

Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Herausgeber: Naturforschende Gesellschaft Bern
Band: - (1895)
Heft: 1373-1398

Artikel: Über eine Eigenschaft einer Gammafunktion mit einer Potenz als Argument
Autor: Eggenberger, J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-319076>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

Download PDF: 17.05.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

J. Eggenberger.

Über eine Eigenschaft einer Gammafunktion mit einer Potenz als Argument.

(Eingereicht im Januar 1895.)

Das Euler'sche Integral II. Gattung sei definiert durch

$$1) \quad \Gamma(y) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{y-1} dx. \quad (e = \text{Basis der nat. Logarithmen.})$$

Substituiert man darin x durch az , so folgt

$$\Gamma(y) = a^y \int_0^{\infty} e^{-az} z^{y-1} dz \quad \text{und für } y = 1$$

$$2) \quad \Gamma(1) = a \int_0^{\infty} e^{-az} dz.$$

Weil aber nach 1):

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1,$$

so ergibt sich aus 2):

$$\frac{1}{a} = \int_0^{\infty} e^{-az} dz.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit da und integriert beiderseits zwischen 1 und a , so wird

$$3) \quad \log a = \int_0^{\infty} \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} dz.$$

Durch n -malige Multiplikation dieser Gleichung mit da und Integration zwischen den Grenzen 0 und a , erhalten wir rechts:

$$\int_0^a {}^{(1)} \log a \, da = a \log a - a$$

$$\begin{aligned} \int_0^a {}^{(2)} \log a \, da &= \int_0^a a \log a \, da - \int_0^a a \, da \\ &= \frac{a^2}{2} \log a - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^a {}^{(3)} \log a \, da &= \int_0^a \left(\frac{a^2}{2} \log a - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \right) da \\ &= \frac{a^3}{3!} \log a - \frac{a^3}{3! \cdot 3} - \frac{a^3}{3! \cdot 2} - \frac{a^3}{3!} \end{aligned}$$

$$\int_0^a {}^{(4)} \log a \, da = \frac{a^4}{4!} \log a - \frac{a^4}{4! \cdot 4} - \frac{a^4}{4! \cdot 3} - \frac{a^4}{4! \cdot 2} - \frac{a^4}{4!}$$

— — — — —
— — — — —

$$\begin{aligned} \int_0^a {}^{(n)} \log a \, da &= \frac{a^n}{n!} \log a - \frac{a^n}{n \cdot n!} - \frac{a^n}{(n-1) \cdot n!} - \frac{a^n}{(n-2) \cdot n!} - \\ &\quad - \dots - \frac{a^n}{3 \cdot n!} - \frac{a^n}{2 \cdot n!} - \frac{a^n}{n!} \\ &= \frac{a^n}{n!} \log a - \frac{a^n}{n!} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \right] \end{aligned}$$

$$\alpha) \quad \int_0^a {}^{(n)} \log a \, da = \frac{a^n}{n!} \log a - \frac{a^n}{n!} \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x}$$

und links:

$$\int_0^a {}^{(1)} \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} \, dz \, da = \int_0^\infty \left(a e^{-z} + \frac{e^{-az}}{z} - \frac{1}{z} \right) \frac{dz}{z}$$

$$\int_0^a {}^{(2)} \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} \, dz \, da = \int_0^\infty \left(\frac{a^2 e^{-z}}{2!} - \frac{e^{-az}}{z^2} + \frac{1}{z^2} - \frac{a}{z} \right) \frac{dz}{z}$$

$$\int_0^a \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} dz da = \int_0^\infty \left(\frac{a^3 e^{-z}}{3!} + \frac{e^{-az}}{z^3} - \frac{1}{z^3} + \frac{a}{z^2} - \frac{a^2}{2! z} \right) \frac{dz}{z}$$

$$\int_0^a \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} dz da = \int_0^\infty \left(\frac{a^4 e^{-z}}{4!} - \frac{e^{-az}}{z^4} + \frac{1}{z^4} - \frac{a}{z^3} + \frac{a^2}{2! z^2} - \frac{a^3}{3! z} \right) \frac{dz}{z}$$

$$\int_0^a \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} dz da = \int_0^\infty \left(\frac{a^5 e^{-z}}{5!} + \frac{e^{-az}}{z^5} - \frac{1}{z^5} + \frac{a}{z^4} - \frac{a^2}{2! z^3} + \frac{a^3}{3! z^2} - \frac{a^4}{4! z} \right) \frac{dz}{z}$$

$$\begin{aligned} \beta) \int_0^a \int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z} dz da &= \int_0^\infty \left(\frac{a^n e^{-z}}{n!} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-az}}{z^n} + \frac{(-1)^n}{z^n} \right. \\ &+ \frac{(-1)^{n-1} a}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^{n-2} a^2}{2! z^{n-2}} + \dots + \frac{(-1)^3 a^{n-3}}{(n-3)! z^3} + \frac{(-1)^2 a^{n-2}}{(n-2)! z^2} - \\ &\left. \frac{a^{n-1}}{(n-1)! z} \right) \frac{dz}{z} \\ &= \int_0^\infty \left[\frac{a^n}{n!} e^{-z} - \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \frac{1}{z} + \frac{a^{n-2}}{(n-2)!} \frac{1}{z^2} - \dots \right. \\ &\left. + \frac{(-1)^{n-2} a^2}{z^{n-2} 2!} + \frac{(-1)^{n-1} a}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-az}}{z^n} \right] \frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen $\alpha)$ und $\beta)$ folgt:

$$\begin{aligned} 4) \frac{a^n}{n!} \log a &= \frac{a^n}{n!} \cdot \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x} + \int_0^\infty \left[\frac{a^n}{n!} e^{-z} - \frac{a^{n-1}}{(n-1)! z} + \frac{a^{n-2}}{(n-2)! z^2} - \dots \right. \\ &\left. + \frac{(-1)^{n-2} a^2}{z^{n-2} 2!} + \frac{(-1)^{n-1} a}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-az}}{z^n} \right] \frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

Setzt man in Gleichung 4) der Reihe nach $a = 1, 2, 3 \dots$
 $a = 2, a = 1$ und addiert sämtliche Gleichungen, so ergibt sich, wenn man zur Abkürzung

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \dots (a-2)^{(a-2)^n} (a-1)^{(a-1)^n} = \Gamma(a^{a^n})$$

als neue Funktion setzt:

$$\begin{aligned} 5) \quad \frac{\log \Gamma(a^{a^n})}{n!} &= \frac{\sum_{x=1}^{x=a-1} x^n \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x}}{n!} + \int_0^\infty \left[\frac{e^{-z} \sum_{x=1}^{x=a-1} x^n}{n!} \right. \\ &\quad - \frac{\sum_{x=1}^{x=a-1} x^{n-1}}{(n-1)! z} + \frac{\sum_{x=1}^{x=a-1} x^{n-2}}{(n-2)! z^2} - \dots \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^{n-2} \sum_{x=1}^{x=a-1} x^2}{2! z^{n-2}} + \frac{(-1)^{n-1} \sum_{x=1}^{x=a-1} x}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n+1} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=a-1} e^{-\alpha z}}{z^n} \right] \frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

Ebenso für ein um die Einheit kleineres Argument:

$$\begin{aligned} 6) \quad \frac{\log \Gamma((a-1)^{(a-1)^n})}{n!} &= \frac{\sum_{x=1}^{x=a-2} x^n \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x}}{n!} + \int_0^\infty \left[\frac{e^{-z} \sum_{x=1}^{x=a-2} x^n}{n!} \right. \\ &\quad - \frac{\sum_{x=1}^{x=a-2} x^{n-1}}{(n-1)! z} + \frac{\sum_{x=1}^{x=a-2} x^{n-2}}{(n-2)! z^2} - \dots \\ &\quad \left. + \frac{(-1)^{n-2} \sum_{x=1}^{x=a-2} x^2}{2! z^{n-2}} + \frac{(-1)^{n-1} \sum_{x=1}^{x=a-2} x}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n+1} \sum_{\alpha=1}^{\alpha=a-2} e^{-\alpha z}}{z^n} \right] \frac{dz}{z}. \end{aligned}$$

Durch Subtraktion der Gleichung 6) von 5) und unter Berücksichtigung folgender Thatsachen:

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=a-1} e^{-\alpha z} = \frac{1 - e^{-(a-1)z}}{e^z - 1}.$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=a-2} e^{-\alpha z} = \frac{1 - e^{-(a-2)z}}{e^z - 1},$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=a-1} e^{-\alpha z} - \sum_{\alpha=1}^{\alpha=a-2} e^{-\alpha z} = e^{-(a-1)z} \quad \text{und}$$

$$\sum_{x=1}^{x=a-1} x^n - \sum_{x=1}^{x=a-2} x^n = (a-1)^n$$

erhält man:

$$(7) \quad \frac{\log \Gamma(a^n)}{n!} - \frac{\log \Gamma((a-1)^{(a-1)^n})}{n!} = \frac{(a-1)^n \sum_{x=1}^{x=n} \frac{1}{x}}{n!} +$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{(a-1)^n e^{-z}}{n!} - \frac{(a-1)^{n-1}}{(n-1)! z} + \frac{(a-1)^{n-2}}{(n-2)! z^2} \mp \dots \right. \\ \left. + \frac{(-1)^{n-2} (a-1)^2}{z^{n-2} 2!} + \frac{(-1)^{n-1} (a-1)}{z^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^n} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-(a-1)z}}{z^n} \right] \frac{dz}{z}.$$

Nach Gleichung 4) ist aber die rechte Seite von Gleichung 7)

$$= \frac{(a-1)^n \log(a-1)}{n!}.$$

Diesen Ausdruck substituiert, ergibt:

$$8) \quad \frac{\log \Gamma(a^n)}{n!} - \frac{\log \Gamma((a-1)^{(a-1)^n})}{n!} = \frac{(a-1)^n \log(a-1)}{n!}$$

oder

$$9) \quad \Gamma(a^n) = (a-1)^{(a-1)^n} \Gamma((a-1)^{(a-1)^n}).$$

Für $n=0$ folgt aus dieser Gleichung die bekannte Beziehung:

$$\Gamma(a) = (a-1) \Gamma(a-1).$$

Die in Gleichung 5) gegebene Funktion genügt somit der ersten Eigenschaft einer Gammafunktion. Der 0-Punkt ist für dieselbe ein Unstetigkeitspunkt.