Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Band: - (1893)
Heft: 1305-1334

Artikel: Beiträge zur Darstellung des Bernoulli'schen Theorems, der Gammafunktion und des Laplace'schen Integrals
Kapitel: Anhang
Autor: Eggenberger, J.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319064

Dieser neue Ausdruck erleichtert nicht nur die sehr zahlreichen theoretischen und praktischen Anwendungen des Bernoulli'schen Theorems, sondern ermöglicht auch genauere Resultate, und ich behalte mir vor, gelegentlich einige dieser Consequenzen zu ziehen.

Anhang.

Note 1. Laplace gibt folgende Darstellung des Bernoulli'schen Theorems*): Seien p und q resp. die einfachen Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse E und E', dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass in $m + n = \mu$ Versuchen das Ereigniss E m mal, E, n mal eintreffe, gleich dem $(m + 1)^{ten}$ Terme in der Entwicklung von $(p + q)^{\mu}$, nämlich gleich

$$\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots m\,1.2.3\ldots n}\,p^m q^n.$$

Bezeichnen wir den grössten Term in dieser Entwicklung mit M, so wird sein ihm vorangehender gleich $\frac{Mp}{q}\cdot\frac{n}{m+1}$, sein nachfolgender gleich $\frac{Mq}{p}\cdot\frac{m}{n+1}$ sein. Damit aber M der grösste Term ist, muss gelten

$$\frac{m}{n+1} < \frac{p}{q} < \frac{m+1}{n}$$

und hieraus folgt, dass

$$(\mu+1)\,p - 1 < m < (\mu+1)\,p$$

oder

$$m = (\mu+1)\,p - \sigma, \text{ wo } \sigma < 1, \text{ ist.}$$

Nun wird

$$p = \frac{m+\sigma}{\mu+1},\; q = 1 - p = \frac{n+1-\sigma}{\mu+1},\; \frac{p}{q} = \frac{m+\sigma}{n+1-\sigma},$$

und sind m und n sehr grosse Zahlen, so gilt die Relation

$$\frac{p}{q} = \frac{m}{n},$$

d. h. das *Eintreffen derjenigen Combination der Ereignisse E und E' hat ein Maximum von Wahrscheinlichkeit,* die *unter der Relation* $p : q = m : n$ *steht.*

*) Théorie analytique des probabilités (3. éd. Paris 1820) Liv. II, Chap. II, p. 280 e. l. s.

Der l^{te} Term nach dem grössten M ist gleich

$$\frac{\mu!}{(m-l)!\,(n+l)!}\; p^{m-l}\, q^{n+l}.$$

Nun ist

$$1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,n = n^{n+\frac{1}{2}}\, l^{-n} \sqrt{2\pi}\left\{1 + \frac{1}{12n} + \cdots\right\}$$

und es wird

$$\frac{1}{(m-l)!} = (m-l)^{l-m-\frac{1}{2}} \frac{e^{m-l}}{\sqrt{2\pi}}\left\{1 - \frac{1}{12(m-l)} - \cdots\right\}$$

$$\frac{1}{(n-l)!} = (n-l)^{l-n-\frac{1}{2}} \frac{e^{n-l}}{\sqrt{2\pi}}\left\{1 - \frac{1}{12(n-l)} - \cdots\right\}$$

Durch logarithmische Entwicklung und unter Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung $\frac{1}{\mu}$ wird

$$(m-l)^{l-m-\frac{1}{2}} = e^{l-\frac{l^2}{2m}}\, m^{l-m-\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{l}{2m} - \frac{l^3}{6m^2}\right\}$$

$$(n+l)^{-l-n-\frac{1}{2}} = e^{-l-\frac{l^2}{2n}}\, n^{-l-n-\frac{1}{2}}\left\{1 + \frac{l}{2n} - \frac{l^3}{6n^2}\right\}.$$

Weil $p = \frac{m+s}{\mu+1}$ ist $(s < 1)$, so kann man setzen: $p = \frac{m-\zeta}{\mu}$, wenn ζ sich in den Grenzen $\frac{n}{\mu+1}$ und $-\frac{\mu-n}{\mu+1}$ bewegt, also ein ächter Bruch ist. Dann wird $q = \frac{n+\zeta}{\mu}$ und man hat

$$p^{m-l}\, q^{n+l} = \frac{m^{m-l}\, n^{n+l}}{\mu^{\mu}}\left\{1 + \frac{\mu\zeta l}{mn}\right\},$$

woraus sich ergibt

$$\frac{\mu!}{(m-l)!\,(n+l)!}\; p^{m-l}\, q^{n+l} = \frac{\sqrt{\mu}\; e^{-\frac{\mu l^2}{2mn}}}{\sqrt{2\pi mn}}\left\{1 + \frac{\mu\zeta l}{mn} + \frac{l(n-m)}{2mn} - \frac{l^3}{6m^2} + \frac{l^3}{6n^2}\right\}.$$

Nimmt man in der letzten Gleichung l negativ, so erhält man einen Ausdruck für den Term, der dem grössten um l Glieder vorausgeht, und die Summe der beiden ist gleich

$$\frac{2\sqrt{\mu}}{\sqrt{2\pi mn}}\, e^{-\frac{\mu l^2}{2mn}}$$

Nun wird die Summe derjenigen Terme in der Entwicklung von $(p+q)^{\mu}$, welche gelegen sind zwischen 2 Termen, die nach links und rechts aequidistant um l Terme vom grössten M abstehen (inclus. die äussersten), ausgedrückt durch das endliche Integral:

$$\sum_{l=0}^{l=l} \frac{2\sqrt{\mu}}{\sqrt{2\pi mn}}\, e^{-\frac{\mu l^2}{2mn}} - \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2\pi mn}},$$

wobei berücksichtigt ist, dass man das grösste Glied, welches man für $l = 0$ bekommt, nur einmal zu zählen hat.

Wenn nun y_l eine Funktion von l bezeichnet, so gilt die Formel (nach Maclaurin und Euler):

$$\sum y_l = \int y_l dl - \frac{1}{2} y_l + \frac{1}{12}\frac{dy}{dl} + \ldots + \text{Const.},$$

welche sich in unserm Falle, wo $y_l = \frac{2\sqrt{\mu}}{\sqrt{2\pi mn}} e^{-\frac{\mu l^2}{2mn}}$ ist, und die erste Derivirte nach l von der Ordnung $\frac{1}{\mu}$ wird und vernachlässigt werden kann, in erster Näherung reduzirt auf:

$$\sum y_l = \int y_l \, dl - \frac{1}{2} y_l + \text{Const.}$$

Und nimmt man rechts die bestimmten Integrale (deren obere Grenze um eine Einheit höher ist als bei der Summe links) so wird, wenn man das Maximalglied für $l = 0$ mit Y bezeichnet:

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=l-1} y_\lambda = \int_0^l y d\lambda - \frac{1}{2} y_l + \frac{1}{2} Y \text{ oder auch}$$

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=l} y_\lambda = \int_0^l y d\lambda + \frac{1}{2} y_l + \frac{1}{2} Y.$$

Substituirt man nun für y_l und für Y die gegebenen Werthe in den Ausdruck 1), so wird derselbe, wenn man $t = \frac{l\sqrt{\mu}}{\sqrt{2mn}}$ setzt, gleich

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{l\sqrt{\frac{\mu}{2mn}}} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-t^2}\sqrt{\mu}}{\sqrt{2\pi mn}}$$

Weil nun $m = \mu p + \zeta$, $(\zeta < 1)$, so hat man

$$\frac{m+l}{\mu} - p = \frac{l+\zeta}{\mu} = \frac{t\sqrt{2mn}}{\mu\sqrt{\mu}} + \frac{\zeta}{\mu},$$

also drückt die Formel 2) die Wahrscheinlichkeit aus dafür, dass die Differenz zwischen dem Verhältniss der Zahl des Eintreffens des Ereignisses E zu μ, der Gesammtzahl aller Versuche und der einfachen Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses E innerhalb der Grenzen

$$\pm \frac{t\sqrt{2mn}}{\mu\sqrt{\mu}} + \frac{\zeta}{\mu}$$

gelegen ist.

N o t e 2. In Propos. XXI *interpolirt Stirling die Fakultätenreihe* 1, 1, 1 . 2, 1 . 2 . 3, 1 . 2 . 3 . 4, ... und *zwar speciell das zwischen 1 und 1 liegende Glied.*

Wegen der stark vorhandenen Divergenz der Differenzen der Reihe interpolirt er deren Logarithmenreihe, sucht zunächst den Logarithmenterm zwischen 10! und 11! und findet*) dafür 7.0 755 259 569 dem als Numerus 11899423. 08 entspricht. In Propos. XVI hat Stirling aber zugleich gezeigt, dass, wenn die intermediären Glieder der obigen Fakultätenreihe mit a, b, c, d, ... bezeichnet werden, die Relationen bestehen: $b = \frac{3}{2}a$, $c = \frac{5}{2}b$, $d = \frac{7}{2}c$ . . . . Indem er nun das Glied zwischen 10! und 11! successive durch $\frac{19}{2}, \frac{19}{2}, \frac{17}{1}, \ldots \frac{3}{2}$ dividirt, erhält er für das gesuchte intermediäre Glied die Zahl 0.8862269251. Das Quadrat dieses Werthes ist gleich der Fläche des Kreises vom Durchmesser 1, also wird das Glied selber gleich $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ sein. Ebenso folgt hieraus, dass dasjenige intermediäre Glied, das dem ersten vorausgeht, gleich $\sqrt{\pi}$ sein wird.

Stirling findet also durch äusserst mühsame numerische Berechnung folgende Reultate:

$$\Gamma\left(\tfrac{23}{2}\right) = \frac{21 \,.\, 19 \,.\, 17 \ldots\ldots 5 \,.\, 3}{2 \,.\, 2 \,.\, 2 \ldots\ldots 2 \,.\, 2}\,\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = 11899423.08$$

$$\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right) = 0.8862269251 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Dieses letzte Resultat benutzt Stirling bei der ersten Lösungsmethode des Coeffizientenproblems in Propos. XXII, die im wesentlichen darin be-

*) Mit Hülfe der Interpolationsformel (T = allgemeines Glied):

$$T = \frac{A + az}{2} + \frac{3B + bz}{2}\,\frac{z^2-1}{4 \,.\, 6} + \frac{5C + cz}{2}\,\frac{(z^2-1)(z^2-9)}{4 \,.\, 6 \,.\, 8 \,.\, 10} + \ldots\ldots$$

Die Formel gilt allgemein (auch für die intermediären Glieder) einer Reihe mit 2 Mittelgliedern, von der Form

. . . . $_3A$ $_1A$ A_1 A_3 . . . .

wenn die 1. Differenzen . . . . $_2a$ a a_4 . . . .

die 2. » . . . . $_1B$ B_1 . . . .

die 3. » . . . . b . . . .

. . . . ,

wenn man ferner $A = {}_1A + A_1$, $B = {}_1B + B_1$, $C = {}_1C + C_1$ . . . . setzt und mit z das Verhältniss bezeichnet, welches die Entfernung des zu interpolirenden Gliedes T von der Mitte zum constanten Intervall der Variabelen hat. Stirling gibt diese Formel in Propos, XX. deutet aber nur an, er sei mit Hülfe der Differenzenrechnung auf dieselbe gekommen.

steht, mit Hülfe der unten gegebenen Interpolationsformel das m^{te} Glied der Reihe

$$1, \frac{2}{1}A, \frac{4}{3}B, \frac{6}{5}C, \frac{8}{7}D \ldots\ldots$$

zu bestimmen.

Note 3. Die *Inflexionspunkte der Wahrscheinlichkeitscurve* bestimmt Moivre*) wie folgt: Wenn alle Glieder einer binomischen Entwicklung $(a+b)^n$ in gleichen Abständen auf eine gemeinsame Basis aufgetragen werden und man durch die Endpunkte derselben eine Curve legt, so hat diese 2 Inflexionspunkte, die auf verschiedenen Seiten des Maximalgliedes gelegen sind. Um nun den Inflexionspunkt zu bestimmen, sei H die zugehörige Ordinate, deren Stelle vom Anfang der Reihe aus mit l bezeichnet werde, dann wird das nächste Glied gegen den Anfang der Reihe hin gleich

$$\frac{l-1}{n-l+2} \cdot H \cdot \frac{a}{b},$$

und das nächste gegen das Ende der Reihe gleich

$$\frac{n-l+1}{l} \cdot H \cdot \frac{b}{a}.$$

Werden nun die Differenzen dieser Glieder in Bezug auf H gleichgesetzt, so ergibt sich aus

$$\frac{n-l+1}{l} \cdot \frac{b}{a} - 1 = 1 - \frac{l-1}{n-l+2} \cdot \frac{a}{b}$$

als Werth für l

$$l = \frac{a+3b+2bn \pm \sqrt{a^2+6ab+4nab+b^2}}{2a+2b}.$$

Wird im letzten Ausdruck die Wurzel mit r bezeichnet, so wird das Intervall, um welches der Inflexionspunkt links resp. rechts vom grössten Gliede absteht, gleich $\frac{a-b+r}{2a+2b}$ resp. $\frac{b-a+r}{2a+2b}$ sein, und wenn $a = b$ (wenn also die Wahrscheinlichkeitscurve symmetrisch zum grössten Terme verläuft), ist jeder der beiden Inflexionspunkte vom grössten und mittleren Gliede um das Intervall $\frac{1}{2}\sqrt{n+2}$ oder $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ (für n = sehr gross) abstehend.

Note 4. Laplace findet auf folgende Weise *einen Näherungswerth für die Fakultät***): Sei

*) Miscell. analytica lib. V, c. IV.

**) V. Mémoires de l'Académie royale des sciences pour l'année 1778: Mémoires sur les probabilités par P. S. Laplace art. XXIII. Dort gibt Laplace mittelst des Euler'schen Integrals $\int_0^1 x^p (1-x)^q dx$ auch einen Näherungswerth für den Binomialcoeffizienten.

$$y = x^p e^{-x}, \text{ so wird}$$
$$\int_0^\infty x^p e^{-x} dx = p!$$

y liefert sein Maximum, wenn $x = p$ ist. Setzt man nun $p = \frac{1}{\alpha}$ und $x = \frac{1}{\alpha} + \Theta$, so wird

$$\operatorname{Log} y - \operatorname{Log} p^p e^{-p} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{Log}(1 + \alpha\Theta) - \Theta \text{ und}$$
$$\int_0^\infty y dx = p^p e^{-p} \int e^{\frac{1}{\alpha}\operatorname{Log}(1+\alpha\Theta) - \Theta} d\Theta.$$

Substituiren wir noch

$$\operatorname{Log}(1 + \alpha\Theta) - \alpha\Theta = -\alpha t^2, \text{ so wird}$$
$$\frac{\alpha\Theta^2}{2} - \frac{\alpha^2\Theta^3}{3} + \frac{\alpha^3\Theta^4}{4} \mp \ldots\ldots = t^2.$$

Nun kann man finden:

$$\Theta = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} (ht + h' \alpha^{\frac{1}{2}} t^2 + h'' \alpha t^3 + \ldots\ldots),$$
$$\text{worin } h = \sqrt{2},\ h' = \frac{2}{3},\ h'' = \frac{\sqrt{2}}{18}, \ldots\ldots$$

und

$$d\Theta = \frac{dt}{\sqrt{\alpha}} (h + 2h'\alpha^{\frac{1}{2}} t + 3h''\alpha t^2 + \ldots)$$

Dann wird

$$\int_0^\infty y\, dx = p^{p+\frac{1}{2}} e^{-p} \int_{-\infty}^\infty (h + 2h'\alpha^{\frac{1}{2}} t + 3h''\alpha t^2 + \ldots\ldots) e^{-t^2} dt.$$

Nun ist

$$\int_0^\infty t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{1 . 3 . 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2^n} \int_0^\infty e^{-t^2} dt.$$

und mit Hülfe von

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{\xi(1+\eta)} d\xi\, d\eta = \frac{\pi}{2} \text{ findet man, dass}$$
$$\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \text{ Somit ergibt sich}$$
$$\int_0^\infty t^{2n} e^{-t^2} dt = \frac{1 . 3 . 5 \ldots\ldots (2n-1)}{2^n} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

und wenn darnach die letzte Formel für $\int_0^\infty y\,dx$ integrirt wird, erhält man schliesslich*):

$$p! = \int_0^\infty y dx = p^{p+\frac{1}{2}} e^{-p} \sqrt{\pi}\,(h + 1\,.\,3 \frac{\alpha h''}{2} + 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{\alpha^2 h''''}{2^2} + \cdots)$$

oder

$$p! = p^{p+\frac{1}{2}} e^{-p} \sqrt{2\pi}\,(1 + \frac{1}{12}\alpha + \cdots)$$

Nach dem Vorgange von Lagrange gibt Laplace**) die Eulersche Summationsformel durch den Beweis, dass

$$\sum y = \left[e^{h\frac{dy}{dx}} - 1 \right]^{-1} + \text{Const.}$$

wenn man in der Entwicklung der rechten Seite die Exponenten zugleich auf die Ordnung der Derivation $\frac{dy}{dx}$ bezieht und wenn $h \gtreqless 1$ das Increment der unabhängigen Variabeln x bedeutet. Es wird dann, wie man zeigen kann:

$$\sum y = \frac{1}{h} \int y dx - \frac{1}{2} y + \frac{hB(1)}{2!} y' - \frac{h^3 B(2)}{4!} y''' \pm \cdots + \text{Const.}$$

*) Die Integrale von der Form $\int_{-\infty}^{\infty} t^{2n+1} e^{-t^2} dt$ sind $= 0$.

**) V. Lacroix, Grand Traité, 2. édit. t. III, p. 98.

Berichtigungen.

Seite 126, 10. Zeile v. o. lies: $\frac{s+1}{s} < \frac{rs+r}{rs-s}$.

» 128, 14. » v. o. » 42787536.

» » 17. » v. o. » 44623980.

» » 13. » v. u. » 25500 Versuchen.