Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Band: - (1889)

Heft: 1215-1243

Artikel: Erzeugung und Untersuchung einiger ebenen Curven höherer Ordnung

Kapitel: Anhang

Autor: Leuch, Albert

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319023

Anhang.

Legt man Liniencoordinaten (ξ_1, ξ_2, ξ_3) zu Grunde und ersetzt dieselben durch ihre reciproken Werthe, d. h. wendet die durch die Relationen $\xi_1' = \lambda\xi_2\xi_3$, $\xi_2' = \lambda\xi_1\xi_3$, $\xi_3' = \lambda\xi_1\xi_2$ ausgedrückte birationale quadratische Transformation (Methode der Inversion) an, wobei einer Geraden ξ_i eine einzige, bestimmte Gerade $\xi_i' = \frac{1}{\xi_i}$ und umgekehrt entspricht, so entsprechen sich oder sind zu einander invers:

Punkt und Curve zweiter Klasse (welche dem Fundamentaldreiseit eingeschrieben ist).

Gerade und Gerade,

Curve zweiter Klasse und Curve vierter Klasse (mit drei Doppeltangenten in den Coordinatenaxen; für dieselbe ist im Allgemeinen $\nu = 4$, $\tau = 3$, $\iota = 0$, $\mu = 6$, $\varkappa = 6$, $\delta = 4$).

Curve n. Klasse und Curve von der Klasse 2n (letztere hat die Fundamentallinien zu nfachen Tangenten).

Zu dem behandelten Problem, als dessen Lösung sich die Curve sechster Ordnung mit sieben Doppelpunkten und keinen Spitzen ergab, gibt es nun das folgende dualistisch entsprechende:

Ein Punkt S bewege sich auf einem festen Kegelschnitt, man bestimme die Enveloppe der durch S gehenden Tangenten der Curve zweiter Klasse, welche als Inverse dem Punkte S entspricht.

Die Untersuchung, von welcher ich an dieser Stelle nur die Resultate mittheilen will, ergibt als gesuchte Enveloppe im allgemeinsten Falle eine Curve sechster Klasse mit sieben Doppeltangenten und keinen stationären Tangenten. Die Doppeltangenten sind die drei Fundamentallinien ($x_1 = 0$ oder $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = 0$; $x_2 = 0$ oder $\xi_1 = 0$, $\xi_3 = 0$; $x_3 = 0$ oder $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$) und die vier sich selbst entsprechenden Geraden e, e_1, e_2, e_3, deren Liniencoordinaten sind: ($\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 1$), ($\xi_1 = -1$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = 1$), ($\xi_1 = 1$, $\xi_2 = -1$, $\xi_3 = 1$), ($\xi_1 = 1$, $\xi_2 = 1$, $\xi_3 = -1$) oder deren Punktcoordinatengleichungen lauten:

$$(e)\quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$(e_1)\quad -x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$(e_2)\quad x_1 - x_2 + x_3 = 0$$
$$(e_3)\quad x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Da $\nu = 6$, $r = 7$, $\iota = 0$, so sind die übrigen Plücker'schen Charaktere der Curve

$$\mu = 16\,,\quad \varkappa = 30\,,\quad \delta = 72\,,$$

d. h. sie hat 30 Spitzen, 72 Doppelpunkte und ist von der 16. Ordnung.

Schneidet der feste Kegelschnitt p die Fundamentallinie A_2A_3 in zwei Punkten B_1, $B_1{}^*$, so sind die Schnittpunkte $B_1{}'$, $B_1{}^{*\prime}$ der resp. Inversen von A_1B_1, $A_1B_1{}^*$ (A_1B_1 und $A_1B_1{}^*$ sind Tangenten der C^6) mit A_2A_3 die Berührungspunkte der Doppeltangente A_2A_3 (letztere sind imaginär, wenn A_2A_3 den Kegelschnitt p nicht schneidet). Fallen B_1 und $B_1{}^*$ zusammen, d. h. wird A_2A_3 von p berührt, dann vereinigen sich $B_1{}'$ und $B_1{}^{*\prime}$, d. h. die Doppeltangente A_2A_3 geht in eine Inflexionstangente über. Es fallen auch die beiden Tangenten A_1B_1 und $A_1B_1{}^*$ zusammen, und die C^6 geht daher durch A_1 hindurch (A_1 wird Berührungspunkt der Curventangente A_1B_1).

Analoges gilt für die übrigen Fundamentallinien. Die Berührungspunkte der Doppeltangenten e, e_1, e_2, e_3 sind die resp. Schnittpunkte dieser Linien mit dem festen Kegelschnitt p. Berührt p eine der Linien e_i ($i = 0, 1, 2, 3$), dann sind im Berührungspunkt $\mathfrak{E}_i$ die beiden Berührungspunkte der Doppeltangente e_i vereinigt, von $\mathfrak{E}_i$ aus gehen an die C^6 sechs Tangenten, von denen vier mit e_i zusammenfallen; es sind daher in e_i vier Curventangenten vereinigt oder die Tangente e_i zählt als Doppeltangente zweifach, ist also keine Inflexionstangente.

Die sechs Ecken des vollständigen Vierseits $e\,e_1\,e_2\,e_3$ sind Punkte, die sich selbst entsprechen; geht demnach der feste Kegelschnitt p durch einen derselben, so sondert sich dieser (resp. das Strahlenbüschel, dessen Scheitel er ist) als ein Theil der Enveloppe ab, und der Rest derselben ist eine Curve fünfter Klasse. Enthält p vier (die höchste Zahl) sich selbst entsprechende Punkte, so reduzirt sich die C^6 auf eine C^2, welche in ein Punktepaar zerfällt.

Die $C_{16}{}^6$ ist zu sich selbst invers (in Bezug auf die Tangenten) und zwar in der Weise, dass je zwei entsprechende Tangenten der Curve sich in einem Punkte des festen Kegelschnittes schneiden. Von jeder einem Punkte S entsprechenden Curve zweiter Klasse kennt man drei Tangenten (die Fundamentallinien) und die Berührungspunkte derselben (der Berührungspunkt auf der Fundamentallinie $A_k A_l$ ist der Schnittpunkt von $A_i S'$ mit $A_k A_l$, wobei $A_i S'$ den zu $A_i S$ inversen Strahl bedeutet). Es können daher sämmtliche Tangenten der $C_{16}{}^6$ leicht construirt werden.

Spezialfall.

Bewegt sich der Punkt S auf einer geraden Linie g, dann resultirt als Enveloppe der Tangenten, die von S aus an seine inverse Curve zweiter Klasse möglich sind, eine Curve dritter Klasse, welche keine Doppeltangenten und Inflexionstangenten hat, demnach neun Spitzen und keine Doppelpunkte besitzt und von der sechsten Ordnung ist. Diese Curve ist die dualistisch entsprechende zu der ausführlich behandelten $C_3{}^6$ und repräsentirt das Erzeugniss der auf g befindlichen Punktreihe mit der zu letzterer projektivischen Kegelschnittschaar, deren Grundtangenten die Fundamentallinien und die zu g inverse Gerade g' sind.