C. Wagner.

Eingereicht den 5. August 1895.

Ueber die Darstellung einiger bestimmten Integrale durch Bessel'sche Funktionen.

(Fortsetzung.)

In einer früheren Arbeit [1]) habe ich die beiden folgenden allgemeinen Formeln gegeben:

$$\text{I.}\quad \int_0^{\pi} \cos^n (x \sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \overset{0}{J}(nx) + \binom{n}{1} \overset{0}{J}((n-2)x) + \binom{n}{2} \cdot \overset{0}{J}((n-4)x) + \cdots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \overset{0}{J}(x) \right\}$$

für jedes positive ganze ungerade n;

$$\text{II.}\quad \int_0^{\pi} \cos^n (x \sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \frac{1}{2} \binom{n}{\frac{n}{2}} \overset{0}{J}(o) + \binom{n}{\frac{n}{2}-1} \overset{0}{J}(2x) + \binom{n}{\frac{n}{2}-2} \overset{0}{J}(4x) + \cdots + \binom{n}{0} \overset{0}{J}(nx) \right\}$$

für jedes positive ganze gerade n.

Alle in diesen beiden Relationen vorkommenden Bessel'schen J-Funktionen haben denselben Index Null, dagegen sind ihre Argumente ungleich, wenn auch stets Vielfache desselben x. Es handelt sich nun darum, Funktionen mit verschiedenen Indices, aber mit gleichen Argumenten in vorstehende Gleichungen I und II einzuführen.

[1]) Berner Mittheilungen 1895. Seite 115.

Bessel hat für die Addition der Argumente bei der J-Funktion folgende allgemeine Formel gegeben:[1])

$$\overset{m}{J}(u+v) = \left(1+\frac{v}{u}\right)^m \left[\overset{m}{J}(u) - v\left(1+\frac{v}{2u}\right)\frac{\overset{m+1}{J}(u)}{1!} + v^2\left(1+\frac{v}{2u}\right)^2 \frac{2\overset{m+2}{J}(u)}{2!} \mp \cdots\right];$$

für den Spezialfall $m = o$ lautet dieselbe

$$\overset{0}{J}(u+v) = \left[\overset{0}{J}(u) - v\left(1+\frac{v}{2u}\right)\frac{\overset{1}{J}(u)}{1!} + v^2\left(1+\frac{v}{2u}\right)^2 \frac{\overset{2}{J}(u)}{2!} \mp \cdots\right],$$

welche wir nun benutzen wollen.

Mit Berücksichtigung derselben ergibt sich folgendes:

$$\overset{0}{J}(nx) = \overset{0}{J}(x+(n-1)x) = \overset{0}{J}(x) - (n-1)x\left(1+\frac{(n-1)x}{2x}\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + \left\{(n-1)x\right\}^2\left\{1+\frac{(n-1)x}{2x}\right\}^2\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \cdots$$

$$= \overset{0}{J}(x) - \frac{(n+1)(n-1)}{2}x\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + \left\{\frac{(n+1)(n-1)}{2}\right\}^2 x^2 \frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \cdots$$

$$\overset{0}{J}((n-2)x) = \overset{0}{J}(x+(n-3)x) = \overset{0}{J}(x) - (n-3)x\left(1+\frac{(n-3)x}{2x}\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + \left\{(n-3)x\right\}^2\left\{1+\frac{(n-3)x}{2x}\right\}^2\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \cdots$$

$$= \overset{0}{J}(x) - \frac{(n-1)(n-3)}{2}x\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + \left\{\frac{(n-1)(n-3)}{2}\right\}^2 x^2 \frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \cdots$$

$$\overset{0}{J}((n-4)x) = \overset{0}{J}(x+(n-5)x) = \overset{0}{J}(x) - (n-5)x\left(1+\frac{(n-5)x}{2x}\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + \left\{(n-5)x\right\}^2\left\{1+\frac{(n-5)x}{2x}\right\}^2\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \cdots$$

$$= \overset{0}{J}(x) - \frac{(n-3)(n-5)}{2}x\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + \left\{\frac{(n-3)(n-5)}{2}\right\}^2 x^2 \frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \cdots$$

. . . .

[1]) Bessel: Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht. Abhandlungen der Berliner Akademie der Wissenschaften 1824.

$$\overset{0}{J}(5x) = \overset{0}{J}(x+4x) = \overset{0}{J}(x) - 4x\left(1+\frac{4x}{2x}\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + (4x)^2\left(1+\frac{4x}{2x}\right)^2 \cdot \frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \ldots.$$

$$= \overset{0}{J}(x) - \frac{6\cdot 4\cdot x}{2}\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + \left(\frac{6\cdot 4\cdot x}{2}\right)^2\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \ldots.$$

$$\overset{0}{J}(4x) = \overset{0}{J}(x+3x) = \overset{0}{J}(x) - 3x\left(1+\frac{3x}{2x}\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + (3x)^2\left(1+\frac{3x}{2x}\right)^2 \cdot \frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \ldots.$$

$$= \overset{0}{J}(x) - \frac{5\cdot 3}{2}x\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + \left(\frac{5\cdot 3}{2}x\right)^2\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \ldots.$$

$$\overset{0}{J}(3x) = \overset{0}{J}(x+2x) = \overset{0}{J}(x) - 2x\left(1+\frac{2x}{2x}\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + (2x)^2\left(1+\frac{2x}{2x}\right)^2 \cdot \frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \ldots.$$

$$= \overset{0}{J}(x) - \frac{4\cdot 2}{2}x\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + \left(\frac{4\cdot 2\,x}{2}\right)^2\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \ldots.$$

$$\overset{0}{J}(2x) = \overset{0}{J}(x+x) = \overset{0}{J}(x) - x\left(1+\frac{x}{2x}\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + x^2\left(1+\frac{x}{2x}\right)^2\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \ldots.$$

$$= \overset{0}{J}(x) - \left(\frac{3\cdot 1}{2}x\right)\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + \left(\frac{3\cdot 1}{2}x\right)^2\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \ldots.$$

$$\overset{0}{J}(x) = \overset{0}{J}(x).$$

Unter der Voraussetzung

n = einer pos. ganzen ungeraden Zahl

erhält man somit für das verlangte Integral den Werth:

$$\text{I}^{\text{a.}}\quad \int_0^{\pi} \cos^n(x \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \Bigg\{ \Bigg(\left[1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{\frac{n-1}{2}} \right] \overset{0}{J}(x)$$

$$- \left[\frac{(n+1)(n-1)}{2} + \binom{n}{1} \frac{(n-1)(n-3)}{2} + \binom{n}{2} \frac{(n-3)(n-5)}{2} + \cdots + \binom{n}{\frac{n-1}{2} - 1} \frac{4 \cdot 2}{2} \right] x\, \frac{\overset{1}{J}(x)}{1!}$$

$$+ \left[\left\{ \frac{(n+1)(n-1)}{2} \right\}^2 + \binom{n}{1} \left\{ \frac{(n-1)(n-3)}{2} \right\}^2 + \binom{n}{2} \left\{ \frac{(n-3)(n-5)}{2} \right\}^2 + \cdots + \binom{n}{\frac{n-1}{2} - 1} \left(\frac{4 \cdot 2}{2} \right)^2 \right] x^2\, \frac{\overset{2}{J}(x)}{2!}$$

$$\mp \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$+ (-1)^r \left[\left\{ \frac{(n+1)(n-1)}{2} \right\}^r + \binom{n}{1} \left\{ \frac{(n-1)(n-3)}{2} \right\}^r + \cdots + \binom{n}{\frac{n-1}{2} - 1} \left(\frac{4 \cdot 2}{2} \right)^r \right] x^r\, \frac{\overset{r}{J}(x)}{r!}$$

$$\pm \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \Bigg) \Bigg\}.$$

Hiernach wird z. B. für $n = 9$:

$$\int_0^{\pi} \cos^9 (x \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{256} \Big\{ (1 + 9 + 36 + 84 + 126)\, \overset{0}{J}(x) - (40 + 9 \cdot 24 + 36 \cdot 12 + 84 \cdot 4)\, x\, \frac{\overset{1}{J}(x)}{1!} + ((40)^2 + 9 \cdot (24)^2 + 36\, (12)^2 + 84 \cdot (4^2))\, x^2\, \frac{\overset{2}{J}(x)}{2!} \mp \cdots \Big\}.$$

Unter der Voraussetzung

n = einer positiven ganzen geraden Zahl

entsteht in gleicher Weise:

$$\text{II}^{a}.\ \int_0^\pi \cos^{n}(x \sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}}\Bigg\{\left[\frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}}\right] +$$

$$+\left[\binom{n}{\frac{n}{2}-1}+\binom{n}{\frac{n}{2}-2}+\cdots+\binom{n}{0}\right]\overset{0}{J}(x) -$$

$$-\left[\binom{n}{\frac{n}{2}-1}\frac{3\cdot 1}{2}+\binom{n}{\frac{n}{2}-2}\frac{5\cdot 3}{2}+\cdots\right.$$

$$\left.+\binom{n}{0}\frac{(n+1)(n-1)}{2}\right] x\,\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!}$$

$$+\left[\binom{n}{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{3\cdot 1}{2}\right)^2+\binom{n}{\frac{n}{2}-2}\left(\frac{5\cdot 3}{2}\right)^2+\cdots\right.$$

$$\left.+\binom{n}{0}\left\{\frac{(n+1)(n-1)}{2}\right\}^2\right] x^2\,\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!}$$

$$+\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$+(-1)^r\left[\binom{n}{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{3\cdot 1}{2}\right)^r+\binom{n}{\frac{n}{2}-2}\left(\frac{5\cdot 3}{2}\right)^r+\right.$$

$$\left.\cdots+\binom{n}{0}\left\{\frac{(n+1)(n-1)}{2}\right\}^r\right] x^r\,\frac{\overset{r}{J}(x)}{r!}$$

$$\mp\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \Bigg\},$$

so z. B. für n = 6:

$$\int_0^\pi \cos^{6}(x \sin\varphi)\,d\varphi = \frac{\pi}{32}\Bigg\{10+\Big[15+6+1\Big]\overset{0}{J}(x)-\left[15\cdot\left(\frac{3\cdot 1}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+6.\left(\frac{5\cdot 3}{2}\right)+1.\left(\frac{7\cdot 5}{2}\right)\right] x\,\frac{\overset{1}{J}(x)}{1!}+$$

$$+\left[15.\left(\frac{3\cdot 1}{2}\right)^2+6.\left(\frac{5\cdot 3}{2}\right)^2+1.\left(\frac{7\cdot 5}{2}\right)^2\right] x^2\,\frac{\overset{2}{J}(x)}{2!}\mp\cdots\Bigg\}.$$

Unsere weitere Aufgabe ist nun, die in den Relationen I^a und II^a vorkommenden J-Funktionen sämmtlich durch die $\overset{0}{J}$- und $\overset{1}{J}$-Funktion zu ersetzen.

Der Einfachheit wegen schreiben wir die Gleichungen I^a und II^a in der Form:

$$I^{b.} \int_0^{\pi} \cos^n (x \sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \alpha_0 \overset{0}{J}(x) - \alpha_1 \frac{x}{1!} \overset{1}{J}(x) + \alpha_2 \frac{x^2}{2!} \overset{2}{J}(x) \mp \dots \right.$$
$$\left. + (-1)^r \alpha_r \frac{x^r}{r!} \overset{r}{J}(x) \pm \dots \right\}$$

$$II^{b.} \int_0^{\pi} \cos^n (x \sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \left\{ \beta + \beta_0 \overset{0}{J}(x) - \beta_1 \frac{x}{1!} \overset{1}{J}(x) + \right.$$
$$\left. + \beta_2 \frac{x^2}{2!} \overset{2}{J}(x) \mp \dots + (-1)^r \beta_r \frac{x^r}{r!} \overset{r}{J}(x) \pm \dots \right\},$$

wobei die Grössen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots \beta, \beta_0, \beta_1, \beta_2 \dots$ die entsprechenden in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke ersetzen sollen.

Bekanntlich kann man durch zwei gegebene J-Funktionen alle übrigen ausdrücken, analog der bereits von Bessel gefundenen Reduktionsformel[1])

$$\overset{v}{J}(x) = \frac{2(v-1)}{x} \overset{v-1}{J}(x) - \overset{v-2}{J}(x),$$

oder auch, wenn man statt v die Grösse v + 1 einführt

$$\frac{2v}{x} \overset{v}{J}(x) = \overset{v-1}{J}(x) + \overset{v+1}{J}(x).$$

Mit Hilfe ersterer kann $\overset{v}{J}(x)$ auf $\overset{v-1}{J}(x)$ und $\overset{v-2}{J}(x)$ reduzirt werden. Drückt man alsdann mittelst der gleichen Formel $\overset{v-1}{J}(x)$ durch $\overset{v-2}{J}(x)$ und $\overset{v-3}{J}(x)$ aus, und setzt diesen Werth in obige Gleichung ein, so erscheint $\overset{v}{J}(x)$ durch $\overset{v-2}{J}(x)$ und $\overset{v-3}{J}(x)$ bestimmt. Durch m-malige Wiederholung

[1]) Ebendaselbst.

dieses Verfahrens kann schliesslich $\overset{v}{J}(x)$ durch $\overset{v-m}{J}(x)$ und $\overset{v-m-1}{J}(x)$ ausgedrückt werden, was zuerst Lommel bekannt gab. Seine Formel lautet[1]):

$$\overset{v}{J}(x) = \overset{v-m}{J}(x) \sum (-1)^p \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2v-2m+2p)^{m-2p|2}}{x^{m-2p}} -$$

$$- \overset{v-m-1}{J}(x) \sum (-1)^p \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2v-2m+2+2p)^{m-1-2p|2}}{x^{m-1-2p}}.$$

Setzt man hierin $v = m+1,$
so entsteht:

$$\overset{m+1}{J}(x) = \overset{1}{J}(x) \sum (-1)^p \frac{(m-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+2)^{m-2p|2}}{x^{m-2p}} -$$

$$- \overset{0}{J}(x) \sum (-1)^p \frac{(m-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+4)^{m-1-2p|2}}{x^{m-1-2p}},$$

wo die Ausdrücke hinter den Summenzeichen die allgemeinen Glieder zweier endlichen Reihen vorstellen, deren einzelne Glieder daraus hervorgehen, wenn man statt p der Reihe nach 0, 1, 2 .... und alle positiven ganzen Zahlen einsetzt; in der ersten Reihe braucht man p nicht grösser als $\frac{m}{2}$ zu nehmen, weil für grössere Werthe von p der Faktor $(m-p)^{p|-1}$ und damit alle folgenden Glieder der Reihe Null werden; ebenso ist der grösste Werth für p in der zweiten Reihe gleich $\frac{m-1}{2}$. Setzt man in dieser Gleichung nach und nach m = 1, 2, 3, ... (r — 1) ..., so erhält man die einzelnen Funktionen $\overset{2}{J}(x)$, $\overset{3}{J}(x)$, $\overset{4}{J}(x)$ ... $\overset{r}{J}(x)$ ... ausgedrückt durch die Funktionen $\overset{0}{J}(x)$ und $\overset{1}{J}(x)$.

Wir schreiben:

$$\overset{2}{J}(x) = A_1 \overset{1}{J}(x) - B_1 \overset{0}{J}(x)$$

$$\overset{3}{J}(x) = A_2 \overset{1}{J}(x) - B_2 \overset{0}{J}(x)$$

. . . .

$$\overset{r}{J}(x) = A_{r-1} \overset{1}{J}(x) - B_{r-1} \overset{0}{J}(x),$$

wo:

$$A_1 = \sum (-1)^p \frac{(1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+2)^{1-2p|2}}{x^{1-2p}};$$

$$A_2 = \sum (-1)^p \frac{(2-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+2)^{2-2p|2}}{x^{2-2p}}$$

. . . .

[1]) Lommel: «Studien über die Bessel'schen Funktionen.» Leipzig, 1868. Seite 3.

$$A_{r-1} = \sum (-1)^p \frac{(r-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+2)^{r-1-2p|2}}{x^{r-1-2p}} \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

und

$$B_1 = \sum (-1)^p \frac{(1-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+4)^{1-1-2p|2}}{x^{1-1-2p}},$$

$$B_2 = \sum (-1)^p \frac{(2-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+4)^{2-1-2p|2}}{x^{2-1-2p}}$$

. . . .

$$B_{r-1} = \sum (-1)^p \frac{(r-1-1-p)^{p|-1}}{p!} \cdot \frac{(2p+4)^{r-1-1-2p|2}}{x^{r-1-1-2p}}, \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \text{ ist.}$$

Mit Berücksichtigung dieser Substitutionen erhalten wir für unsere beiden Integrale, wenn wir die in Gleichung I^b und II^b angegebenen Coeffizienten gehörig beobachten, schliesslich die Formeln:

$$I^{c.} \int_0^\pi \cos^n (x \sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \Bigg\{ \Bigg[\alpha_0 - \alpha_2 B_1 \frac{x^2}{2!} + \alpha_3 B_2 \frac{x^3}{3!} \mp \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$+ (-1)^{r+1} \alpha_r B_{r-1} \frac{x^r}{r!} \mp \cdot \cdot \cdot \Bigg] \overset{0}{J}(x)$$

$$+ \Bigg[- \alpha_1 \frac{x}{1!} + \alpha_2 A_1 \frac{x^2}{2!} - \alpha_3 A_2 \frac{x^3}{3!} \pm \cdot \cdot \cdot$$

$$+ (-1)^r \alpha_r A_{r-1} \frac{x^r}{r!} \mp \cdot \cdot \cdot \Bigg] \overset{1}{J}(x) \Bigg\};$$

$$II^{c.} \int_0^\pi \cos^n (x \sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2^{n-1}} \Bigg\{ \beta + \Bigg[\beta^0 - \beta_2 B_1 \frac{x^2}{2!} + \beta_3 B_2 \frac{x^3}{3!} \mp \cdot \cdot \cdot$$

$$+ (-1)^{r+1} \beta_r B_{r-1} \frac{x^r}{r!} \pm \cdot \cdot \cdot \Bigg] \overset{0}{J}(x)$$

$$+ \Bigg[- \beta_1 \frac{x}{1!} + \beta_2 A_1 \frac{x^2}{2!} - \beta_3 A_2 \frac{x^3}{3!} \pm \cdot \cdot \cdot$$

$$+ (-1)^r \beta_r A_{r-1} \frac{x^r}{r!} + \cdot \cdot \cdot \Bigg] \overset{1}{J}(x) \Bigg\}.$$