VI.

20. Zeigte sich im letzten Abschnitt die Unzulänglichkeit des Moivre'schen Verfahrens für die Ueberführung einer nach endlichen Incrementen fortschreitenden Summe zum Integral, so geht hinwieder aus den Abschnitten III und IV hervor, dass die Summationsformeln von Moivre und Stirling zur angenäherten Bestimmung eines Werthes für Log $\Gamma(x+1)$ mehr empirischer Natur waren und daher der Allgemeingültigkeit ermangelten. Aber bis um die Mitte des vorigen Jahrhunderts hatte sich die Analysis schon bedeutend entwickelt, und es musste sich in der Reihentheorie selbst das Bedürfniss nach allgemeinen Summationsformeln geltend machen.

*Maclaurin**) war der erste, der auf Grund der von *Newton* begründeten mechanischen Quadratur eine allgemeinere Summationsformel für Reihen mit endlichen Differenzen aufstellte. Er betrachtet**) eine parabolische Curve von der Gleichung:

$$y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots\ldots,$$

oder wenn a die Anfangsordinate bezeichnet,

$$y = a + \frac{zda}{dz} + \frac{z^2d^2a}{2\,!\,dz^2} + \frac{z^3d^3a}{3\,!\,dz^3} + \ldots\ldots\ldots$$

Maclaurin setzt nun dz = 1 und bezeichnet mit A, B, C, D, ... die Flächen, deren gemeinsame Basis gleich dz und deren Ordinaten respective y, dy, d^2y, d^3y ..... sind und findet für

$$A = a + \frac{da}{2\,!} + \frac{d^2}{3\,!} + \frac{d^3a}{4\,!} + \ldots\ldots\ldots$$

dann wird

$$a = A - \frac{da}{2\,!} - \frac{d^2a}{3\,!} - \frac{d^3a}{4\,!} - \ldots\ldots\ldots$$

Werden nun auf analoge Weise da, d^2a, d^3a, d^4a .... bestimmt, wie z. B.

$$da = B - \frac{d^2a}{2\,!} - \frac{d^3a}{3\,!} - \frac{d^4a}{4\,!} - \ldots\ldots\ldots$$

. . . . ,

so ergibt sich schliesslich durch Substitution:

$$a = A - \frac{B}{2} + \frac{C}{12} - \frac{E}{720} + \frac{G}{30240} \mp \ldots\ldots\ldots$$

oder allgemein:

*) Colin Maclaurin, geboren zu Killnodden in Schottland im Jahre 1698, war Professor der Mathematik zu Aberdeen und Edinburgh. Er starb 1746.

**) Treatise of Fluxions (Edinburgh 1742) art. 830. a. fs.

$$a = A - KB + LC - MD + NE \mp \ldots\ldots\ldots$$

worin die Coeffizienten K, L, M, N ...., wenn man $k = \frac{1}{2\,!}$, $l = \frac{1}{3\,!}$, $m = \frac{1}{4\,!}$, ... setzt, nach folgendem Gesetze fortschreiten:

$$K = k = \frac{1}{2}$$

$$L = kK - l = \frac{1}{12}$$

$$M = kL - lK + m = o$$

$$N = kM - lL + mK - n = - \frac{1}{720}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

so dass also die Coeffizienten der Flächen D, F, H .... verschwinden. Nun ist A gleich dem Integral von ydz, B dasjenige von dy dz, C von d^2y dz, ..., alle Integrale innerhalb der Grenzen o und dz = 1 genommen. Daher ist B gleich der Differenz der Ordinaten $y_1 - y_0 = y_1 - a$, und C ist gleich der Differenz der ersten Ableitungen dieser Ordinaten nach z, E und G gleich der Differenz der 3. resp. der 5. Ableitungen derselben Ordinaten, ... Bezeichnet man diese Differenzen mit α, β, γ, δ, ..., so wird a oder:

$$y_0 = A - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{12} - \frac{\gamma}{720} + \frac{\delta}{30240} \pm \ldots\ldots\ldots$$

Setzt man nun eine Basis $z_0\,z_n$ in n aequidistante Theile zerlegt voraus, von denen jeder Theil gleich dz = 1 sei, bezeichne S die Summe der aequidistanten Ordinaten $y_0 + y_1 + y_2 + \ldots y_{n-2} + y_{n-1}$, sei ferner nach gegebener Definition $\alpha = y_n - y_0$,

$$\beta = \frac{dy_n}{dz} - \frac{dy_0}{dz}, \; \gamma = \frac{d^3y_n}{dz^3} - \frac{d^3y_0}{dz^3}, \ldots, \text{ so ist}$$

$$S = A - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{12} - \frac{\gamma}{720} + \frac{\delta}{30240} \pm \ldots\ldots\ldots$$

Dies ist die Summationsformel von Maclaurin für den Fall eines Incrementes gleich 1; für ein beliebiges Increment h erhält derselbe analog die Formel:

$$S = \frac{A}{h} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta\,h}{12} - \frac{\gamma\,h^3}{720} + \frac{\delta\,h^5}{30240} \mp \ldots\ldots\ldots$$

Erinnert man sich, dass A die Fläche der Curve von z_0 bis z_n ist und denkt man an die Bedeutung von α, β, γ . . . . , so ist leicht die Identität der letztern Formel mit der folgenden, nämlich mit der Euler'schen (für h = 1)

$$\sum_{z=0}^{z=n-1} y_z = \int_0^n y dz - \frac{1}{2}\Big[y_z\Big]_0^n + \left[\frac{B(1)}{2!}\frac{dy}{dz}\right]_0^n - \left[\frac{B(2)}{4!}\frac{d^3y}{dz^3}\right]_0^n + \ldots\ldots\ldots\ldots,$$

worin B(1), B(2), B(3) . . . . die Bernoulli'schen Zahlen bedeuten, festzustellen.

21. *Euler* gibt die Formel auf rein analytischem Wege in den Inst. Calcul. Different. p. II c. V: «Investigatio summae serierum ex Termino generali». Sei

y = f(x), dann wird:

$$v = f(x-1) = y - \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{2!\,dx^2} - \frac{d^3y}{3!\,dy^3} \pm \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nun ist, wenn man mit A den Werth für x = o bezeichnet, $\Sigma v = \Sigma y - y + A$, und substituirt man diesen Werth in die Gleichung:

$$\Sigma v = \Sigma y - \Sigma\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2!}\Sigma\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{3!}\Sigma\frac{d^3y}{dx^3} \pm \ldots\ldots\ldots,$$

so kommt:

$$y - A = \Sigma\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2!}\Sigma\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{3!}\Sigma\frac{d^3y}{dx^3} \mp \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzt man $\frac{dy}{dz} = z$, so ergibt sich durch Substitution:

$$\Sigma z = \int z\,dx + \frac{1}{2!}\Sigma\frac{dz}{dx} - \frac{1}{3!}\Sigma\frac{d^2z}{dx^2} \pm \ldots\ldots\ldots\ldots + \text{Constante.}$$

Es ist aber ebenso:

$$\Sigma\frac{dz}{dx} = z + \frac{1}{2!}\Sigma\frac{d^2z}{dx^2} - \frac{1}{3!}\Sigma\frac{d^3z}{dx^3} \pm \ldots\ldots\ldots$$

$$\Sigma\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{dz}{dx} + \frac{1}{2!}\Sigma\frac{d^3z}{dx^3} - \frac{1}{3!}\Sigma\frac{d^4z}{dx^4} \pm \ldots\ldots\ldots$$

. . . .

Diese Werthe in die Gleichung für Σz eingesetzt, ergibt die neue Formel:

$$\Sigma z = \int z\,dz + \alpha z + \beta\frac{dz}{dx} + \gamma\frac{d^2z}{dx^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

und zur Bestimmung der Coefficienten α, β, γ, ... ergeben sich die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha - \frac{1}{2} = 0 \\ \beta - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{6} = 0 \\ \gamma - \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{6} - \frac{1}{24} = 0 \\ \delta - \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{6} - \frac{\alpha}{24} + \frac{1}{120} = 0. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\} \text{also:} \quad \begin{array}{l}\alpha = \frac{1}{2} \\ \beta = \frac{1}{12} \\ \gamma = 0 \\ \delta = \frac{1}{720} \\ \dots\dots\dots\end{array}$$

Das Fortschreitungsgesetz der Coefficienten findet Euler nach einer längeren Untersuchung über die Bernoullischen Zahlen, die hier nicht ausgeführt werden soll, als folgendes: $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{B(1)}{2\,!}$; $\gamma = 0$, $\delta = -\frac{B(2)}{4\,!}$; $\varepsilon = 0$, ... und demnach wird seine Summenformel:

$$\Sigma z = \int z\,dx + \frac{1}{2} z + \frac{B(1)}{2\,!} \cdot \frac{dz}{dx} - \frac{B(2)}{4\,!} \cdot \frac{d^3 z}{dx^3} + \frac{B(3)}{6\,!} \cdot \frac{d^5 z}{dx^5} - \frac{B(4)}{8\,!} \cdot \frac{d^7 z}{dx^7} \pm \dots + \text{Const.}$$

Aus dieser von Euler gegebenen Form erhält man sofort durch Subtraktion von z und durch Annahme von Grenzen, wenn man $z = \varphi(x)$ setzt, die folgende:

$$\sum_{x=0}^{x=x-1} \varphi(x) = \int_0^x \varphi(x)\,dx - \frac{1}{2}\Big[\varphi(x)\Big]_0^x + \left[\frac{B(1)\,\varphi'(x)}{2\,!}\right]_0^x - \left[\frac{B(2)\,\varphi'''(x)}{4!}\right]_0^x + \left[\frac{B(3)\,\varphi^{(V)}(x)}{6!}\right]_0^x \mp \dots\dots$$

22. Unter den zahlreichen Anwendungen, die Euler von dieser Formel macht, findet sich (im nämlichen Kapitel, Art. 157) auch diejenige zur *Ermittlung eines Näherungswerthes für Log* $\Gamma(x+1)$*). Ist $z = \text{Log}\, x$, so wird:

$$\sum_{x=1}^{x=x} \text{Log}\, x = x\,\text{Log}\, x - x + \frac{1}{2}\text{Log}\, x + \frac{B(1)}{1.2.x} - \frac{B(2)}{3.4\,x^3} \pm \dots + C.$$

und für $x = 1$, folgt

$$C = 1 - \frac{B(1)}{1.2} + \frac{B(2)}{3.4} - \frac{B(3)}{5.6} \pm \dots\dots\dots\dots$$

*) Die folgende Darstellung gibt übrigens schon Maclaurin mittelst seiner Summationsformel, v. Treatise of fluxions, art. 842.

Nun ist nach der Formel von Wallis:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 4 \,.\, 6 \,.\, 6 \ldots\ldots (2x-2)2x}{1 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 5 \,.\, 5 \,.\, 7 \ldots\ldots (2x-1)(2x-1)} \qquad (\text{für } x = \infty)$$

somit

$$\begin{aligned}\operatorname{Log} \pi - \operatorname{Log} 2 = 2 \operatorname{Log} 2 + 2 \operatorname{Log} 4 + 2 \operatorname{Log} 6 + \ldots\ldots + \operatorname{Log} 2x \\ - 2 \operatorname{Log} 1 - 2 \operatorname{Log} 3 - 2 \operatorname{Log} 5 \ldots\ldots\end{aligned}$$

Weil aber für $\lim x = \infty$:

$$\sum_{x=1}^{x=x} \operatorname{Log} x = C + \left(x + \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log} x - x$$

$$\sum_{x=1}^{x=2x} \operatorname{Log} x = C + \left(2x + \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log} 2x - 2x$$

$$\sum_{x=1}^{x=x} \operatorname{Log} 2x = C + \left(x + \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log} x + x \operatorname{Log} 2 - x,$$

so folgt aus den beiden letzten Gleichungen:

$$\operatorname{Log} 1 + \operatorname{Log} 3 + \operatorname{Log} 5 + \ldots \operatorname{Log}(2x-1) = x \operatorname{Log} x + \left(x + \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log} 2 - x,$$

also für $\lim x = \infty$:

$$\begin{aligned}\operatorname{Log} \frac{\pi}{2} = 2\,C + (2x+1) \operatorname{Log} x + 2x \operatorname{Log} 2 - \operatorname{Log} 2 - \operatorname{Log} x - 2x \\ - 2x \operatorname{Log} x - (2x+1) \operatorname{Log} 2 + 2x\end{aligned}$$

$$\operatorname{Log} \frac{\pi}{2} = 2\,C - 2 \operatorname{Log} 2, \quad C = \frac{1}{2} \operatorname{Log} 2\pi.$$

Es ergibt sich somit für

$$\lim_{x=\infty} \sum_{x=1}^{x=x} \operatorname{Log} x = \frac{1}{2} \operatorname{Log} 2\pi + \left(x + \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log} x - x, \text{ oder}$$

$$\lim x = \infty \quad x! = \sqrt{2\pi} + x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}.$$

23. Die Summationsformel von Euler und Maclaurin ist aber nicht nur geeignet für die Darstellung eines Näherungswerthes für $\operatorname{Log} \Gamma(x+1)$, sondern auch *zweckmässig zur Summation der binomischen Terme* in derjenigen Form, in der sie nach Anwendung der sog. Stirling'schen Formel bei der Darstellung des Bernoulli'schen Theorems erscheinen, und in der That ist seit Laplace, der jene Formel von Euler und Maclaurin zuerst für den bezeichneten Zweck verwendete*), kein anderes Summationsverfahren gefunden worden. *Jene Formel ersetzt somit in hinreichender Weise die mühsamen empirischen Methoden Moivre's zur Ermittlung eines Näherungswerthes für den Bernoulli-schen Summenausdruck.*

---

*) S. Note 1 im Anhang.

Der geniale Laplace hat zum ersten Male mittelst seiner «fonctions génératrices» eine noch allgemeinere Methode angegeben, um einen Näherungswerth für Log $\Gamma(x+1)$ zu erhalten, nach welcher auch die Constante ohne Benutzung der Wallisischen Formel direct aus der Entwicklung hervorgeht*); er hat auch, nach dem Vorgange von Lagrange, die Euler-Maclaurin'sche Summationsformel auf anderem Wege gefunden. Aber Laplace räumt seinen «fonctions génératrices» gewiss einen zu grossen Einfluss auf die Darstellung des Bernoulli-schen Theorems ein, wenn er schreibt**): «Le calcul des fonctions génératrices, appliqué à cet objet, non seulement démontre avec facilité ce théorème, mais de plus il donne la probabilité que le rapport des évènemens observés ne s'écarte que dans certaines limites du vrai rapport de leurs possibilités respectives»; denn alle diese Consequenzen sind in genügend allgemeiner Weise schon mit Hülfe der Formel von Euler und Maclaurin zu ziehen. Schon vor Laplace, um die Mitte des vorigen Jahrhunderts, wäre es möglich gewesen, dem Bernoulli-schen Theorem diejenige analytische Form zu geben, die es heute besitzt. Der Grund, warum es nicht geschehen, liegt darin, dass sich von Moivre bis auf Laplace kein Mathematiker in productiver Weise auf diesem Gebiete bethätigte.

* * *

24. Die Ergebnisse des historischen Theiles dieser Arbeit, der die Entwicklungsgeschichte des Bernoulli'schen Summenausdruckes zum Laplace'schen Integralausdruck geben sollte, fassen wir folgendermassen zusammen:

1. Jakob Bernoulli I. hat nicht versucht, einen Näherungswerth für

$$\sum_{m=\mu p-1}^{m=\mu p+1} \frac{\mu!}{m!\,n!} p^m q^n$$

zu geben. Weil er das nach ihm benannte Theorem nur als Hülfssatz seiner Theorie der Wahrscheinlichkeit a posteriori betrachtete, genügte ihm der ganz allgemein gegebene Nachweis, dass mit der Vermehrung der Beobachtungen auch die Wahrscheinlichkeit immer grösser wird, dass die Erfahrungswahrscheinlichkeit eines Ereignisses gleich seiner absoluten wird.

---

*) Vgl. Note 4 im Anhang.

**) Essai philosophique sur les probabilités p. 74. Théorie anal. des probab., introduction p. XLVIII.

2. *Abraham de Moivre gab im Prinzip die Laplace'sche Analyse des Bernoulli'schen Theorems. Er fand nicht nur Näherungswerthe für den Binomialcoeffizienten und für $\Gamma(x)$, sondern gab auch das Laplace-sche Integral als Summe des Bernoulli'schen Ausdrucks in der Form von*

$$\frac{2(p+q)}{\sqrt{2pq\mu\pi}}\int_0^1 e^{\frac{p+q}{2pq\mu}x^2}dx.$$

3. *James Stirling hat, auf Anregung Moivre's, den cyklometrischen Charakter der den Näherungswerth für $\Gamma(x)$ und das Laplace-sche Integral begleitenden Constanten erkannt.*

4. *Aber erst der Summationsformel, welche von Maclaurin, dann von Euler gefunden worden ist, verdankt das Bernoulli'sche Theorem die allgemeine Entwicklung jener exakten analytischen Form, die ihm von Laplace gegeben wurde.*

VII.

25. Der jetzt folgende Abschnitt gibt *eine Verallgemeinerung der Serret'schen Ableitung der Stirling'schen Formel.*

Die ersten Darsteller dieser Formel benutzten zur Bestimmung der Constanten die Formel von Wallis. Nun hat *J. A. Serret* in einem Mémoire sur l'évaluation approchée du produit 1 . 2 . 3 . . . . . x, lorsque x est un très grand nombre, et sur la formule de Stirling*) auf elegante Weise gezeigt, dass *die Formel von Wallis zur Ableitung derjenigen von Stirling vollkommen hinreichend ist.* Er sagt darüber einleitend: « . . . . . Or, cette simple formule de Wallis suffit, à elle «seule, pour établir complètement celle de Stirling et la déduction est «si facile que la deuxième formule peut être regardée avec raison comme «une transformée de la première.» Serret's Darstellung ist die folgende:

Die Formel von Wallis ist:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\,\ldots\,(2\,x-2)\,(2\,x-2)\,2x}{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7\,\ldots\,2\,(x-3)\,(2\,x-1)\,(2\,x-1)},\ (\text{für}\,x=\infty)$$

und sie nimmt die sehr einfache Form**) an:

*) Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, année 1860, t. I. p. 1662.

**) Die Transformation ergibt zunächst:

$$S(x)=\frac{2}{\pi}\,\frac{[(x-1)!]^4\,2^{4(x-1)}\,.\,2\,x}{[(2x-1)!]^2}=\frac{1}{\pi x}\,\frac{(x!)^4\,2^{4x}}{[(2x)!]^2},$$

dann nach einfacher Umformung

$$S(x)=\left[\frac{x!}{x^x\sqrt{2\pi x}}\right]^4:\left[\frac{(2x!)}{(2x)^{2x}\sqrt{4\pi x}}\right]^2=\frac{[\varphi(x)]^2}{\varphi(2x)}.$$