Grenzen gefunden werden können. Den Schluss dieses Abschnittes bildet eine Zusammenstellung der gewonnenen historischen Resultate.

Der analytische Theil enthält zunächst (in Abschnitt VII) eine Untersuchung des Verfassers über eine Verallgemeinerung der von J. A. Serret gegebenen, eleganten Entwicklung eines Näherungswerthes für $\Gamma(x + 1)$ aus der Formel von Wallis, zeigt dann durch eine weitere Untersuchung (in Abschnitt VIII), dass der immer noch gebräuchliche Laplace'sche Ausdruck für das Bernoulli'sche Theorem, nämlich

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\gamma} e^{-t^2}\,dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \quad \text{gleich ist} \quad \frac{2}{\pi}\int_0^{\delta} e^{-t^2}\,dt.$$

Diese Vereinfachung des Laplace'schen Ausdrucks dürfte für die Wahrscheinlichkeitsrechnung und die Versicherungstechnik von Werth sein.

In den Anhang wurden neben dem Quellenverzeichniss einige Anmerkungen, die den Text sonst allzu störend unterbrochen hätten, als Noten verwiesen.

I.

1. Seit *Laplace* und *Gauss* ist die Wahrscheinlichkeitsrechnung für die exakte wissenschaftliche Forschung ein unentbehrliches Hilfsmittel geworden und auch bei Fragen der Sozialpolitik und der Kultur im weiteren Sinne ist sie berufen, immer werthvollere Dienste zu leisten. Neben diesem ihrem Antheil an der Entwicklung der beobachtenden Wissenschaften ist aber auch der Gewinn nicht unbedeutend, den diese angewandte mathematische Disciplin der reinen Mathematik gebracht hat. Denn ähnlich wie andere angewandte mathematische Wissenschaften, die Astronomie und die mathematische Physik, auf die Erfindung und Entwicklung der Infinitesimalrechnung und auf die Theorie der partiellen Differentialgleichungen im höchsten Grad anregend gewirkt haben, so ist auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht ohne Einfluss auf die Entwicklung der Analysis des Endlichen und Unendlichen gewesen. Ein kurzer Blick in deren Geschichte soll uns davon überzeugen.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung nahm ihren Ursprung im 17. Jahrhundert, in der Zeit der mathematischen Entdeckungen. Einige Würfelspielprobleme, die ihm vom *Marquis de Méré* im Jahre 1654 vorgelegt wurden, veranlassten den geistvollen französischen Philosophen und Mathematiker *Blaise Pascal* (1623—1662) mit der Unterstützung seines Zeitgenossen Pierre Fermat (1608—1665) genauer mit dem neuen Calcul sich zu beschäftigen, und die ersten Prinzipien desselben feststellend, wurden Pascal und Fermat die Begründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung, von ihnen «géometrie du hasard» auch «aleæ geometria» genannt. Weil aber die Hilfsmittel der Analysis damals für die Lösung der Spielprobleme keine genügenden waren, erweiterte Pascal die Combinationslehre*) und zeigte deren Zusammenhang mit den figurirten Zahlen**).

Der grosse Basler Mathematiker *Jakob Bernoulli* I. (1654—1705) gab dann in seinem epochemachenden Werke über Wahrscheinlichkeit, Ars conjectandi***) (Muthmassungskunst) eine beinahe vollständige Theorie der Combinatorik, der figurirten Zahlen †) und fand auch die nach ihm benannten Zahlen †), die bekanntlich in der Reihen- und Interpolationstheorie von Wichtigkeit sind.

Pierre Raimond de Montmort (1678—1719) lieferte im Dienste der Wahrscheinlichkeitsrechnung ebenfalls Beiträge zur Analysis der Reihen ††), namentlich in Bezug auf die Summation von arithmetischen Reihen höherer Ordnung.

Ein anderer, sehr bedeutender französischer Mathematiker, der nach Aufhebung des Ediktes von Nantes in London ein Asyl gefunden hatte, *Abraham de Moivre*, entdeckte bei seinen Studien über die Wahrscheinlichkeitsrechnung die recurrenten Reihen, deren Theorie er in dem für die Analysis bedeutsamen Buche: *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis* (London 1730) vortrug†††). Moivres weitere sehr werthvolle Beiträge zur Analysis werden im Verlaufe meiner historischen Untersuchung noch deutlicher hervortreten.

Den Forschungen der beiden grossen französischen Analysten, *Joseph Louis Lagrange* (1736—1813) und *Pierre Simon Laplace* (1749

*) Die Anfänge der Combinatorik waren aus einer Schrift Guldins vom Jahre 1622 bekannt.

**) In einem nachgelassenen Werke Pascals: Traité du triangle arithmétique. Paris 1665.

***) Basel 1713. Herausgegeben und mit einem Vorwort versehen von Nikolaus Bernoulli, dem Neffen Jakob Bernoulli's.

†) Ars conjectandi, Lib. II.

††) Montmort, Essai d'analyse sur le jeu de hasard. Paris 1708.

†††) Lib. II. Cap. II. De natura serierum recurrentium.

Lib. IV. Cap. II. De summis serierum recurrentium.

Auch Moivres Doctrine of chances enthält in der 2. Ausgabe (London 1738) einen Abriss der Theorie von «the summation of the recurring series», p. 193 ff.

bis 1827), auf dem Gebiete der Wahrscheinlichkeit verdankt die höhere Analysis (die sich allerdings inzwischen durch die Arbeiten von Newton, Leibnitz, Moivre, Stirling, Taylor, Mac-Laurin, der Bernoulli, Euler u. a. schon bedeutend entwickelt hatte) ebenfalls neue und wichtige Kapitel.

Schon 1759 veröffentlichte*) der 23jährige Professor an der Artillerieschule in Turin, Lagrange, eine für die Differenzenrechnung epochemachende Abhandlung über «L'intégration d'une équation differentielle à difference finie qui contient la théorie des suites recurrentes», worin die Theorie der recurrenten Reihen verallgemeinert und deren Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitsrechnung hervorgehoben wird.

Derjenige, welcher die Bedeutung der Lagrange'schen Arbeit am klarsten erkannte, war der ebenfalls noch junge Professor an der Pariser Militärakademie, Laplace. Schon 1774 schrieb er sein *Mémoire sur les suites recurro-recurrentes et sur leurs usages dans la théorie des hasards.***) In der Vorrede zu einem andern Mémoire***) sur la probabilité konnte er schreiben: «*J'ose me flatter que l'analyse dont je me servis pour cet object pourra mériter l'attention des géomètres*». Aus den vielen und langjährigen Arbeiten von Laplace über die Wahrscheinlichkeitsrechnung ging schliesslich sein grosses Werk über diesen Gegenstand, die *Théorie analytique des probabilités*,†) hervor, welches nicht nur für die *Wahrscheinlichkeitsrechnung grundlegend*, sondern auch für *die Integralrechnung, die Funktionen- und Interpolationstheorie sehr werthvoll ist.*

Die vorstehenden Notizen mögen dargethan haben, wie der Wahrscheinlichkeitsrechnung durch die Auffindung analytischer Hilfsmittel nicht nur die Pfade ihrer eigenen Entwicklung geebnet wurden, sondern wie sie dadurch ihrerseits auch einen wesentlichen fördernden Einfluss auf die Analysis ausgeübt hat.

Als Frucht der Wahrscheinlichkeitsrechnung darf auch das Laplace'sche Integral, welches in der mathematischen Physik eine grosse Rolle spielt,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

*) In Miscellanea Taurinensia, tome I. pag. 33—42.

**) In den «Mémoires, présentés par divers savants. t. VI. p. 353—371.

***) Histoire de l'Académie des sciences pour l'année 1778. p. 227 ff. Auf den Inhalt dieser Abhandlung soll später noch zurückgekommen werden.

†) Das klassische, Napoleon I. gewidmete Buch, erschien zum ersten Mal anno 1812.

zeichnet werden. Man erhält dieses Integral aus dem Bernoulli'schen Theorem.

Sind p und q die einfachen und konstanten Wahrscheinlichkeiten zweier entgegengesetzter Ereignisse E und E', so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer sehr grossen Anzahl von $\mu = m + n$ von Versuchen das Ereigniss E in einer Anzahl von m Malen, wobei m zwischen $\mu p \pm 1$ liegt, eintreffe (vorausgesetzt, dass für ein μ p-maliges Eintreffen des Ereignisses E das Maximum von Wahrscheinlichkeit vorhanden), ausgedrückt durch

$$W = \sum_{m = \mu p - 1}^{m = \mu p + 1} \frac{\mu!}{m!\, n!} p^m q^n$$

und zwar kann diese Wahrscheinlichkeit mit wachsendem μ beliebig nahe der Einheit gebracht werden.

Der Summenausdruck kann nun (vermittelst mehrmaliger Näherungen) in folgenden Integralausdruck übergeführt*) werden:

$$W = \frac{2}{\pi} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu qp}}$$

Es ist dies ebenfalls die Wahrscheinlichkeit dafür, dass m innerhalb der Grenzen $\mu p \pm 1$ oder hier nun innerhalb $\mu p \pm \gamma \sqrt{2\mu pq}$ liege, wo

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{2\mu pq}},$$

eine Funktion von l, μ und p ist.

Den Summenausdruck für W hat Jakob Bernoulli I. schon zu Anfang des vorigen Jahrhunderts gegeben, der Integralausdruck aber in obiger Form wurde erst beinahe ein Jahrhundert später von Laplace aufgestellt.

Die Festlegung jener Summe durch Jakob Bernoulli, deren Entwickelungsprocess bis zum Integralausdruck und die dabei aufgetretenen analytischen Methoden und Resultate historisch klar zu legen, ist die Aufgabe, die ich im ersten Theil meiner Arbeit zu lösen versucht habe. Dabei waren mir die vortrefflichen Notizen von Laplace**) und

---

*) Vrgl. Note 1 im Anhang.

**) Laplace, Essai philosophique sur les probabilités, veröffentlicht als Einleitung in der Théorie analyt. des probabilités und in einer Separatausgabe.

Todhunter*) über die Geschichte der analytischen Darstellung des Bernoulli'schen Theorems wegleitend.

Im Essai philosophique sur les probabilités**) sagt Laplace im Abschnitt: les lois de la probabilité qui résultent de la multiplication indéfinie des événemens: «Ce théorème indiqué par le bon sens «était difficile à démontrer par l'analyse. Aussi l'illustre géomètre «Jacques Bernoulli qui s'en est occupé le premier, attachait-il une «grande importance à la démonstration qu'il en a donnée». Weiter im Abschnitt: Notice historique sur le calcul de probabilité, wo Laplace von Bernoulli's Ars conjectandi spricht, finden wir:***)

«Cet ouvrage est encore remarquable par la justesse et la finesse «des vues, par l'emploi de la formule du binome dans ce genre de ques- «tions, et par la démonstration de ce théorème, savoir, qu'en multipliant «indéfiniment les observations et les expériences; le rapport des événe- «mens de diverses natures, approche de celui de leurs possibilités respec- «tives, dans des limites dont l'intervalle se reserre de plus en plus, en «mesure qu'ils se multiplient et devient moindre qu'aucune quantité assig- «nable. Ce théorème est très utile pour reconnaître par les observations, «les lois et les causes des phénomènes. Bernoulli attachait avec raison, «une grande importance à sa démonstration qu'il dit avoir méditée pen- «dant vingt années. . . . . .

«Moivre a repris dans son ouvrage le théorème de Jacques Bernoulli «sur la probabilité des résultats déterminés par un grand nombre d'ob- «servations. Il ne se contente pas de faire voir comme Bernoulli, que «le rapport des événemens qui doivent arriver, approche sans cesse de «celui de leurs possibilités respectives; il donne de plus une expression «élégante et simple de la probabilité que la différence de ces deux rap- «ports est contenue dans des limites données. Pour cela, il détermine «le rapport du plus grand terme du développement d'une puissance très «élevée du binome, à la somme de tous ses termes; et le logarithme hy- «perbolique de l'excés de ce terme, sur les termes qui en sont très voi- «sins. Le plus grand terme étant alors le produit d'un nombre considé- «rable de facteurs; son calcul numérique devient impraticable. Pour «l'obtenir par une approximation convergente, Moivre fait usage d'un «théorème de Stirling sur le terme moyen du binome élevé à une haute «puissance, théorème remarquable, surtout en ce qu'il introduit la racine

*) J. Todhunter, A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace. London 1865.

**) Separatausgabe (3. éd. Paris 1816) p. 74; Théorie analyt. des probabilités, introduction p. XLVII.

***) L. c. p. 211; p. CXLVI.

«carrée du rapport de la circonférence au rayon, dans une expression «qui semble devoir être étrangère à cette transcendante. Aussi Moivre «fut-il singulièrement frappé de ce résultat que Stirling avait déduit de «l'expression de la circonférence en produits infinis, expression à laquelle «Wallis était parvenu par une singulière analyse qui contient le germe «de la théorie si curieuse et si utile des intégrales définies.»

Den Laplace'schen Bemerkungen zur Geschichte des Bernoulli'schen Theorems lasse ich noch die Uebersicht folgen, die J. Todhunter*) über die nämliche Materie gibt: «With respect to the history of the «result obtained in art. 994 (Laplace'sche Darstellung des Bernoulli'«schen Theorems), we have to remark that James Bernoulli began «the investigation; then Stirling and De Moivre carried it on by the «aid of the theorem known by Stirling's name; and lastly, the theo«rem known by Euler's name gave the mode of expressing the finite «summation by means of an integral. But it will be seen that prac«tically we use only the first term of the series given in Euler's «theorem, in fact no more than amounts to evaluating an integral by «a rough approximate quadrature. Thus the result given by Laplace «was within the power of mathematiciens as soon as Stirling's Theo«rem had been published.»

Das vortreffliche Werk Todhunters über die Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung gibt die Notizen über das Bernoulli'sche Theorem zerstreut bei der Besprechung der Arbeiten von Bernoulli, Moivre und Laplace über die Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dagegen konnte in seiner Geschichte der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die Darstellung der analytischen Hilfsmittel desselben gar nicht eingegangen werden. Eine zusammenhängende, eingehende Darlegung dieser Verhältnisse, besonders wenn sie wesentlich neue Resultate zu Tage zu fördern vermag, schien mir daher ebenso interessant wie werthvoll zu sein.

II.

3. In einem Begleitschreiben zu seiner Schrift: De rationiis in ludo aleae**), schrieb der gelehrte Huygens an seinen Lehrer der Mathematik Franziskus von Schooten u. a. Folgendes:

*) J. Todhunter, History of the mathematical theory of probability, art. 995 pag. 553.

**) Diese Arbeit erschien als Anhang zu Schootens Exercitationes mathematicae, 1657. Huygens hat darin zum ersten Mal die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitslehre systematisch und analytisch formulirt, so dass Jacob Bernoulli diese Huygen'sche Schrift dann in sein erstes Buch der Ars conjectandi aufgenommen und commentirt hat.