

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1893)**

Heft 1305-1334

PDF erstellt am: **22.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

<http://www.e-periodica.ch>

$$\begin{aligned} \text{Log } (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m) &= \frac{1}{2} \text{Log} 2\pi + (m + \frac{1}{2}) \text{Log } (m + \frac{1}{2}) \\ &- (m + \frac{1}{2}) - \frac{(2-1) B(1)}{1 \cdot 2 \cdot 2(m + \frac{1}{2})} + \frac{(2^3-1) B(2)}{3 \cdot 4 \cdot 2^3 (m + \frac{1}{2})^3} - \dots, \end{aligned}$$

welche eine von der Moivre'schen etwas abweichende Form hat. Aus beiden Formeln aber ergibt sich für $\lim m = \infty$, wenn man zur Exponentialfunktion übergeht:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} m! = m^m e^{-m} \sqrt{2\pi m},$$

welche Formel auch die *Stirling'sche* genannt wird.

Es ist unstreitig das Verdienst des mit mathematischem Scharfsinn ausserordentlich begabten Stirling), die Constante $\sqrt{2\pi}$ bestimmt zu haben. Berücksichtigt man aber, dass Moivre zuerst das Coefficientenproblem gestellt und gelöst hat und dass derselbe auch die andere Aufgabe, die sich aus jenem ergeben musste, die Summe der Logarithmen der natürlichen Zahlen zu suchen, unabhängig und fast gleichzeitig mit Stirling ebenfalls gelöst hat, vergisst man nicht, dass Moivre diese Formel zuerst in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, für welche ihr grosse Bedeutung zukommt, praktisch verwendet hat, so muss man sagen, dass dessen Name mit der Formel in ebenso verdienstvollem Sinne verbunden ist, wie derjenige Stirlings.*

Die Ursprungsgeschichte der Stirling'schen Formel aber ist ganz besonders geeignet, zu zeigen, wie befruchtend eine angewandte mathematische Disziplin auf die reine Mathematik wirken kann.

V.

18. Nachdem hiemit die Untersuchungen Moivres und Stirlings über das *Coefficientenproblem* und über die *Summe von Log I(x)* sowohl unter sich wie auch in ihrem gegenseitigen Verhältniss gewürdigt sind, kehren wir wieder zu Moivres Abhandlung über das *Bernoullische Theorem* in dessen «*Doctrine of chances*» zurück.

*) James Stirling, geb. 1696 in St. Ninians, Grafschaft Stirling, Schottland, gest. 5. Dez. 1770 in Leadhills, studirte in Oxford Mathematik, bewarb sich als Agent einer schottischen Bergbaugesellschaft erfolglos um eine Professur. Er wurde schon 1729 Mitglied der Royal Society. Sein Hauptwerk, *Methodus differentialis*, erlebte 3 Auflagen (1730, 1753, 1764), war aber schon 1718 unvollständig in den Philos. Transact. erschienen.

Als zweiten analytischen Fundamentalsatz gibt Moivre folgenden*): *Der Logarithmus des Verhältnisses, welches der Coefficient des mittleren Termes einer binomischen Entwicklung von sehr hoher Potenz n in Bezug auf den Coefficienten irgend eines um das Intervall l von ihm entfernten Termes hat, wird in erster Näherung durch folgende Grösse ausgedrückt:*

$$\left(m + 1 - \frac{1}{2}\right) \text{Log} (m + 1 - 1) + \left(m - 1 + \frac{1}{2}\right) \text{Log} (m + 1 - 1) \\ - 2m \text{Log} m + \text{Log} \frac{m + 1}{m},$$

vorausgesetzt, dass $m = \frac{n}{2}$ gesetzt wird.

Sein Lösungsverfahren für dieses Resultat ist ein analoges wie beim Coefficientenproblem, geht also aus von logarithmischen Reihen (v. *Miscell. analyt.* p. 128 ff.) und es braucht daher hier nicht wiederholt zu werden.

Moivre zieht dann weiter aus dem angeführten Satze die folgenden hier skizzirten Schlüsse in Form von Zusätzen.

Zusatz 1. Wenn $m = \frac{n}{2}$ eine unendliche Grösse bedeutet, so ist *der Logarithmus des Verhältnisses, welches ein Term (immer in der Entwicklung $(1 + 1)^n$) der vom mittleren Term um das Intervall l entfernt ist, zum letzteren hat, gleich* $-\frac{2l^2}{n}$.

Zusatz 2. Die Zahl, deren hyperbolischer Logarithmus $-\frac{2l^2}{m}$ ist gleich der Reihe

$$1 - \frac{2l^2}{n} + \frac{4l^4}{2n^2} - \frac{8l^6}{6n^3} + \frac{16l^8}{24n^4} - \frac{32l^{10}}{120n^5} \pm \dots \text{ in inf.}$$

woraus folgt**), dass *die Summe der Terme vom grössten an bis und mit jenem, der um l Glieder entfernt ist, gleich ist:*

$$\frac{2}{\sqrt{2n\pi}} \left\{ 1 - \frac{2l^3}{1 \cdot 3n} + \frac{4l^5}{2 \cdot 5n^2} - \frac{8l^7}{6 \cdot 7n^3} + \frac{16l^9}{24 \cdot 9n^4} \mp \dots \text{ in inf.} \right\}$$

Setzt man nun $l = s \sqrt{n}$, alsdann wird die Summe:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ s - \frac{2s^3}{1 \cdot 3} + \frac{4s^5}{2 \cdot 5} - \frac{8s^7}{6 \cdot 7} + \frac{16s^9}{24 \cdot 9} \mp \dots \text{ in inf.} \right\}$$

*) *Loc. cit.* p. 236.

**) Moivre gibt keine weitere Begründung dieser Folgerung.

und für $s = \frac{1}{2}$, entsteht die Reihe:

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 8} - \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 16} + \frac{1}{24 \cdot 9 \cdot 32} - \frac{1}{120 \cdot 11 \cdot 64} + \dots \right\}.$$

Durch Addition von 7 oder 8 Gliedern dieser ziemlich gut convergirenden Reihe erhält man nach einfacher logarithmischer Rechnung als Verhältniss der Summe der 1 Terme zwischen dem mittleren und dem um 1 entfernten in der Entwicklung von $(1 + 1)^n$ zur Summe aller Terme die Zahl 0,341344.

Zusatz 3. Hat ein Ereigniss dieselbe einfache und constante Wahrscheinlichkeit auf Eintreffen wie auf Nichteintreffen, so wird, wie aus den Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung hervorgeht, die Wahrscheinlichkeit, dass das Ereigniss bei n Versuchen höchstens $\frac{n}{2} + 1$ und wenigstens $\frac{n}{2} - 1$ Mal eintreffe, ausgedrückt durch $\frac{S}{2^n}$, wenn S die Summe aller Terme in der Entwicklung von $(1 + 1)^n$, genommen zwischen den Gliedern, die um 1 Terme links und rechts vom mittleren abstehen (die äussersten inbegriffen), bedeutet. Die *Wahrscheinlichkeit* also, dass ein Ereigniss unter gleichen Verhältnissen in einer solchen Zahl von Malen eintrifft, die zwischen $\frac{n}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{n}$ liegt, ist daher gegeben durch das Doppelte der Zahl, die im Zusatz 2 gefunden wurde, durch 0,682688 und die Wahrscheinlichkeit des Gegentheils, dass die Eintreffenszahl ausserhalb diese Grenzen fällt, ist somit 0,317312.

Zusatz 4. Weil es aber unausführbar ist, eine unendliche Zahl von Experimenten anzustellen, so können wir den vorhergehenden Schluss auch auf grosse endliche Zahlen anwenden (folgt ein Beispiel für $n = 3600$).

Zusatz 5. Wir können daher als fundamentale Maxime hinstellen: *Das Verhältniss, welches in der Entwicklung des Binoms von hoher Potenz die Summe der Glieder, welche vom mittleren Term aus nach beiden Seiten um ein Intervall von $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ Gliedern liegen, zur Summe der ganzen Entwicklung hat, wird ausgedrückt durch die Zahl 0,682688 oder nahezu $\frac{28}{41}$; hiebei ist aber nicht nöthig, dass*

$n = \infty$ sei; sogar für $n = 100$ liefert die Regel noch ein erträgliches Resultat, wie ich durch Versuche bestätigt finde. Noch ist zu bemerken, dass $\frac{1}{2}\sqrt{n}$, im Verhältniss bezogen auf n , um so kleiner wird, je mehr n wächst; wächst also die Zahl der Beobachtungen, so werden die Grenzen im Verhältniss zu n immer enger während die Wahrscheinlichkeit dieselbe bleibt.

Zusatz 6. Wenn $l = \sqrt{n}$ gesetzt wird, so konvergirt die Reihe in Coll. 2 weniger gut als für $l = \frac{1}{2}\sqrt{n}$, und für eine erträgliche Annäherung sind daher viel mehr Terme zu addiren. In diesem Falle gebrauche ich die mechanische Quadratur, die von Sir Isaac Newton erfunden, von Mr. Cotes*), Mr. James Stirling und mir, vielleicht noch von anderen weiter ausgebildet worden ist. Sie besteht in der Bestimmung der Fläche einer Curve, wenn man von ihr eine gewisse Anzahl von Ordinaten A, B, C, D, \dots kennt, die sich in gleichen Intervallen folgen, wobei auch gilt, dass, je kürzer die Intervalle genommen werden, desto genauer das Resultat wird. Im vorliegenden Falle beschränke ich mich auf 4 Ordinaten, die mit A, B, C, D bezeichnet sein mögen. Wenn nun der Abstand der ersten von der letzten gleich 1 ist, so wird die Fläche gleich

$\frac{(A + D) + 3(B + C)}{8}$ sein**). Setzen wir nun die Distanzen

gleich $0, \frac{1}{6}\sqrt{n}, \frac{2}{6}\sqrt{n}, \frac{3}{6}\sqrt{n}, \frac{4}{6}\sqrt{n}, \frac{5}{6}\sqrt{n}$, und \sqrt{n} , verwenden für unsern

Fall die 4 letzten: $\frac{3}{6}\sqrt{n}, \frac{4}{6}\sqrt{n}, \frac{5}{6}\sqrt{n}, \frac{6}{6}\sqrt{n}$, nehmen alsdann die Quadrate dieser Ausdrücke, verdoppeln jeden, dividiren durch n und geben jedem das Zeichen minus, so haben wir die Grössen:

$-\frac{1}{2}, -\frac{8}{9}, -\frac{25}{18}, -2$, welche die hyperbolischen Logarithmen der

*) Cotes Roger (10. VII. 1682 — 5. VI. 1716), Professor der Astronomie und Physik in Cambridge, war der Verfasser der *Harmonia mensurarum* (Cambridge 1722), welche den bekannten Cotesischen Lehrsatz enthält.

***) Moivre leitet diese Formel (*Miscell. analyt. lib. VII c. II: «De Methodo differentiarum»*) aus der Newton'schen Interpolationsformel ab, nämlich aus:

$$u_n = u + \binom{u}{1} \Delta u + \binom{u}{2} \Delta^2 u + \dots + \binom{u}{n} \Delta^n u,$$

worin u_n das allgemeine Glied, u das Anfangsglied und $\Delta u, \Delta^2 u, \Delta^3 u, \dots$ die Anfangsglieder der ersten, zweiten, dritten \dots Differenzreihen sind.

Zahlen 0,60653, 0,41111, 0,24935, 0,13534 sind, die unsere 4 Ordinaten darstellen. Weil nun $l = \frac{1}{2}\sqrt{n}$ ist, so ergibt sich nach der Formel für unsere Fläche $0,170203\sqrt{n}$. Das Doppelte hiervon multipliziert mit $\frac{2}{\sqrt{2n\pi}}$ ergibt die Zahl 0,27160, und diese zu 0,682688 (Zusatz 7) addirt gibt 0,95428, welches die Wahrscheinlichkeit ist, dass bei n Versuchen das Ereigniss weder mehr als $\frac{n}{2} + \sqrt{n}$, noch weniger als $\frac{n}{2} - \sqrt{n}$ eintritt.

Zusatz 7. Auf demselben Wege kann man finden, wie gross die Wahrscheinlichkeit sei, dass die Zahl des Eintreffens zwischen andern Grenzen liege, z. B. zwischen $\frac{n}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{n}$. Hiefür würde sich die Zahl 0,99874 finden lassen.

Bei allen Beispielen spielt \sqrt{n} die Rolle eines Modulus für die Schätzung der Grenzen und der Wahrscheinlichkeiten.

Zusatz 8. Ist die einfache und constante Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses nicht gleich der entgegengesetzten, bildet die Zahl der günstigen zu den ungünstigen Fällen das Verhältniss $\frac{a}{b}$, so lässt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Ereigniss in n Versuchen eine solche Zahl von Malen eintreffe, die zwischen $\frac{an}{a+b} \pm l$ liegt, ausdrücken durch $\frac{S}{(a+b)^n}$, wo S die Summe aller Glieder in der binomischen Entwicklung von $(a+b)^n$ bedeutet, die links und rechts im Intervall von l Gliedern (die äussersten inbegriffen) vom grössten Gliede abstehen. Das Verhältniss, welches bei einer sehr hohen Potenz des Binoms $(a+b)^n$ das grösste Glied der Entwicklung zur Summe aller übrigen Glieder hat, wird ausgedrückt durch den Bruch $\frac{a+b}{\sqrt{abn\pi}}$ *).

Zusatz 9. Der Logarithmus des Verhältnisses, welches ein Term in der binomischen Entwicklung, der um das Intervall von l Termen vom grössten absteht, zu diesem hat, ist gleich $-\frac{a+b}{2abn}l^2$.

*) Meines Wissens gibt Moivre nirgends eine analytische Herleitung weder von dieser Formel, noch jener im Zusatz 9. Die Lösung ergibt sich jedoch analog wie jene bei Voraussetzung gleicher entgegengesetzter Wahrscheinlichkeiten.

Z u s a t z 10. Ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses auf Eintreffen verschieden von derjenigen auf Nichteintreffen, so werden die Probleme, die Summation der Terme in der Entwicklung von $(a + b)^n$ betreffend, mit derselben Leichtigkeit und Methode aufgelöst wie diejenigen, wo die entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten dieselben sind.

Aus dem Gesagten folgt, dass der Zufall die Ereignisse, die natürlichen Institutionen gemäss eintreten, sehr wenig in ihrem Eintreffen stört. Wird z. B. ein rundes Metallstück, dessen Seiten fein polirt sind und verschiedene Farben, z. B. schwarz und weiss zeigen, aufgeworfen, so wird mit der Vermehrung der Würfe das Verhältniss der erhaltenen Schwarz und Weiss sich immer mehr der Gleichheit nähern und es ist schon bei 3600 Versuchen die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Erscheinungszahl der einen oder andern Farbe zwischen 1770 und 1830 liege annähernd $\frac{2}{3}$; in diesem Falle macht also die Abweichung von der perfekten Gleichheit nur $\frac{1}{120}$ der gesammten Versuchszahl aus und mit derselben Wahrscheinlichkeit wäre die Abweichung bei 10,000 Versuchen nur $\frac{1}{2000}$ aller Erscheinungen. Mit der Erweiterung der Grenzen aber würde die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen einer der Farben in einer Anzahl von Malen, die in diesen Grenzen liegt, immer wachsen und schliesslich zur Gewissheit werden. Diese Ausdehnung der Grenzen aber, und das ist nicht zu vergessen, ist bei Vermehrung der Beobachtungen im Vergleich zum Wachsthum der Versuchszahl nicht so beträchtlich, diese wächst direct, jene mit der Quadratwurzel.

Schliesslich müsste also bei unendlich vielen Versuchen mit Gewissheit eine Gleichheit unter der Zahl der Erscheinungen von Schwarz und Weiss eintreten.

Die nämliche Betrachtung liesse sich auch durchführen für den Fall, in welchem die entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten ungleiche sind.

Abraham de Moivre schliesst seine werthvolle Abhandlung mit einer Ueberlegung, die an Jakob Bernoulli's kühne Schlusskonsequenzen erinnert: «And thus in all cases it will be found, that altho Chance «produces Irregularities, still the Odds will be infinitely great, that in «process of Time, those Irregularities will bear no proportion to the «recurrency of that Order which naturally results from original Design.»*)

*) Doctrine of chances, 2. ed. p. 243.

19. J. Todhunter hält Moivre neben Laplace für den grössten Analytiker in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wenn er sagt*): «*It will not be doubted that the theorie of Probability owns more to him than to any other mathematician, with the sole exception of Laplace.*»

Pflichtet man diesem Urtheil ohne Einschränkung bei, so muss insbesondere noch hervorgehoben werden, dass kein Mathematiker um die analytische Darstellung des Bernoulli'schen Theorems grössere Verdienste hat als Moivre. Nicht von vorneherein von einer so hohen philosophischen Warte ausschauend wie Jakob Bernoulli und sich demnach nicht weiter über die Wahrscheinlichkeit a posteriori verbreitend, schenkte Moivre der mathematischen Analyse des Problems sein Hauptinteresse, und erfolgreich hat er die heutigen Methoden und Resultate der analytischen Darstellung desselben im Prinzip gegeben.

Es gelang Moivre nicht nur, mit Stirlings Hülfe einen leicht zu berechnenden Ausdruck für die Fakultät zu finden, sondern er hat auch schon als Summe von Termen einer binomischen Entwicklung innerhalb gewisser Grenzen den Laplace'schen Integralausdruck gegeben.

Denn:

Bezeichnet M das Mittelglied der Entwicklung von $(1 + 1)^n$, M_1 das um ein Intervall von 1 Gliedern entfernte Glied, so wird nach Moivre (v. Zusatz 2)**):

$$1) \frac{M_1}{M} = e^{-\frac{2l^2}{n}} = 1 - \frac{2l^2}{n} + \frac{4l^2}{2n^2} + \frac{8l^6}{6n^3} \pm \dots \dots \dots \text{in inf.}$$

Wie nun Moivre die Summe der Terme zwischen M und M_1 gefunden, sagt er nirgends; es lässt sich aber annehmen, dass er die Ausdrücke der linken Seite der folgenden Gleichung in Exponentialreihen entwickelt und summirt hat:

$$\frac{M_1}{M} + \frac{M_{1-1}}{M} + \dots + \frac{M_1}{M} + \frac{M}{M} = e^{-\frac{2l^2}{n}} + e^{-\frac{2(1-1)^2}{n}} + e^{-\frac{2(1-2)^2}{n}} + \dots + e^{\frac{2}{n}} + e^0,$$

woraus sich ergibt

$$M_1 + M_{1-1} + \dots + M_1 + M = M. \text{ [Summe der Exponentialr.]}$$

Moivre erhält dann, indem er noch durch die Summe der ganzen Entwicklung dividirt den Ausdruck:

$$\frac{2}{\sqrt{2n\pi}} \left\{ 1 - \frac{2l^3}{1 \cdot 3n} + \frac{4l^5}{2 \cdot 5n^2} - \frac{8l^7}{6 \cdot 7n^3} + \frac{16l^9}{24 \cdot 9n^4} \mp \dots \text{in inf.} \right\}.$$

*) Todhunter, History of the Prob. p. 193.

***) Bei den folgenden Hinweisen auf Zusätze sind immer diejenigen in Moivre's Abhandlung gemeint.

Man wird sich nun leicht überzeugen, dass der Ausdruck in Parenthese weniger jene [Summe der Exponentialgrössen] darstellt, sondern genau das unbestimmte Integral der Reihe in Gleichung 1), d. h., Moivre nimmt für das Verhältniss der Summe der Terme von M bis M_1 (inclus. die äussersten) zur Summe aller Terme das bestimmte Integral, welches man gewöhnlich als Laplace'sches bezeichnet

$$\frac{2}{\sqrt{2n\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{2x}{n}} dx.$$

Um die Wahrscheinlichkeit zu erhalten, dass bei n Versuchen die Zahl der günstigen Beobachtungen sich innerhalb der Grenzen $\frac{n}{2} \pm 1$ liege, verdoppelt Moivre den Werth jenes Integrals (Zusatz 3) und erhält somit allgemein für die bezeichnete Wahrscheinlichkeit :

$$W = \frac{4}{\sqrt{2n\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{2x^2}{n}} dx,$$

oder im besondern Fall, wenn $1 = \frac{1}{2} \sqrt{n}$ gesetzt wird

$$W = 0,682688.$$

Für den Fall, in welchem die entgegengesetzten einfachen Wahrscheinlichkeiten ungleich sind, würde Moivre nach Zusatz 9 für W erhalten:

$$W = \frac{2(a+b)}{\sqrt{2abn\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{a+b}{2abn}x^2} dx.$$

Dieser Deduction haften zwei Ungenauigkeiten an. Zunächst wird das *mittlere grösste Glied zweimal gezählt*. Dieser Fehler compensirt sich zwar bei gleichen einfachen und entgegengesetzten Wahrscheinlichkeiten, wenn die Versuchszahl n als ungerade Zahl vorausgesetzt wird, in welchem Falle dann 2 Mittelglieder vorhanden sind.

Im Weiteren *benützt Moivre offenbar die Summationsformel :*

$$\sum_{x=0}^{x=1} \varphi(x) = \int_0^1 \varphi(x) dx.$$

Wie aber im nächsten Abschnitt gezeigt werden soll, hat Mac-laurin zuerst gefunden und Euler es auf andere Weise bestätigt, dass für eine stetige, nach endlichen Incrementen fortschreitende Funktion in erster Näherung die Formel gilt (wenn die Variable sehr gross wird):

$$\sum_{x=0}^{x=l} \varphi(x) = \int_0^{l+1} \varphi(x) dx - \frac{1}{2} \left[\varphi(x) \right]_0^{l+1}.$$

Darnach würde, bei gleichen entgegengesetzten, constanten Wahrscheinlichkeiten, wenn man die *Moivre'sche Funktion* $e^{-\frac{2x^2}{n}}$, die Stetigkeit besitzt und für $x = 0$ ein Maximum liefert, statt $\varphi(x)$ setzt und unter der Voraussetzung, dass die Versuchszahl n eine gerade ist,

$$W = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}} \left[2 \int_0^{l+1} e^{-\frac{2x^2}{n}} dx - e^{-\frac{2(l+1)^2}{n}} \right]$$

und im andern Falle, wenn die Versuchszahl ungerade,

$$W = \frac{2}{\sqrt{2n\pi}} \left[2 \int_0^{l+1} e^{-\frac{2x^2}{n}} dx - e^{-\frac{2(l+1)^2}{n}} + 1 \right].$$

Ungeachtet dieser Ungenauigkeiten, die sich wohl begreifen lassen, bleibt *Moivre der Schöpfer des Laplace'schen Integrals* und hat überhaupt das Verdienst, die Infinitesimalrechnung zuerst in der Wahrscheinlichkeitstheorie fruchttragend verwerthet zu haben (z. B. auch beim Coefficientenproblem). Ferner hat Moivre *zum ersten Mal* eine *Wahrscheinlichkeitscurve* angenommen, einzelne Flächentheile derselben durch mechanische Quadratur bestimmt (Zusatz 6) und deren Wendepunkte angegeben*). Interessant ist auch, dass Moivre im Falle von gleichen entgegengesetzten einfachen Wahrscheinlichkeiten die *Wendepunktsordinate* resp. den Term für $l = \frac{1}{2} \sqrt{n}$ (Zusatz 2) als *Fehlergrenze wählt*. Diese spielt heute bekanntlich in der Fehlertheorie**) eine wichtige Rolle, weil sich aus ihr ein charakteristischer Fehler, welcher der Wurzel aus dem mittleren Fehlerquadrat entspricht, ergibt.

Was die Analysis aus den Moivre'schen Wahrscheinlichkeitsstudien für sich gewonnen, braucht nach alledem nicht mehr weiter ausgeführt zu werden; dagegen möchten wir schliesslich noch der *logischen Klarheit und Uebersichtlichkeit* in Moivres analytischen Entwicklungen, die man bei Stirling oft vermisst und worin Moivre vielleicht der Lehrer der Meister in dieser Hinsicht — *Euler* und *Lagrange* — geworden ist, lobend gedenken.

*) Vergl. Note 3 im Anhang.

**) S. Hagen, Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, p. 73 ff.