mit A_1, Q_3^* mit A_2 zusammen), welche von A_3 aus an die Ellipse gehen. (Siehe Fig. 1, Tafel V.) Aus dem Umstande, dass A_3Q_3, $A_3Q_3^*$ die C_6 in Q_3 resp. Q_3^* berühren, folgt, dass die Tangenten im Knoten A_3 Inflexionstangenten sind (vergl. Fall I); diess stimmt mit der Thatsache überein, dass $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ die Tangenten der C_6 in den Punkten Q_1 und Q_2, welche mit A_3 zusammenfallen, vorstellen. Die folgende Rechnung liefert den einfachsten Nachweis hiefür. Substituirt man in (III) $x_1 = 0$, so kommt $x_3^2 \,.\, x_2^4 = 0$, woraus folgt: $x_3^2 = 0$, $x_2^4 = 0$, d. h. $x_1 = 0$ schneidet die C_6 in A_2 zwei Mal, in A_3 vier Mal.

Ferner ist für $x_2 = 0$: $x_3^2 \,.\, x_1^4 = 0$, oder $x_3^2 = 0$ und $x_1^4 = 0$, was besagt, dass $x_2 = 0$ mit der C_6 in A_1 zwei, in A_3 vier Punkte gemein hat.

A_3 ist also ein doppelter Inflexionsknoten.

Die Punkte $E_1 \begin{pmatrix} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{pmatrix}$ und $E_2 \begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1 \end{pmatrix}$ sind Doppelpunkte mit reellen und von einander verschiedenen Tangenten, also Knotenpunkte der C_6. Die Tangenten in denselben stimmen überein mit den von E_1 resp. E_2 aus an die Ellipse gehenden Tangenten. Die bezüglichen Gleichungen lauten:

Für das Tangentenpaar in E_1:

$$x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = 0$$

und für dasjenige in E_2:

$$x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 = 0.$$

Was die Punkte E_3 $(1, 1, -1)$ und E $(1, 1, 1)$ betrifft, so sind dieselben zunächst als Doppelpunkte der C_6 anzusehen, weil für diese Punkte u_1, u_2, u_3 verschwinden.

Als Gleichung des Tangentenpaares in E_3 erhält man:

$$(x_1 + x_2 - 2x_3)^2 = 0$$

und diejenige für das Tangentenpaar in E lautet:

$$(x_1 + x_2 - 2x_3) = 0,$$

d. h. die beiden Tangenten der C_6 im Doppelpunkt E_3 fallen zusammen mit der Ellipsentangente $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ im Punkte E_3 und die Tangenten im Doppelpunkt E sind vereinigt in der zu E gehörigen Ellipsentangente $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$.*)

Allein diese Punkte sind nicht etwa Spitzen, wie die nachfolgende Betrachtung zeigt.

Für die Schnittpunkte der C_6 mit der Tangente $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ ergibt sich, wenn man in der Curvengleichung $x_3 = -\dfrac{x_1 + x_2}{2}$ setzt:

$$(x_1 - x_2)^4 \,.\, (x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2) = 0.$$

Im Doppelpunkt E_3 hat also die Tangente mit der Curve vier vereinigte Punkte gemein und schneidet sie noch in den zwei Punkten

$$\left(\frac{x_1}{x_3} = -1 + \sqrt{5},\ \frac{x_2}{x_3} = -(1 + \sqrt{5})\right)$$

$$\left(\frac{x_1}{x_3} = -(1 + \sqrt{5}),\ \frac{x_2}{x_3} = -1 + \sqrt{5}\right).$$

Der Punkt E_3 muss daher ein Berührungsknoten sein, d. h. durch E_3 gehen zwei Aeste der C_6, welche sich in ihm zweipunktig berühren. Die beiden Curvenzweige sind aber nicht reell, denn setzt man im Bereiche des Punktes E_3 $y = x_1 + x_2 + 2x_3$, $z = x_1 - x_2$, wo y und z sehr klein sind, in die Gleichung der C_6 ein, so wird annähernd $16x_3^2y^2 + 8x_3yz^2 + 5z^4 = 0$; diese Gleichung repräsentirt zwei imaginäre Curvenzweige, die einander in E_3 berühren, ihre gemeinschaftliche Tangente $y = 0$ ist reell. In Uebereinstimmung damit findet man auch, dass die Schnittpunkte der C_6 mit der Geraden $x_1 - kx_2 = 0$ mit Ausnahme der zwei sich in E_3 befindenden imaginär sind, so lange k zwischen 0 und $+\infty$ liegt. Weil die Curve nicht reell durch E_3 hindurch geht, so ist E_3 ein isolirter Punkt der C_6, allein er muss als imaginärer Berührungsknoten angesehen werden. Da im Punkte E_3 zwei Durchschnittspunkte der beiden sich in ihm

*) Die beiden Tangenten in E_3 und E gehen durch den Punkt $\begin{pmatrix} x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{pmatrix}$.

berührenden Curvenzweige vereinigt sind, so repräsentirt derselbe zwei vereinigte Knotenpunkte. Ebenso ist E ein imaginärer Berührungsknoten mit reeller Tangente.

Die gemeinsamen Punkte der Ellipse und der C_6 sind A_1, A_2, E_3, E; die C_6 berührt die Ellipse in A_1 und A_2 zweipunktig, in E_3 und E vierpunktig.

Die C_6 hat die folgenden Plücker'schen Charaktere:

$$\mu = 6, \quad \delta = 7, \quad \varkappa = 2$$
$$\nu = 10, \quad \iota = 14, \quad \tau = 21.$$

Wenn die Hyperbel $x_3^2 + x_1x_2 = 0$ den festen Kegelschnitt p vorstellt, dann ergibt sich die C_6:

$$x_3^2(x_1^2 - x_2^2)^2 + 4x_1x_2(x_2^2 - x_3^2)(x_3^2 - x_1^2) = 0.$$

Die Hyperbel geht durch A_1, A_2, E_1, E_2 und berührt in A_1, A_2 die respectiven Fundamentallinien A_1A_3, A_2A_3. Die C_6 hat zwei Spitzen in A_1 und A_2, für welche wieder $x_3 = 0$ die Rückkehrtangente ist; ferner besitzt sie drei Knotenpunkte, den doppelten Inflexionsknoten A_3 und die Knotenpunkte E und E_3. Die Punkte E_1 und E_2 sind isolirte Punkte der C_6 und zwar imaginäre Berührungsknoten, die Tangenten in denselben sind reell und zwar die zu E_1 und E_2 gehörigen Hyperbeltangenten, also die den Punkt ($x_3 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$) mit E_1 resp. E_2 verbindenden Geraden. (Fig. 2, Tafel V.)

IV. Es sei p ein dem Fundamentaldreieck umschriebener Kegelschnitt.

Ein Kegelschnitt, welcher durch die Fundamentalpunkte geht, hat allgemein die Gleichung:

1. p) . . . $a_1x_2x_3 + a_2x_1x_3 + a_3x_1x_2 = 0$;

ihm entspricht alsdann die gerade Linie

2. p') . . . . $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0.$

Für die Coordinaten eines beliebigen Punktes P_λ von p ist

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda(a_1 + \lambda a_2) : (a_1 + \lambda a_2) : - \lambda a_3.$$