2. *Abraham de Moivre gab im Prinzip die Laplace'sche Analyse des Bernoulli'schen Theorems. Er fand nicht nur Näherungswerthe für den Binomialcoeffizienten und für $\Gamma(x)$, sondern gab auch das Laplace-sche Integral als Summe des Bernoulli'schen Ausdrucks in der Form von*

$$\frac{2(p+q)}{\sqrt{2pq\mu\pi}}\int_0^1 e^{\frac{p+q}{2pq\mu}x^2}dx.$$

3. *James Stirling hat, auf Anregung Moivre's, den cyklometrischen Charakter der den Näherungswerth für $\Gamma(x)$ und das Laplace-sche Integral begleitenden Constanten erkannt.*

4. *Aber erst der Summationsformel, welche von Maclaurin, dann von Euler gefunden worden ist, verdankt das Bernoulli'sche Theorem die allgemeine Entwicklung jener exakten analytischen Form, die ihm von Laplace gegeben wurde.*

VII.

25. Der jetzt folgende Abschnitt gibt *eine Verallgemeinerung der Serret'schen Ableitung der Stirling'schen Formel.*

Die ersten Darsteller dieser Formel benutzten zur Bestimmung der Constanten die Formel von Wallis. Nun hat *J. A. Serret* in einem Mémoire sur l'évaluation approchée du produit 1 . 2 . 3 . . . . . x, lorsque x est un très grand nombre, et sur la formule de Stirling*) auf elegante Weise gezeigt, dass *die Formel von Wallis zur Ableitung derjenigen von Stirling vollkommen hinreichend ist.* Er sagt darüber einleitend: « . . . . . Or, cette simple formule de Wallis suffit, à elle «seule, pour établir complètement celle de Stirling et la déduction est «si facile que la deuxième formule peut être regardée avec raison comme «une transformée de la première.» Serret's Darstellung ist die folgende:

Die Formel von Wallis ist:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\,\ldots\,(2x-2)\,(2x-2)\,2x}{1\,.\,3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7\,\ldots\,2(x-3)\,(2x-1)\,(2x-1)},\ (\text{für } x=\infty)$$

und sie nimmt die sehr einfache Form**) an:

---

*) Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, année 1860, t. I. p. 1662.

**) Die Transformation ergibt zunächst:

$$S(x)=\frac{2}{\pi}\,\frac{[(x-1)!]^4\,2^{4(x-1)}\,.\,2x}{[(2x-1)!]^2}=\frac{1}{\pi x}\,\frac{(x!)^4\,2^{4x}}{[(2x)!]^2},$$

dann nach einfacher Umformung

$$S(x)=\left[\frac{x!}{x^x\sqrt{2\pi x}}\right]^4:\left[\frac{(2x!)}{(2x)^{2x}\sqrt{4\pi x}}\right]^2=\frac{[\varphi(x)]^2}{\varphi(2x)}.$$

1. $$\frac{[\varphi(x)]^2}{\varphi(2x)} = 1 \qquad (\text{für } x = \infty)$$

wenn man mit $\varphi(x)$ entweder den Ausdruck:

$$\frac{1 . 2 . 3 \ldots\ldots x}{\sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}}}$$

oder das Produkt dieses Quotienten mit einer Exponentialfunktion von der Form a^x bezeichnet, wobei a eine beliebige positive Constante bedeutet. Die Gleichung 1) gilt also auch, wenn man setzt:

2. $$\varphi(x) = \frac{1 . 2 . 3 \ldots x}{\sqrt{2\pi}\, e^{-x}\, x^{x+\frac{1}{2}}} \cdot \quad (e = \text{Basis der natür. Logarith.})$$

Aus dieser Gleichung folgt:

3. $$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = \frac{1}{1}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}} = e^{-1+\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)}.$$

Da $x > 1$, wird, wenn Θ' und Θ'' zwei Grössen bezeichnen, die sich zwischen 0 und 1 bewegen,

$$\mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{\Theta'}{2x^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{\Theta''}{3x^3}$$

folglich

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 + \left(\frac{\Theta''}{3} - \frac{\Theta'}{4}\right)\frac{1}{x^2} = 1 + \frac{\Theta}{x^2},$$

wo Θ zwischen -1 und $+1$ gelegen ist, daher

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = e^{\frac{\Theta}{x^2}}.$$

Aendert man nun successive x in $x + 1$, $x + 2$, $\ldots 2x - 1$, und bezeichnet man mit Θ_1, Θ_2, Θ_3, $\ldots$ Θ_{x-1} Grössen, die zwischen -1 und $+1$ liegen, so wird

$$\frac{\varphi(x+1)}{\varphi(x+2)} = e^{\frac{\Theta_1}{(x+1)^2}},\ \frac{\varphi(x+2)}{\varphi(x+3)} = e^{\frac{\Theta_2}{(x+2)^2}},\ \ldots\ldots\ \frac{\varphi(2x-1)}{\varphi(2x)} = e^{\frac{\Theta_{x-1}}{(2x-1)^2}}.$$

Multiplizirt man alle diese Gleichungen und beobachtet, dass

$$\frac{\Theta_0}{x^2} + \frac{\Theta_1}{(x+1)^2} + \ldots\ldots \frac{\Theta_{x-1}}{(2x-1)^2} < \frac{1}{x},$$

so kann man schreiben:

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)} = e^{\frac{\Theta}{x}},$$

wo Θ eine Grösse ist, die zwischen -1 und $+1$ liegt, und wird $x = \infty$, so hat man

4. $$\frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)} = 1. \qquad (\text{für } x = \infty).$$

Dividirt man nun Gleichung 1) durch 4) so kommt:

$$\varphi(x) = 1 \qquad (\text{für } x = \infty)$$

d. h. nach Formel 2):

$$1 . 2 . 3 \ldots x = \sqrt{2\pi}\, e^{-x}\, x^{x+\frac{1}{2}} (1 + \varepsilon_x),$$

wo ε_x eine Grösse ist, die für $x = \infty$ zu 0 wird.

26. Ist nun diese von Serret gegebene Darstellung eines Näherungswerthes für $\Gamma(x + 1)$ auch die einfachste und eleganteste, die je gegeben wurde, so erscheint sie doch einer Verallgemeinerung fähig zu sein. Wenn man die von Serret gefundene Funktion mit S(x) bezeichnet, so ergibt sich aus der Formel von Wallis für

$$\lim_{x=\infty} S(x) = \left[\frac{x!}{x^x\sqrt{2\pi x}}\right]^4 : \left[\frac{(2x)!}{(2x)^{2x}\sqrt{4\pi x}}\right]^2 = 1,$$

oder wenn man den Ausdruck

$$\frac{x!}{x^x\sqrt{2\pi x}}$$

mit $\varphi(x)$ bezeichnet, so wird

$$1) \lim_{x=\infty} S(x) = \frac{\varphi^2(x)}{\varphi(2x)} = 1.$$

Serret setzt aber die Funktion

$$\frac{x!}{x^x\sqrt{2\pi x}\; e^{-x}} = \varphi(x).$$

Diese Erweiterung von S(x) mit e^{4x} ist in der That beim Gedanken an den Stirling'schen Näherungswerth für x! sehr naheliegend.

Aber im allgemeineren Falle *muss jene Exponentialgrösse erst im Verlaufe der Entwicklung als gewisse Bedingung sich darstellen,* wie im Folgenden gezeigt werden soll.

Es sei also

$$\varphi(x) = \frac{x!}{x^x\sqrt{2\pi x}},$$

$$\lim_{x=\infty} S(x) = \frac{\varphi^2(x)}{\varphi(2x)} = 1.$$

Wie finden wir hieraus einen Werth für x!? Offenbar, wenn es gelingt, nachzuweisen, unter welcher Bedingung

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)} = 1 \text{ ist.}$$ Denn alsdann wird

$$\lim_{x=\infty} \frac{\dfrac{\varphi^2(x)}{\varphi(2x)}}{\dfrac{\varphi(x)}{\varphi(2x)}} = \varphi(x) = \frac{x!}{x^x\sqrt{2\pi x}} = 1.$$

Es soll nun untersucht werden, unter welchen Bedingungen $\lim\limits_{x=\infty} \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(2x)} = 1$ ist.

Dazu ist

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

und $\operatorname{Log} \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = 1 + \dfrac{1}{12x^2} - \dfrac{1}{12x^3} + \cdots + \dfrac{(n-1)(-1)^n}{2n(n+1)x^n} + \cdots$ in inf.

Die Reihe ist, da $x > 1$, convergent und die Glieder nehmen, selbst für $x = 1$, schon vom Gliede $-\dfrac{1}{12x^3}$ an, ab.

Es wird daher

$$2)\left\{\begin{array}{l}
\operatorname{Log} \dfrac{\varphi(x)}{\varphi(x+1)} = 1 + \dfrac{\Theta_0}{x^2}, \text{ wo } 0 < \Theta_0 < \dfrac{1}{12} \\
\operatorname{Log} \dfrac{\varphi(x+1)}{\varphi(x+2)} = 1 + \dfrac{\Theta_1}{(x+1)^2}, \text{ wo } 0 < \Theta_1 < \dfrac{1}{12} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \dots\dots\dots\dots\dots \\
\operatorname{Log} \dfrac{\varphi(2x-1)}{\varphi(2x)} = 1 + \dfrac{\Theta_{x-1}}{(2x)^2}, \text{ wo } 0 < \Theta_{x-1} < \dfrac{1}{12}.
\end{array}\right.$$

Werden die Gleichungen 2) addirt, so findet man

$$3)\ \operatorname{Log} \frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)} = x + \frac{\Theta}{x}, \text{ wo } 0 < \Theta < \frac{1}{12}$$

woraus, wenn man zur Exponentialfunktion übergeht, folgt

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)}\, e^{-x} = e^{\frac{\Theta}{x}}, \text{ oder}$$

$$4)\ \lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)}\, e^{-x} = 1.$$

Die Multiplikation mit der Exponentialgrösse e^{-x} ist somit die gesuchte Bedingung für die Existenz der Gleichung:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{\varphi(2x)} = 1.$$

Durch Division der Gleichungen 1) und 4) geht hervor:

$$\lim_{x=\infty} \varphi(x)\, e^x = 1, \text{ oder da } \varphi(x) = \frac{x!}{x^x\sqrt{2\pi x}},$$

resultirt schliesslich

$$\lim_{x=\infty} x! = x^x\, e^{-x} \sqrt{2\pi x},$$

$$\text{oder } x! = x^x\, e^{-x} \sqrt{2\pi x}\, (1+\omega_x),$$

worin ω_x für $\lim x = \infty$ verschwindet.

Bei der Bestimmung der Grenzen findet man*)

$$x^x \, e^{-x} \sqrt{2\pi x} < x! < x^x \, e^{-x+\frac{1}{12}} \sqrt{2\pi x} \qquad \text{und}$$

weil die Quantität $\frac{1}{12x}$ schon in der Gleichung 3) als Grenze aufgetreten, hegte ich die Vermuthung, dass sie sich ebenfalls durch die *obige Entwicklung als Grenze finden liesse.* Der Nachweis ist mir aber bis jetzt nicht gelungen.

VIII.

27. Dieser Abschnitt gibt einen *neuen vereinfachten Ausdruck für das Bernoullische Theorem.*

Es wurde im historischen Theil dieser Arbeit gezeigt, wie *Moivre* zuerst für den *Bernoullischen Summenausdruck*

$$W = \sum_{m = \mu p - l}^{m = \mu p + l} \frac{\mu!}{m!\, n!} \, p^m q^n ,$$

worin $m + n = \mu$, $p + q = 1$ und $l = \gamma \sqrt{2pqm}$ ist, einen Integralausdruck gegeben hat, welchen alsdann *Laplace* wie in Note 1 im Anhang ersichtlich, mit vollkommeneren Methoden genauer gab durch

$$W = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}} .$$

Dieser Ausdruck ist seit Laplace unverändert geblieben, man findet ihn heute noch in den besten Handbüchern für Wahrscheinlichkeitsrechnung, so in denen von *Meyer* und *Czuber*, von *Bertrand* u. a. m.

Bei Operationen mit demselben erweist sich jedoch die *Restfunktion* $\frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$ als sehr *unbequem.* Um so mehr muss es auffallen, dass seit Laplace noch niemand es versucht hat, dieselbe durch Vereinigung mit dem Integral ihrer isolirten Stellung zu entheben.

Dass dies möglich ist, soll im Folgenden gezeigt werden.

Es sei

$$y = \frac{\mu}{m!\, n!} \, p^m q^n \text{ das allgemeine Glied des}$$

Binoms $(p + q)^\mu$, worin p und q die bekannte Bedeutung haben. Alsdann wird, wie es schon Laplace gezeigt hat, mit Hülfe der Formel

*) Serret gibt diese Grenzenbestimmung auf hübsche Weise in seinen Cours d'algèbre supérieure (5. éd., Paris 1885) tome II, art. 393, p. 218.