Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Band: - (1898)
Heft: 1451-1462

Artikel: Eigenschaften Besel'scher Funktionen IIter Art
Autor: Otti, H.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319099

H. Otti.

Eigenschaften Bessel'scher Funktionen II[ter] Art.

Einleitung.

Als Bessel'sche Funktion zweiter Art ist nicht zu allen Zeiten und von allen Mathematikern, die sich eingehender mit dieser Materie beschäftigt haben, ein und dieselbe Funktion bezeichnet worden.

Die Bessel'sche Funktion erster Art, für welche man allgemein das Symbol $J^n(x)$ angenommen hat, genügt der Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$x^2 \frac{\partial^2 J^n(x)}{\partial x^2} + x \frac{\partial J^n(x)}{\partial x} + (x^2 - n^2) J^n(x) = 0$$

und zwar ist sie dasjenige partikuläre Integral derselben, welches für alle endlichen Werte von x endlich und stetig bleibt.

Es läge nun sehr nahe, als Bessel'sche Funktion zweiter Art die andere partikuläre Lösung der obigen Differentialgleichung zu definieren. In der That ist dies auch von *E. Lommel* in seinen «Studien über die Bessel'schen Funktionen» [1]) und in seinem Aufsatz «Zur Theorie der Bessel'schen Funktionen» im 3[ten] Band der Mathematischen Annalen pag. 475 u. ff. für die zu $J^n(x)$ komplementäre Funktion $Y^n(x)$ [2]) geschehen. Diese Ausdruckweise hat man wohl allgemein verlassen und bezeichnet nun mit *Carl Neumann* als Bessel'sche Funktion zweiter Art eine Funktion $O^n(x)$, welche mit $J^n(x)$ in Reihenentwicklungen für Funktionen auftritt, die hinsichtlich ihrer Eindeutigkeit und Stetigkeit gewissen Bedingungen unterworfen sind.

---

[1]) Leipzig, Teubner, 1868.

[2]) Vergl. Math. Ann. III, Seite 25 und 31.

Wie Neumann in seiner vortrefflichen Arbeit «Theorie der Bessel'schen Funktionen[3]), Ein Analogon zur Theorie der Kugelfunktionen», II. Abschnitt, pag. 24 u. ff., gezeigt hat, lässt sich nämlich jede gegebene Funktion, die bezüglich ihrer Stetigkeit und Eindeutigkeit gewissen Bedingungen entspricht, stets in eine nach den $J^n(x)$ fortschreitende Reihe entwickeln oder auch in eine Doppelreihe, welche nach den $J^n(x)$ und $O^n(x)$ fortschreitet.

Neumann ist zu dem obigen Satz mit Hülfe der bekannten Methode von Cauchy gelangt und hat in § 7 und § 12 des genannten Werkes den Ausdruck $\frac{1}{x-y}$ in eine Reihe von folgender Form entwickelt:

$$\frac{1}{x-y} = J^0(y)\, O^0(x) + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} J^n(y)\, O^n(x).$$

Die Entwicklung ist dabei nur so lange gültig, als mod. $x >$ mod. y ist. Die Funktionen $O^n(x)$ sind keineswegs komplementär zu den $J^n(x)$, sondern sie genügen einer andern Differentialgleichung. Sie stehen aber nach dem obigen Satze zu den Funktionen $J^n(x)$ in ähnlicher Beziehung, wie die Kugelfunktionen II^ter Art zu denen I^ter Art, und aus diesem Grunde hat sie C. Neumann Bessel'sche Funktionen II^ter Art genannt.

1. Definition der Bessel'schen Funktion II^ter Art durch eine Summenformel.

Die Neumann'sche Funktion $O^n(x)$ ist definiert durch folgende Summenformel: [4])

$$O^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n+1}{2}} \frac{n}{4} \cdot \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n+1-2\lambda}. \tag{1}$$

Es ist also eine ganze rationale Funktion vom $(n+1)^{ten}$ Grade in $\frac{1}{x}$. Sie verschwindet für $x = \infty$. Die Reihe bricht von selber ab, und

[3]) Leipzig, Teubner, 1867.

[4]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III, Seite 137. — Vergl. L. Crelier: Sur quelques propriétés des fonctions Besséliennes, tirées de la «Théorie des fractions continues». Thèse de doctorat. Annali di Matematica XXIV. Mailand 1896.

zwar sind dabei 2 Fälle zu unterscheiden, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

I. Fall. $n = \text{gerade} = 2m,$

$$\frac{n+1}{2} = m + \frac{1}{2};$$

also muss dann $\lambda < m + \frac{1}{2}$ bleiben, und daher ist der letzte Wert, den λ annehmen darf:

$$\lambda = m = \frac{n}{2},$$

und der letzte Term der Reihenentwicklung nimmt die folgende Gestalt an:

$$\frac{n}{4} \cdot \frac{\left(\frac{n}{2} - 1\right)!}{\frac{n}{2}!} \left(\frac{2}{x}\right)^1 = \frac{n}{4} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{2}{x} = \frac{1}{x}.$$

II. Fall. $n = \text{ungerade} = 2m - 1,$

$$\frac{n+1}{2} = \frac{2m}{2} = m;$$

der letzte Term, den λ annehmen darf, wird in diesem Falle für

$$\lambda = \frac{n-1}{2} \text{ erhalten};$$

daher ist der Schlussterm der Reihe:

$$\frac{n}{4} \frac{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!} \left(\frac{2}{x}\right)^2 = \frac{n}{x^2}.$$

Demgemäss kann man also zwei Reihen aufstellen für ein gerades und ein ungerades n.

$$O^n(x) = \frac{1}{x}\left\{1 + \frac{n^2}{x^2} + \frac{n^2(n^2-2^2)}{x^4} + \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{x^6} + \cdots\right\} \quad (2)$$

gerades n;

$$O^n(x) = \frac{n}{x^2}\left\{1 + \frac{n^2-1^2}{x^2} + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{x^4} + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{x^6} + \cdots\right\} \quad (3)$$

ungerades n.

In dieser Gestalt finden sich die beiden Entwicklungen in der schon citierten Arbeit von C. Neumann, pag. 12 und 13. Mittelst dieser Reihen ergeben sich, um einige Beispiele anzuführen, folgende spezielle Werte:

$$O^0(x) = \frac{1}{x}$$

$$O^2 \quad = \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3}$$

$$O^4 \quad = \frac{1}{x} + \frac{16}{x^3} + \frac{192}{x^5}$$

$$O^6 \quad = \frac{1}{x} + \frac{36}{x^3} + \frac{1152}{x^5} + \frac{23040}{x^7}$$

$$O^8 \quad = \frac{1}{x} + \frac{64}{x^3} + \frac{3840}{x^5} + \frac{184320}{x^7} + \frac{5160960}{x^9}$$

$$O^{10} \quad = \frac{1}{x} + \frac{100}{x^3} + \frac{9600}{x^5} + \frac{806400}{x^7} + \frac{51609600}{x^9} + \frac{1857945600}{x^{11}}$$

$$O^{12} \quad = \frac{1}{x} + \frac{144}{x^3} + \frac{20160}{x^5} + \frac{2580480}{x^7} + \frac{278691840}{x^9} + \frac{22295347200}{x^{11}} + \frac{980995276800}{x^{13}}$$

$$O^{14} \quad = \frac{1}{x} + \frac{196}{x^3} + \frac{37632}{x^5} + \frac{6773760}{x^7} + \frac{1083801600}{x^9} + \frac{143061811200}{x^{11}} + \frac{13733933875200}{x^{13}} + \frac{714164561510400}{x^{15}}$$

$$O^1 = \frac{1}{x^2}$$

$$O^2 = \frac{3}{x^2} + \frac{24}{x^4}$$

$$O^5 = \frac{5}{x^5} + \frac{120}{x^4} + \frac{1920}{x^6}$$

$$O^7 = \frac{7}{x^2} + \frac{336}{x^4} + \frac{13440}{x^6} + \frac{322560}{x^8}$$

$$O^9 = \frac{9}{x^2} + \frac{720}{x^4} + \frac{51840}{x^6} + \frac{2903040}{x^8} + \frac{92897280}{x^{10}}$$

$$O^{11} = \frac{11}{x^2} + \frac{1320}{x^4} + \frac{147840}{x^6} + \frac{14192640}{x^8} + \frac{1021870080}{x^{10}} + \frac{40874803200}{x^{12}}$$

$$O^{13} = \frac{13}{x^2} + \frac{2184}{x^4} + \frac{349440}{x^6} + \frac{50319360}{x^8} + \frac{6038323200}{x^{10}} + \frac{531372441600}{x^{12}} + \frac{25505877196800}{x^{14}}$$

$$O^{15} = \frac{15}{x^2} + \frac{3360}{x^4} + \frac{725760}{x^6} + \frac{145152000}{x^8} + \frac{25546752000}{x^{10}} + \frac{3678632288000}{x^{12}} + \frac{382577757952000}{x^{14}} + \frac{21424354445312000}{x^{16}}.$$

Diese Entwicklungen zeigen sehr deutlich, dass die Bessel'schen Funktionen II$^{\text{ter}}$ Art mit wachsendem Index ebenfalls rasch wachsen und dass sie namentlich für kleine Argumente schnell grosse Werte annehmen.

Eine andere, wohl noch einfachere Summenformel erhält man für die O-Funktion, wenn man die Ausdrücke (2) und (3) nach steigenden, statt nach fallenden Potenzen von x ordnet. Man kann alsdann für jedes beliebige n $O^n(x)$ folgendermassen darstellen:

$$\varepsilon_n\, O^n(x) = \frac{2^n\, n!}{x^{n+1}} \left\{ 1 + \frac{x^2}{2\,(2n-2)} + \frac{x^4}{2\,.\,4\,.\,(2n-2)\,(2n-4)} + \frac{x^6}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,(2n-2)\,(2n-4)\,(2n-6)} + \cdots \right\}, \quad (4)$$

eine Formel, die sich ebenfalls in der Arbeit von G. Neumann auf Seite 15 findet. Dabei ist unter ε_n eine Konstante zu verstehen, welche den Wert 1 hat für $n = 0$, dagegen den Wert 2 für jedes höhere n. Die Formel (4) hat gegenüber den Formeln (2) und (3) aber den Nachteil, dass der Klammerausdruck nicht von selbst abbricht. Will man, wie in (1), das Summationszeichen beibehalten, so kann man (4) auch schreiben:

$$O^n(x) = \frac{n!}{4} \left(\frac{2}{x}\right)^{n+1} \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n+1}{2}} \frac{x^{2\lambda}}{2\,.\,4\,..\,2\lambda\,(2n-2)\,(2n-4)\,..\,(2n-2\lambda)}. \quad (5)$$

Diese Formel ist, wie übrigens auch die Formel (1), für den Fall $n = 0$ nicht brauchbar, sondern sie ist mit 2 zu multiplizieren; deshalb wohl hat C. Neumann die Konstante ε_n herausgenommen.

Der letzte Term der Summe lautet dann:

für ein gerades n: $\dfrac{x^n}{2.4\ldots n\,(2n-2)\,(2n-4)\ldots n}$,

für ein ungerades n: $\dfrac{x^{n-1}}{2.4\ldots (n-1)\,(2n-2)\,(2n-4)\ldots (n+1)}$.

2. Darstellung der Funktion $O^n(x)$ durch ein bestimmtes Integral und Einführung einer Hülfsfunktion $S^n(x)$.

Die Funktion $O^n(x)$ ist ferner definiert durch:

$$O^n(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\,(t^n + (-1)^n\,t^{-n})\,ds, \tag{6}$$

wobei $s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$ und N eine sehr grosse Zahl bedeutet, die zum Unendlichwerden bestimmt ist. Herr Prof. Dr. *J. H. Graf* hat nach Vorlesungen von L. Schläfli [5]) dieses Integral aufgestellt direkt aus der Entwicklung von $\frac{1}{x-y}$ nach Bessel'schen Funktionen I[ter] Art, indem er fand:

$$\frac{1}{x-y} = J^0(y)\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\,ds + \sum_{n=1}^{n=\infty} J^n(y)\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\,(t^n + (-1)^n\,t^{-n})\,ds$$

oder:

$$\frac{1}{x-y} = J^0(y)\,O^0(x) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} J^n(y)\;O^n(x).$$

Wie schon in der Einleitung bemerkt wurde, kam C. Neumann gerade durch diese Entwicklung von $\frac{1}{x-y}$ nach Bessel'schen Funktionen I[ter] Art dazu, die Funktion $O^n(x)$ einzuführen.[6]) Er gibt der Entwicklung die Form:

---

[5]) C. Neumann, Bessel'sche Funktionen, S. 9.
Graf, J. H., Mathem. Annalen XLIII, Seite 136.

[6]) Man vergleiche darüber in seiner Arbeit über Bessel'sche Funktionen § 7. Seite 8 und §§ 11 und 12, Seite 24 u. f.

$$\frac{1}{x-y} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \, J^n(y) \, O^n(x),$$

wobei, wie früher, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \cdots = 2$ und

$$\text{mod. } x > \text{mod. } y.$$

Man sieht sofort ein, dass

$$O^0(x) = \int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs} \, ds = \frac{1}{x} \tag{7}$$

ist.

Setzt man in (6)

$$t = e^{\chi},$$

$$s = \frac{1}{2}\left(e^{\chi} - e^{-\chi}\right) = \sin \chi,$$

$$ds = \frac{1}{2}\left(e^{\chi} + e^{-\chi}\right) d\chi = \cos \chi \, d\chi,$$

so nimmt das Integral die Gestalt an:

$$O^n(x) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x \sin \chi} \left(e^{n\chi} + (-1)^n e^{-n\chi}\right) \cos \chi \, d\chi. \tag{8}$$

Aus dem Ausdruck (8) folgt:

$$O^{-n}(x) = (-1)^n \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x \sin \chi} \left(e^{n\chi} + (-1)^n e^{-n\chi}\right) \cos \chi \, d\chi,$$

was mit (6) verglichen, die Eigenschaft ergibt:

$$O^{-n}(x) = (-1)^n \, O^n(x). \tag{9}$$

Zur Untersuchung vieler Eigenschaften der Funktion $O^n(x)$ ist es zweckmässig, eine Hülfsfunktion einzuführen, welche der Funktion $J^n(x)$ näher steht, als $O^n(x)$ selber. Schon *L. Schläfli* hat diese Hülfsfunktion verwendet in seinem Aufsatze «Über die Bessel'schen Funktionen»[7]); ebenso hat Prof. Dr. *J. H. Graf* dieselbe verwendet.[8]) Bei *C. Neumann* und *E. Lommel* dagegen findet sich dieselbe nicht

---

[7]) Mathem. Annalen III, Seite 139 u. ff.

[8]) Mathem. Annalen XLIII, Seite 138 u. ff.

erwähnt. Sie wird nach Schläfli und Graf durch partielle Integration des Integrals

$$O^n(x) = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n + (-1)^n t^{-n}\right) ds$$

erhalten. Zu dem Ende setze man:

$$u = \frac{1}{2}\left(t^n + (-1)^n t^{-n}\right),$$

$$dv = e^{-xs}\, ds,\ v = -\frac{1}{x} e^{-xs}.$$

Da nun $s = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)$, so nimmt t für $s = 0$ den Wert 1 an, und es wird

$$O^n(x) = \frac{1}{x}\cos^2\frac{n\pi}{2} + \frac{n}{2x}\int_1^{\frac{N}{x}} e^{-xs}\left(t^n - (-1)^n t^{-n}\right)\frac{dt}{t}.$$

Setzt man den Integralausdruck:

$$\int_1^{\frac{N}{x}} e^{-x}\left(t^n - (-1)^n t^{-n}\right)\frac{dt}{t} = S^n(x), \tag{10}$$

so ist dies die gesuchte Hülfsfunktion, so dass man jetzt schreiben kann:

$$O^n(x) = \frac{n}{2x} S^n(x) + \frac{1}{x}\cos^2\frac{n\pi}{2}. \tag{11}$$

$$S^n(x) = \frac{2x}{n} O^n(x) - 2\frac{\cos^2\frac{n\pi}{2}}{n}.\text{[9]} \tag{12}$$

Durch die Substitution $t = e^{\chi}$ erhält man die S-Funktion in der Form:

$$S^n(x) = \int_0^{\infty} e^{-x\sin\chi}\left(e^{n\chi} - (-1)^n e^{-n\chi}\right) d\chi. \tag{13}$$

Es ist ferner:

$$S^{-n}(x) = -(-1)^n\int_0^{\infty} e^{-x\sin\chi}\left(e^{n\chi} - (-1)^n e^{-n\chi}\right) d\chi,$$

---

[9]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III, Seite 139, oben.

daher durch Vergleichung mit (13):

$$S^{-n}(x) = -(-1)^n S^n(x) \tag{14}$$

Aus Formel (13) folgt:

$$S^{n+1}(x) = \int_0^\infty e^{-x \sin\chi}\left(e^{(n+1)\chi} - (-1)^{n+1} e^{-(n+1)\chi}\right) d\chi,$$

$$S^{n-1}(x) = \int_0^\infty e^{-x \sin\chi}\left(e^{(n-1)\chi} - (-1)^{n-1} e^{-(n-1)\chi}\right) d\chi,$$

$$S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) = \underbrace{\int_0^\infty e^{-x \sin\chi}\left(e^{nx} + (-1)^n e^{-n\chi}\right) \underbrace{\left(e^{\chi} + e^{-\chi}\right)}_{2 \cos\chi}}_{4\, O^n(x)} d\chi,$$

$$S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) = 4\, O^n(x).\text{[10]} \tag{15}$$

Auf ähnliche Weise lassen sich noch andere Beziehungen zwischen den Funktionen $O^n(x)$ und $S^n(x)$ herstellen. Sie sind aber von komplizierterer Form und haben keinen praktischen Wert. Hingegen kann man umgekehrt $S^n(x)$ linear und homogen durch O-Funktionen darstellen. Es ist nach (15):

$$(-1)^\lambda \left(S^{n+1-2\lambda}(x) + S^{n-1-2\lambda}(x)\right) = (-1)^\lambda\, 4\, O^{n-2\lambda}(x);$$

λ durchlaufe alle alle Werte von 0 bis n; dann folgt:

$$\begin{array}{lrcl}
\lambda = 0 & S^{n+1} + S^{n-1} & = & 4\, O^n \\
\lambda = 1 & -S^{n-1} - S^{n-3} & = & -4\, O^{n-2} \\
\lambda = 2 & S^{n-3} + S^{n-5} & = & 4\, O^{n-4} \\
\lambda = 3 & -S^{n-5} - S^{n-7} & = & -4\, O^{n-6} \\
-- & ------- & & -- \\
\lambda = n & (-1) S^{1-n} + (-1)^n S^{-1-n} & = & (-1)^n\, 4\, O^{-n}.
\end{array}$$

Addiert:

$$S^{n+1}(x) + (-1)^n S^{-1-n}(x) = 4 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} (-1)^\lambda\, O^{n-2\lambda}(x).$$

Nun wissen wir aber, dass:

$$(-1)^n S^{-n-1}(x) = S^{n+1}(x);$$

also jetzt:

---

[10]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III, S. 139, in der Mitte.

$$2\,S^{n+1}(x) = 4 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} (-1)^{\lambda}\, 0^{n-2\lambda}(x)$$

und entsprechend:

$$S^{n}(x) = 2 \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} (-1)^{\lambda}\, 0^{n-1-2\lambda}(x).\text{[11]} \qquad (16)$$

Um für $S^{n}(x)$ eine Summenformel zu erhalten, substituiere man einfach in der Relation (12) für $0^{n}(x)$ den Wert aus (1); dann ist vorerst

$$\frac{2x}{n}\, 0^{n}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n+1}{2}} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda};$$

der gewünschte Ausdruck für $S^{n}(x)$ ist also:

$$S^{n}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n+1}{2}} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda} - \frac{2\cos^{2}\frac{n\pi}{2}}{n}, \qquad (17)$$

und für ein sehr grosses n dürfen wir den konstanten Bruch rechts vernachlässigen und schreiben:

$$S^{n}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n+1}{2}} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda}.\text{[12]} \qquad (18)$$

Unter der Bedingung n = sehr gross ergiebt sich auch ohne Schwierigkeit direkt aus der Summenformel die Beziehung (15)

$$S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) = 4\, 0^{n}(x),$$

wie man leicht zeigen kann.

Zur numerischen Berechnung einiger S-Funktionen möge die Summe noch in entwickelter Form dargestellt werden; es sind hiebei ebenfalls zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem n gerade oder ungerade ist:

---

[11]) Dr. L. Crelier, Mitteilungen der Naturf. Gesellschaft Bern, 1897, pag. 69.

[12]) Graf, J. H., Mathem. Annalen XLIII, S. 138 Nr. (13).
Dr. L. Crelier, Mitteilungen der Naturf. Gesellschaft Bern, 1897, pag. 67.

I. Fall. $n = \text{gerade} = 2m$,

$$\frac{n+1}{2} = m + \frac{1}{2};$$

der letzte Wert, den λ annehmen darf, ist also

$$\lambda = m = \frac{n}{2};$$

der Schlussterm in der Entwicklung ist daher:

$$\frac{\left(n - \frac{n}{2} - 1\right)!}{\frac{n}{2}!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-n} = \frac{2}{n}.$$

Im vorletzten Term ist $\lambda = \frac{n}{2} - 1$, also derselbe:

$$\frac{\left(n - \frac{n}{2} + 1 - 1\right)!}{\left(\frac{n}{2} - 1\right)!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-n+2} = \frac{\left(\frac{n}{2}\right)!}{\left(\frac{n}{2} - 1\right)!} = \frac{n}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^2.$$

Im drittletzten Term ist $\lambda = \frac{n}{2} - 2$, also der Term selbst:

$$\frac{\left(n - \frac{n}{2} + 2 - 1\right)!}{\left(\frac{n}{2} - 2\right)!} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-n+4} = \left(\frac{n}{2} - 1\right) \cdot \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{2}{x}\right)^4;$$

u. s. w.

Die Reihe hat dabei die Form:

$$S^n(x) = \frac{2}{n} - \frac{2 \cos^2 \frac{n\pi}{2}}{n} + \frac{n}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2 + \left(\frac{n}{2} - 1\right) \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1\right) \left(\frac{2}{x}\right)^4$$
$$+ \left(\frac{n}{2} - 2\right)\left(\frac{n}{2} - 1\right) \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1\right)\left(\frac{n}{2} + 2\right)\left(\frac{2}{x}\right)^6 + \cdots$$

$$S^n(x) = \frac{2}{n} - \frac{2}{n} \cos^2 \frac{n\pi}{2} + \frac{n}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2 + \frac{(n-2)\, n\, (n+2)}{2^3}\left(\frac{2}{x}\right)^4$$
$$+ \frac{(n-4)(n-2)(n+2)(n+4)}{2^5}\left(\frac{2}{x}\right)^6 + \cdots$$

Mit Rücksicht darauf, dass n = gerade und daher

$$\cos^2 \frac{n\pi}{2} = (-1)^n = 1$$

kann man schliesslich schreiben:

$$S^n(x) = 2\left\{\frac{n}{x^2} + \frac{(n+2)\,n\,(n-2)}{x^4} + \frac{(n+4)\,(n+2)\,n\,(n-2)\,(n-4)}{x^6} + \cdots\cdots\right\}. \tag{19}$$

Ist n = 0, so folgt nun:

$$S^0(x) = 0. \tag{20}$$

II. Fall. Hier muss in erster Linie bemerkt werden, dass das konstante Glied $\dfrac{2\cos^2\frac{n\pi}{2}}{n}$ wegfällt.

$$n = \text{ungerade} = 2\,m - 1,$$

$$\frac{n+1}{2} = m,$$

$$\text{letzter Wert von } \lambda = \frac{n-1}{2}.$$

Der Schlussterm der Reihe ist in diesem Falle:

$$\frac{\left(n - \frac{n-1}{2} - 1\right)!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-n+1} = \frac{2}{x}.$$

Im vorletzten Term ist $\lambda = \frac{n-1}{2} - 1$, also der Term selbst:

$$\frac{\left(\frac{n-1}{2}+1\right)!}{\left(\frac{n-1}{2}-1\right)!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-n+1+2} = \frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\left(\frac{2}{x}\right)^3;$$

für $\lambda = \frac{n-1}{2} - 2$ wird der entsprechende Term:

$$\frac{\left(\frac{n-1}{2}+2\right)!}{\left(\frac{n-1}{2}-2\right)!}\left(\frac{2}{x}\right)^5$$
$$=\left(\frac{(n-1)}{2}-1\right)\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\left(\frac{n-1}{2}+2\right)\left(\frac{2}{x}\right)^5,$$

für $\lambda=\frac{n-1}{2}-3$ endlich:

$$\frac{\left(\frac{n-1}{2}+3\right)!}{\left(\frac{n-1}{2}-3\right)!}\left(\frac{2}{x}\right)^7=\left(\frac{n-1}{2}-2\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)$$
$$\left(\frac{n-1}{2}+2\right)\left(\frac{n-1}{2}+3\right)\left(\frac{2}{x}\right)^7$$

u. s. w.

Die Reihe heisst also entwickelt:

$$S^n(x)=\frac{2}{x}+\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\left(\frac{2}{x}\right)^3$$
$$+\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\left(\frac{n-1}{2}+2\right)\left(\frac{2}{x}\right)^5$$
$$+\left(\frac{n-1}{2}-2\right)\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}+1\right)\left(\frac{n-1}{2}+2\right)\left(\frac{n-1}{2}+3\right)\left(\frac{2}{x}\right)^7+\cdots$$

oder etwas umgeformt:

$$S^n(x)=2\left\{\frac{1}{x}+\frac{(n+1)(n-1)}{x^3}+\frac{(n+3)(n+1)(n-1)(n-3)}{x^5}\right.$$
$$\left.+\frac{(n+5)(n+3)(n+1)(n-1)(n-3)(n-5)}{x^7}+\cdots\right\}. \quad (21)$$

Die beiden Reihen, sowohl (19) als auch (21), brechen von selber ab; sie liefern folgende speziellen Werte für die ersten 12 S-Funktionen:

$$S^0=0$$

$$S^2=\frac{4}{x^2}$$

$$S^4=\frac{8}{x^2}+\frac{96}{x^4}$$

$$S^6 = \frac{12}{x^2} + \frac{384}{x^4} + \frac{7680}{x^6}$$

$$S^8 = \frac{16}{x^2} + \frac{960}{x^4} + \frac{46080}{x^6} + \frac{1290240}{x^8}$$

$$S^{10} = \frac{20}{x^2} + \frac{1920}{x^4} + \frac{161280}{x^6} + \frac{10321920}{x^8} + \frac{371589120}{x^{10}}$$

$$S^{12} = \frac{24}{x^2} + \frac{3360}{x^4} + \frac{430080}{x^6} + \frac{46448640}{x^8} + \frac{3715891200}{x^{10}} + \frac{163499212800}{x^{12}}$$

— — — — — — — — — — — — — — —

$$S^1 = \frac{2}{x}$$

$$S^3 = \frac{2}{x} + \frac{16}{x^3}$$

$$S^5 = \frac{2}{x} + \frac{48}{x^3} + \frac{768}{x^5}$$

$$S^7 = \frac{2}{x} + \frac{96}{x^3} + \frac{3840}{x^5} + \frac{92160}{x^7}$$

$$S^9 = \frac{2}{x} + \frac{160}{x^3} + \frac{11520}{x^5} + \frac{645120}{x^7} + \frac{20643840}{x^9}$$

$$S^{11} = \frac{2}{x} + \frac{240}{x^3} + \frac{26880}{x^5} + \frac{2580480}{x^7} + \frac{185794560}{x^9} + \frac{7431782400}{x^{11}}$$

— — — — — — — — — — — — — — —

3. Ableitung der Differentialgleichung der Funktionen $O^n(x)$ und $S^n(x)$.

Neumann kommt auf verhältnismässig einfache Weise [13]) zu der Differential - Gleichung für $O^n(x)$, indem er für das Binom $(y + x)$ in seinem schon mehrmals zitierten Werke pag. 11 zwei Reihen aufstellt, nämlich:

$$1) \qquad y + x = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n J^n(x) \left[y^2 \Delta' O^n(y) - n^2 O^n(y)\right],$$

[13]) C. Neumann, Bessel'sche Funktionen, S. 11.

wobei ε_n wieder eine Konstante bedeutet, welche den Wert 1 hat, wenn $n = 0$ und den Wert 2, wenn $n > 0$ und wo unter Δ' die Operation zu verstehen ist:

$$\Delta' f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{3}{y}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1+y^2}{y^2} f;$$

2) $$y + x = \varepsilon_0\, y\, J^0(x) + \varepsilon_2\, y\, J^2(x) + \varepsilon_4\, y\, J^4(x) + \cdots$$
$$+ \varepsilon\;\; 1 \,.\, J^1(x) + \varepsilon_3\, 3\, J^3(x) + \varepsilon_5\, 5 \,.\, J^5(x) + \cdots$$

Wenn diese Entwickelungen einander identisch sind, so führen sie augenblicklich zu den Formeln:

$$\left.\begin{array}{r} y^2 \Delta' O^n(y) - n^2 O^n(y) = y \\ n = \text{gerade} \\ y^2 \Delta' O^n(y) - n^2 O^n(y) = n \\ n = \text{ungerade.} \end{array}\right\} \qquad (22)$$

Sie lauten in ausführlicher Gestalt:

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 O^n(y)}{\partial y^2} + \dfrac{3}{y}\dfrac{\partial O^n(y)}{\partial y} + \left(1 - \dfrac{n^2-1}{y^2}\right) O^n(y) = \dfrac{1}{y} \\ n = \text{gerade} \\ \dfrac{\partial^2 O^n(y)}{\partial y^2} + \dfrac{3}{y}\dfrac{\partial O^n(y)}{\partial y} + \left(1 - \dfrac{n^2-1}{y^2}\right) O^n(y) = \dfrac{n}{y^2} \\ n = \text{ungerade.} \end{array}\right\} \qquad (23)$$

Von diesen Differentialgleichungen kommt Hr. C. Neumann dann auf die Summenformel, welche denselben genügt. Man kann aber auch umgekehrt, wie Hr. Prof. Dr. J. H. Graf nach Vorlesungen von L. Schläfli es gethan hat, von der Summenformel ausgehen und mittelst der Hülfsfunktion $S^n(x)$ zu der Differentialgleichung gelangen. Es bietet dieser Weg den Vorteil, dass man dieselbe in einer Form erhält, die für jedes n passt. Wir stellen zu diesem Zwecke vorerst einige notwendige Relationen auf, welche schon L. Schläfli, Mathem. Annalen III S. 139, angegeben hat, allerdings ohne Nachweis. Derselbe soll hier mitgegeben werden.

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + n\right) S^n(x) = ?$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + n\right) S^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda < \frac{n+1}{2}} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} (2\lambda - n) \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$

$$+ \sum_{\lambda=0}^{\lambda < \frac{n+1}{2}} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\, n \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda < \frac{n+1}{2}} 2\, \frac{(n-\lambda-1)!}{(\lambda-1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}.$$

Ersetzt man darin λ durch $\lambda + 1$, so wird:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + n\right) S^n(x) = x \underbrace{\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}} \frac{(n-\lambda-2)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n+1}}_{S^{n-1}(x)},$$

also

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + n\right) S^n(x) = x\, S^{n-1}(x). \tag{24}$$

Die Formel stimmt allerdings nur für ein ungerades n; für ein gerades n ist nach Formel (17) zu schreiben:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + n\right) S^n(x) = x\, S^{n-1}(x) - 2 \cos^2 \frac{n\pi}{2}. \tag{25}$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} - n\right) S^n(x) = ?$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} - n\right) S^n(x) = \sum \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} (2\lambda-n) \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$
$$-\sum \frac{n\,(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$
$$= -x \underbrace{\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n+1}{2}} \frac{(n-\lambda)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}}_{S^{n+1}(x)},$$

also

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} - n\right) S^n(x) = -x\, S^{n+1}(x), \tag{26}$$

und für ein gerades n ist zu schreiben:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} - n\right) S^n(x) = -x\, S^{n+1}(x) + 2 \cos^2 \frac{n\pi}{2}. \tag{27}$$

Durch Addition von (25) und (27) erhält man:

$$S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) + 2 \frac{\partial}{\partial x} S^n(x) = 0.\ ^{14)} \tag{28}$$

Subtrahiert man (27) von (25), so erhält man:

$$S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) - \frac{2n}{x} S^n(x) = -\frac{4}{x} \cos^2 \frac{n\pi}{2}. \tag{29}$$

---

[14]) Vergl. Crelier: Mitteilungen der Naturf. Gesellschaft Bern, 1897 pag. 71.

Mit Rücksicht auf die Formeln (25) und (27) hat man ferner:

$$\underbrace{\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x}-n\right)S^n(x)}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n\right)x\,S^{n+1}(x)}_{\mathrm{II}}=2n\cos^2\frac{n\pi}{2}.$$

$$\mathrm{II}=x^2\frac{\partial}{\partial x}S^{n+1}(x)+x\,S^{n+1}(x)+n\,x\,S^{n+1}(x)$$

$$=x\left(x\frac{\partial}{\partial x}+(n+1)\right)S^{n+1}(x)=x^2S^n(x)-2x\cos^2\frac{(n+1)\pi}{2};$$

da aber

$$\cos\frac{(n+1)\pi}{2}=-\sin\frac{n\pi}{2},$$

so ist:

$$\mathrm{II}=x^2S^n(x)-2x\sin^2\frac{n\pi}{2}.$$

$$\mathrm{I}=x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}S^n(x)+x\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)+nx\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)-nx\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)-n^2S^n(x)$$

$$=x^2\frac{\partial^2}{dx^2}S^n(x)+x\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)-n^2S^n(x)+x^2S^n(x)$$

$$\mathrm{I}+\mathrm{II}=x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}S^n(x)+x\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)-n^2S^n(x)+x^2S^n(x)-2x\sin^2\frac{n\pi}{2}$$

$$=2n\cos^2\frac{n\pi}{2}$$

oder in etwas anderer Schreibweise:

$$\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x\frac{\partial}{\partial x}+x^2-n^2\right)S^n(x)=2x\sin^2\frac{n\pi}{2}+2n\cos^2\frac{n\pi}{2}\qquad(30)$$

und dies ist die Differentialgleichung für die Funktion $S^n(x)$, wie sie auch von L. Schläfli, Mathem. Annalen III, S. 139 angegeben worden ist.

Zwischen der O- und der S-Funktion kann man mit Leichtigkeit noch die folgenden hübschen Relationen gewinnen. Es ist:

$$O^n(x)=\frac{1}{x}\cos^2\frac{n\pi}{2}+\frac{n}{2x}S^n(x),$$

also auch:

$$O^{n+1}(x)=\frac{1}{x}\sin^2\frac{n\pi}{2}+\frac{n+1}{2x}S^{n+1}(x)\qquad(\alpha)$$

$$O^{n-1}(x)=\frac{1}{x}\sin^2\frac{n\pi}{2}+\frac{n-1}{2x}S^{n-1}(x);\qquad(\beta)$$

(α) werde multipliziert mit $(n-1)$ und (β) mit $(n+1)$; dann gilt:

$$(n-1)\, O^{n+1}(x) = \frac{n-1}{x} \sin^2 \frac{n\pi}{2} + \frac{n^2-1}{2x} S^{n+1}(x) \tag{γ}$$

$$(n+1)\, O^{n-1}(x) = \frac{n+1}{x} \sin^2 \frac{n\pi}{2} + \frac{n^2-1}{2x} S^{n-1}(x). \tag{δ}$$

Die Addition ergibt:

$$(n-1)\, O^{n+1}(x) + (n+1)\, O^{n-1}(x) = \frac{2n}{x} \sin^2 \frac{n\pi}{2} + \frac{n^2-1}{2x} \underbrace{\left(S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x)\right)}_{4\, O^n(x) \text{ nach } (15)},$$

also

$$(n-1)\, O^{n+1}(x) + (n+1)\, O^{n-1}(x) - (n^2-1) \frac{2}{x} O^n(x) = \frac{2n}{x} \sin^2 \frac{n\pi}{2}.$$ [15])

Es ist nun aber auch nach (29)

$$S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) = \frac{2n}{x} S^n(x) + \frac{4}{x} \cos^2 \frac{n\pi}{2};$$

dividiert man ferner noch durch n^2-1, so folgt:

$$\frac{O^{n+1}(x)}{n+1} + \frac{O^{n-1}(x)}{n-1} = \frac{2n}{x(n^2-1)} \sin^2 \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2x} \left(\frac{2n}{x} S^n(x) + \frac{4}{x} \cos^2 \frac{n\pi}{2} \right);$$

multipliziert man mit x^2, so wird:

$$\frac{x^2\, O^{n+1}(x)}{n+1} + \frac{x^2\, O^{n-1}(x)}{n-1} = \frac{2n\, x \sin^2 \frac{n\pi}{2}}{n^2-1} + n\, S^n(x) + 2 \cos^2 \frac{n\pi}{2}; \tag{32}$$

für ein gerades n wird $\sin \frac{n\pi}{2} = 0$ und wird n ferner einigermassen gross, so kann man die letzte Formel darstellen:

$$\frac{O^{n+1}(x)}{n+1} + \frac{O^{n-1}(x)}{n-1} = \frac{n}{x^2} S^n(x). \tag{33}$$

Bedenkt man ferner, dass für $n = 2m + 1$ $\cos \frac{n\pi}{2} = 0$ wird und dass der Bruch $\frac{n}{n^2-1}$ rasch kleine Werte annimmt, so gilt die Formel (33) auch für ein ungerades n, also für jedes grössere n.

---

[15]) Graf, J. H., nach Vorlesungen Schläflis.

Substrahiert man die Gleichung (δ) von der Gleichung (γ), so folgt eine neue Relation:

$$(n-1)\, O^{n+1}(x) - (n+1)\, O^{n-1}(x) = -\frac{2}{x}\sin^2\frac{n\pi}{2} + \frac{n^2-1}{2x}\underbrace{\left(S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x)\right)}_{-2\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)}$$

$$(n-1)\, O^{n+1}(x) - (n+1)\, O^{n-1}(x) = -\frac{2}{x}\sin^2\frac{n\pi}{2} - \frac{n^2-1}{x}\frac{\partial}{\partial x}S^n(x)$$

$$x\frac{O^{n+1}(x)}{n+1} - x\frac{O^{n-1}(x)}{n-1} = -\frac{2}{n^2-1}\sin^2\frac{n\pi}{2} - \frac{\partial}{\partial x}S^n(x)$$

$$x\frac{O^{n+1}(x)}{n+1} - x\frac{O^{n-1}(x)}{n-1} + \frac{\partial}{\partial x}S^n(x) = -\frac{2}{n^2-1}\sin^2\frac{n\pi}{2}. \tag{34}$$

Aus der Formel:

$$O^n(x) = \frac{1}{x}\cos^2\frac{n\pi}{2} + \frac{n}{2x}S^n(x)$$

fliesst:

$$2\frac{\partial}{\partial x}O^n(x) = -2\frac{\cos^2\frac{n\pi}{2}}{x^2} + \frac{2n}{2x}\frac{\partial}{\partial x}S^n(x) - \frac{n}{2x^2}S^n(x)$$

$$O^{n+1}(x) - O^{n-1}(x) + 2\frac{\partial}{\partial x}O^n(x) = \frac{n}{2x}\Big[\underbrace{S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) + \frac{\partial S^n(x)}{\partial x}}_{0}\Big]$$

$$+\frac{1}{2x}\underbrace{\Big[S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x) - \frac{2n}{x}S^n(x)\Big]}_{\frac{4}{x}\cos^2\frac{n\pi}{2}} - \frac{2}{x^2}\cos^2\frac{n\pi}{2}$$

$$O^{n+1}(x) - O^{n-1}(x) + 2\frac{\partial}{\partial x}O^n(x) = 0.\text{[16]} \tag{35}$$

Zur Herleitung dieser Formel hat man aber die S-Funktion durchaus nicht nötig. Am einfachsten kann man sie wohl aus der Integralformel erhalten. Auch ohne Mühe findet man sie direkt aus der Summenformel. Es war:

---

[16]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III S. 137, unten. Vergl. auch: Crelier, Mitteilg. d. Naturf. Gesellsch. Bern, 1897, pag. 84. Nach Crelier gilt diese Relation, sowie auch die entsprechende für $S^n(x)$ auch für die Ableitungen von $O^n(x)$ und $S^n(x)$.

$$0^n(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x \sin\chi}\left(e^{n\chi} + (-1)^n e^{-n\chi}\right)\cos\chi \, d\chi$$

$$\frac{\partial}{\partial x} 0^n(x) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x \sin\chi}\sin\chi\left(e^{n\chi} + (-1)^n e^{-n\chi}\right)\cos\chi \, d\chi.$$

Nun ist aber

$$\sin\chi = \frac{e^{\chi} - e^{-\chi}}{2}.$$

Eingesetzt gibt:

$$2\frac{\partial}{\partial x}0^n(x) = -\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x\sin\chi}\left(e^{\chi} - e^{-\chi}\right)\left(e^{n\chi} + (-1)^n e^{-n\chi}\right)\cos\chi \, d\chi$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x\sin\chi}\left[e^{(n+1)\chi} + (-1)^{n+1} e^{-(n+1)\chi}\right]\cos\chi \, d\chi}_{-\,0^{n+1}(x)}$$

$$+ \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x\sin\chi}\left[e^{(n-1)\chi} + (-1)^{n-1} e^{-(n-1)\chi}\right]\cos\chi \, d\chi}_{+\,0^{n-1}(x)}$$

$$0^{n+1}(x) - 0^{n-1}(x) + 2\frac{\partial}{\partial x}0^n(x) = 0.$$

In gleicher Weise würde sich selbstverständlich auch die Relation $S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x) + 2\frac{\partial}{\partial x}S^n(x) = 0$ aus dem Integral ergeben.

Will man aber, um die Relationen zu finden, von der Summenformel ausgehen, so ist der Weg folgender:

$$0^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n+1}{2}} \frac{n}{4}\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + n+1\right)0^n(x) = ?$$

$$x\frac{\partial}{\partial x}0^n(x) = \sum \frac{n}{4}\frac{(2\lambda-n)(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + n+1\right)0^n(x) = \sum \frac{n}{4}\,2\,\frac{(n-\lambda-1)!}{(\lambda-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}.$$

Statt λ werde $\lambda+1$ gesetzt, dann ist:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n+1\right)0^n(x)=x\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n-1}{2}}\frac{n}{4}\,\frac{(n-\lambda-2)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}.$$

Nun ist aber:

$$0^{n-1}(x)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}}\frac{n-1}{4}\,\frac{(n-\lambda-2)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}.$$

Mit Rücksicht darauf, schreibe man also

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n+1\right)0^n(x)=x\,0^{n-1}(x)+\frac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}}\frac{(n-\lambda-2)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n+1}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n+1\right)0^n(x)=x\,0^{n-1}(x)+\frac{1}{2}S^{n-1}(x)+\frac{\cos^2\frac{(n-1)\pi}{2}}{n-1}$$

$$=x\,0^{n-1}(x)+\frac{1}{2}S^{n-1}(x)+\frac{\sin^2\frac{n\pi}{2}}{n-1}\qquad(36)$$

und für ein grosses n:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n+1\right)0^n(x)=x\,0^{n-1}(x)+\frac{1}{2}S^{n-1}(x)\qquad(37)$$

oder wenn man die ganze Summe durch eine S-Funktion ausdrücken will, so kann man schreiben:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n+1\right)0^n(x)=\frac{n}{2}S^{n-1}(x)+\frac{n}{n-1}\sin^2\frac{n\pi}{2}\qquad(38)$$

oder für ein grosses n:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n+1\right)0^n(x)=\frac{n}{2}S^{n-1}(x).\qquad(39)$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}-(n-1)\right)0^n(x)=?$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}-(n-1)\right)0^n(x)=\sum\frac{n}{4}\,\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}(2\lambda-n-1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}$$

$$-\sum\frac{n}{4}\,\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}(n-1)\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}$$

$$=-\sum\frac{n}{4}\cdot\frac{2(n-\lambda)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}$$

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} - (n-1)\right) O^n(x) = -x \sum_{\lambda=0}^{\lambda < \frac{n+1}{2}} \frac{n}{4} \frac{(n-\lambda)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}$$

$$= -x\, O^{n+1}(x) + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{\lambda < \frac{n+1}{2}} \frac{(n-\lambda)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}$$

$$= -x\, O^{n+1}(x) + \frac{1}{2} S^{n+1}(x) + \frac{\cos^2 \frac{n+1}{2}}{n+1} \pi.$$

Also wird jetzt:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} - (n-1)\right) O^n(x) = -x\, O^{n+1}(x) + \frac{1}{2} S^{n+1}(x) + \frac{\sin^2 \frac{n\pi}{2}}{n+1} \tag{40}$$

oder für ein grösseres n:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} - (n-1)\right) O^n(x) = -x\, O^{n+1}(x) + \frac{1}{2} S^{n+1}(x). \tag{41}$$

Will man wieder, wie im ersten Fall die ganze Summe rechts durch eine S-Funktion ausdrücken, so kann man schreiben:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} - (n-1)\right) O^n(x) = -\frac{n}{2} S^{n+1}(x) - \frac{n}{n+1} \sin^2 \frac{n\pi}{2} \tag{42}$$

oder für ein grosses n:

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} - (n-1)\right) O^n(x) = -\frac{n}{2} S^{n+1}(x). \tag{43}$$

Werden die Formeln (37) und (41) addiert, so folgt:

$$2x \frac{\partial}{\partial x} O^n(x) + 2 O^n(x) = x\, O^{n-1}(x) - x\, O^{n+1}(x) + \frac{1}{2} \underbrace{\left(S^{n+1}(x) + S^{n-1}(x)\right)}_{4\, O^n(x) \text{ nach } (15)}$$

$$2x \frac{\partial}{\partial x} O^n(x) = x\, O^{n-1}(x) - x\, O^{n+1}(x)$$

$$O^{n+1}(x) - O^{n-1}(x) + 2 \frac{\partial}{\partial x} O^n(x) = 0,$$

was mit (35) stimmt.

Addiert man dagegen (39) und (43), so erhält man:

$$2x \frac{\partial}{\partial x} O^n(x) + 2\,O^n(x) = \frac{n}{2}\left[S^{n-1}(x) - S^{n+1}(x)\right]$$

$$x \frac{\partial}{\partial x} O^n(x) + O^n(x) + \frac{n}{4}\underbrace{\left[S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x)\right]}_{-\,2\frac{\partial}{\partial x} S^n(x) \text{ nach } (28)} = 0$$

$$O^n(x) = \frac{n}{2}\frac{\partial}{\partial x} S^n(x) - x \frac{\partial}{\partial x} O^n(x). \tag{44}$$

Subtrahiert man dagegen (41) von (37), so ergibt sich die Relation:

$$2n\,O^n(x) = x\,O^{n-1}(x) + x\,O^{n+1}(x) + \frac{1}{2}\left(S^{n-1}(x) - S^{n+1}(x)\right)$$

$$O^{n+1}(x) + O^{n-1}(x) = \frac{1}{2x}\underbrace{\left[S^{n+1}(x) - S^{n-1}(x)\right]}_{-\,2\frac{\partial}{\partial x} S^n(x) \text{ nach } (28)} - \frac{2n}{x} O^n(x) \tag{45}$$

$$O^{n+1}(x) + O^{n-1}(x) = -\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} S^n(x) - \frac{2n}{x} O^n(x). \tag{46}$$

Subtrahiert man (43) von (39), so findet man:

$$2n\,O^n(x) = \frac{n}{2}\left(S^{n-1}(x) + S^{n+1}(x)\right)$$

oder wieder Nr. 15.

$$S^{n+1}(x) + S^{n-1} = 4\,O^n(x). \tag{47}$$

Setzt man in (45) für $2\,O^n(x)$ wieder $\frac{1}{2}\left(S^{n+1} + S^{n-1}\right)$, so ist endlich:

$$O^{n+1}(x) + O^{n-1}(x) = \frac{n+1}{2x} S^{n+1}(x) + \frac{n-1}{2x} S^{n-1}(x). \tag{48}$$

Es erübrigt nun noch für die O-Funktion die Differentialgleichung abzuleiten. Wir hatten gefunden:

$$\left(x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial x} + x^2 - n^2\right) S^n(x) = 2x \sin^2 \frac{n\pi}{2} + 2n \cos^2 \frac{n\pi}{2}.$$

Setzen wir aber darin den Wert für

$$S^n(x) = \frac{2x}{n} O^n(x) - \frac{2\cos^2\frac{n\pi}{2}}{n}$$

ein, so gibt

$$\left(x^2 \frac{\partial}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial x} + x^2 - n^2\right)\left(\frac{2x}{n} O^n(x) - \frac{2\cos^2\frac{n\pi}{2}}{n}\right)$$

$$= 2x \sin^2\frac{n\pi}{2} + 2n\cos^2\frac{n\pi}{2}.$$

Nun ist

$$\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial x}\right) = x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

ferner

$$x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x}{n} O^n(x)\right) = \frac{2x^2}{n}\frac{\partial}{\partial x} O^n(x) + \frac{2x}{n} O^n(x),$$

daher

$$\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{2x}{n} O^n(x) = x\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2x^2}{n}\frac{\partial}{\partial x} O^n(x) + \frac{2x}{n} O^n(x)\right)$$

$$\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{2x}{n} O^n(x) = \frac{2x^3}{n}\frac{\partial^2}{\partial x^2} O^n(x) + \frac{4x^2}{n}\frac{\partial}{\partial x} O^n(x)$$

$$+ \frac{2x^2}{n}\frac{\partial}{\partial x} O^n(x) + \frac{2x}{n} O^n(x).$$

Linke Seite:

$$\frac{2x^3}{n}\frac{\partial^2}{\partial x^2} O^n(x) + \frac{6x^2}{n}\frac{\partial}{\partial x} O^n(x) + \frac{2x}{n} O^n(x) + (x^2 - n^2)\frac{2x}{n} O^n(x)$$

$$+ \frac{2}{n}(n^2 - x^2)\cos^2\frac{n\pi}{2}.$$

Rechte Seite:

$$2x\sin^2\frac{n\pi}{2} + 2n\cos^2\frac{n\pi}{2}.$$

Wir multiplizieren die ganze Gleichung mit n und dividieren durch 2x, so dass wir erhalten:

$$x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} O^n(x) + 3x^2\frac{\partial}{\partial x} O^n(x) + O^n(x) + (x^2 - n^2) O^n(x) = n\sin^2\frac{n\pi}{2}$$

$$+ n^2\cos^2\frac{n\pi}{2} - n^2\cos^2\frac{n\pi}{2} + x\cos^2\frac{n\pi}{2}.$$

Die O^n-Funktion genügt also der Differentialgleichung:

$$\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+3x\frac{\partial}{\partial x}+x^2-(n^2-1)\right)O^n(x)=n\sin^2\frac{n\pi}{2}$$

$$+x\cos^2\frac{n\pi}{2}\cdot \quad (49)$$

Sie findet sich in dieser Form zuerst in der schon citierten Arbeit von L. Schläfli.[17])

Für ein gerades n wird 47:

$$\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+3x\frac{\partial}{\partial x}+x^2-n^2+1\right)O^n(x)=(-1)^{\frac{n}{2}}(x)$$

oder:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}O^n(x)+\frac{3}{x}\frac{\partial}{\partial x}O^n(x)+\left(1-\frac{n^2-1}{x^2}\right)O^n(x)=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{x}$$

und für ein ungerades n:

$$\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+3x\frac{\partial}{\partial x}+x^2-n^2+1\right)O^n(x)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}n$$

oder

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}O^n(x)+\frac{3}{x}\frac{\partial}{\partial x}O^n(x)+\left(1-\frac{n^2-1}{x^2}\right)O^n(x)=(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{n}{x^2}.$$

Diese Formeln stimmen überein mit den von Neumann aufgestellten. Will man bei der Ableitung direkt von der Summenformel für $O^n(x)$ ausgehen, so kann man die Formeln (39) bis (43) zu Hülfe nehmen.

Es ist dann

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n+1\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x}-(n-1)\right)O^n(x)+\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n+1\right)\frac{n}{2}S^{n+1}(x)=0$$

$$x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}O^n(x)+3x\frac{\partial}{\partial x}O^n(x)-(n^2-1)O^n(x)=-\frac{nx}{2}S^n(x)+n\cos^2\frac{(n+1)\pi}{2}.$$

Nun ersetze man darin $S^n(x)$ wieder durch die $O^n(x)$-Funktion:

$$x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}O^n(x)+3x\frac{\partial}{\partial x}O^n(x)-(n^2-1)O^n(x)=-x^2O^n(x)+x\cos^2\frac{n\pi}{2}$$

$$+n\sin^2\frac{n\pi}{2},$$

also wie früher:

$$\left[x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+3x\frac{\partial}{\partial x}+x^2-(n^2-1)\right]O^n(x)=x\cos^2\frac{n\pi}{2}+n\sin^2\frac{n\pi}{2}.$$

[17]) L. Schläfli. Mathem. Annalen III S. 137.

Ueber die Relationen zwischen den Funktionen $S^n(x)$ und $O^n(x)$ vergleiche die Arbeit von Dr. L. Crelier: Sur les fonctions Besséliennes de deuxième Espèce $S^n(x)$ et $O^n(x)$, erschienen in den Mitteilungen der Naturf. Ges. Bern 1897, pag. 61—96. Seine dort aufgestellten Formeln ergeben sich auch nach dieser Methode mit Leichtigkeit. Die interessante Arbeit von Dr. L. Crelier wurde mir erst bekannt, als der vorliegende Aufsatz bereits beendigt war.

4. Die Funktionen $T^n(x)$ und $U^n(x)$.

Die zu $J^n(x)$ komplementäre Funktion, welcher also von derselben Differentialgleichung Genüge geleistet wird, ist definiert durch die folgende Summenformel: [18])

$$K^n(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$

$$+\frac{1}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^{\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}\left[2\,\mathrm{Log}\,\frac{x}{2}-\Delta(\lambda+1)-\Delta(n+\lambda+1)\right]. \quad (50)$$

Dabei haben die von Gauss eingeführten Symbole der Klammer die Bedeutung:

$$\Delta(\lambda+1) = \Delta(1)+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{\lambda}$$

$$\Delta(n+\lambda+1) = \Delta(1)+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n+\lambda},$$

wenn $\dfrac{\partial\,\mathrm{Log}\,\Gamma(x)}{\partial x} = \Delta(x)$ gesetzt wird. Führt man nun durch die Setzung:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{\lambda} = S\,\frac{1}{\lambda}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+\lambda} = S\,\frac{1}{n+\lambda}$$

das Zeichen S ein, so überzeugt man sich leicht von der Relation:

$$-\Delta(\lambda+1)-\Delta(n+\lambda+1) = -2\,\Delta(1)-2\,S\,\frac{1}{n+\lambda}$$
$$+\Delta(n+\lambda+1)-\Delta(\lambda+1).$$

[18]) Vergl. Anmerkung Seite 37.

Die Definitionsgleichung nimmt daher die Gestalt an:

$$K^n(x) = -\frac{1}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}\left[2\,\mathrm{Log}\frac{x}{2}-2\Delta(1)-2\,S\,\frac{1}{n+\lambda}\right.$$

$$\left.+\Delta(n+\lambda+1)-\Delta(\lambda+1)\right].$$

Zur Abkürzung seien nun die folgenden Funktionszeichen eingeführt:

$$T^n(x) = -\sum_{\lambda>\frac{n-1}{2}}^{\lambda=n-1}\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$

$$+\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}\left[\Delta(n+\lambda+1)-\Delta(\lambda+1)\right] \quad (51)$$

$$U^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda\,S\,\frac{1}{n+\lambda}\,\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}. \quad (52)$$

Es wird nun die komplementäre Funktion: [19])

$$K^n(x)-\frac{2}{\pi}\,\mathrm{Log}\frac{x}{2}\,J^n(x)=\frac{1}{\pi}\,T^n(x)-\frac{1}{\pi}\,S^n(x)-\frac{2}{\pi}\,U^n(x)$$

$$+\frac{2}{\pi}\,\Delta(1)\,J^n(x); \quad (53)$$

dabei ist das konstante Glied $\frac{2}{\pi}\cos^2\frac{n\pi}{2}$, das bei der S-Funktion auftritt, vernachlässigt worden. $K^n(x)$ hängt aber mit $J^n(x)$ durch die Gleichung zusammen: [20])

$$K^n(x) = \mathrm{cotg}\,n\pi\,J^n(x)-\frac{1}{\sin n\pi}\,J^{-n}(x).$$

Es besteht also die ganze linke Seite nur aus Bessel'schen Funktionen I$^{\text{ter}}$ Art, folglich muss es auch die rechte sein, und müssen sich

[19]) Vergl. Anmerkung Seite 37.

[20]) Vergl. Anmerkung Seite 37.

die neu eingeführten Funktionen $T^n(x)$ und $U^n(x)$ durch J-Funktionen darstellen lassen; dies ist auch der Fall, und es sollen die beiden neuen Funktionen im folgenden nach dieser Hinsicht untersucht werden.

Führt man in den Ausdruck für $T^n(x)$ die S-Funktion ein, indem man in der ersten Summe λ wieder von 0 an laufen lässt, und bedenkt man ferner, dass

$$\Delta(n+\lambda+1) = S\frac{1}{n+\lambda} + \Delta(1)$$

$$\Delta(\lambda+1) = S\frac{1}{\lambda} + \Delta(1)$$

ist, so kann man nun $T^n(x)$ die Form geben:

$$T^n(x) = S^n(x) - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$

$$+\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}\left[S\frac{1}{n+\lambda} - S\frac{1}{\lambda}\right] + \frac{2}{n}\cos^2\frac{n\pi}{2} \qquad (54)$$

oder durch Einführung eines weitern Zeichens:

$$T^n(x) = S^n(x) - R^n(x) + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}\left[S\frac{1}{n+\lambda} - S\frac{1}{\lambda}\right]$$

$$+\frac{2}{n}\cos^2\frac{n\pi}{2}, \qquad (55)$$

wobei:

$$R^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}. \qquad (56)$$

[Für jedes einigermassen grosse n kann das konstante Glied $\frac{2}{n}\cos^2\frac{n\pi}{2}$ vernachlässigt werden.]

Wir beantworten nun die Frage: $\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n\right)T^n(x) = ?$ Es ist

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n\right)S^n(x) = x\,S^{n-1}(x) - 2\cos^2\frac{n\pi}{2}, \text{ nach Formel (25)} \qquad (\alpha)$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n\right)\frac{2}{n}\cos^2\frac{n\pi}{2}=2\cos^2\frac{n\pi}{2}, \tag{β}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n\right)R^n(x)=x\,R^{n-1}(x),\ \text{denn es ist:} \tag{γ}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n\right)R^n(x)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}\left[2\lambda-n+n\right]$$

$$=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}2\cdot\frac{(n-\lambda-1)!}{(\lambda-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}=x\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\frac{(n-\lambda-1)!}{(\lambda-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}.$$

Man ersetze darin λ durch $\lambda+1$, dann wird:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n\right)R^n(x)=x\underbrace{\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-2}\frac{(n-\lambda-2)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n+1}}_{R^{n-1}(x)\ \text{nach (56)}},$$

also ist (γ) richtig. Ferner ist

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n\right)\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}\left[S\frac{1}{n+\lambda}-S\frac{1}{\lambda}\right]$$

$$=x\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-1}}{\lambda!\,(n+\lambda-1)!}\left[S\frac{1}{n+\lambda-1}-S\frac{1}{\lambda}\right]$$

$$+x\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-1}}{\lambda!\,(n+\lambda-1)!\,(n+\lambda)}$$

$$=x\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-1}}{\lambda!\,(n+\lambda-1)!}\left[S\frac{1}{n+\lambda-1}-S\frac{1}{\lambda}\right]$$

$$+2\underbrace{\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}}_{J^n(x)}. \tag{δ}$$

Werden nun (α) (β) (γ) und (δ) zusammengenommen, so folgt:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n\right)T^n(x)=x\,S^{n-1}(x)-2\cos^2\frac{n\pi}{2}+2\cos^2\frac{n\pi}{2}-x\,R^{n-1}(x)$$

$$+x\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-1}}{\lambda!\,(n+\lambda-1)!}\left[S\frac{1}{n+\lambda-1}-S\frac{1}{\lambda}\right]+2\,J^n(x)$$

$$=x\left[S^{n-1}(x)-R^{n-1}(x)+\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-1}}{\lambda!\,(n+\lambda-1)!}\left[S\frac{1}{n+\lambda-1}-S\frac{1}{\lambda}\right]\right]$$

$$+2\,J^n(x)$$

Nun ist aber nach (55):

$$T^{n-1}(x)=S^{n-1}(x)-R^{n-1}(x)+\sum_{\lambda-0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-1}}{\lambda!\,(n+\lambda-1)!}\left[S^{n+\lambda-1}-S\frac{1}{\lambda}\right]$$

$$=\frac{2}{n-1}\cos^2\frac{(n-1)\pi}{2}. \qquad (\varepsilon)$$

Der obige Klammerausdruck entspricht dem Wert

$$T^{n-1}(x)-\frac{2}{n-1}\sin^2\frac{n\pi}{2},$$

und wird dieser Wert für die Klammer substituiert, so ist dann:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n\right)T^n(x)=x\,T^{n-1}(x)-\frac{2x}{n-1}\sin^2\frac{n\pi}{2}+2\,J^n(x).$$

Für jedes etwas grössere n kann man aber sowohl in (55) wie in (ε) das konstante Glied vernachlässigen, dann fällt (β) weg und der fragliche Klammerausdruck entspricht dann einfach $T^{n-1}(x)$, so dass die Relation heraus kommt:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n\right)T^n(x)=x\,T^{n-1}(x)-2\cos^2\frac{n\pi}{2}+2\,J^n(x). \qquad (57)$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}-n\right)T^n(x)=?$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}-n\right)S^n(x)=-x\,S^{n+1}+2\cos^2\frac{n\pi}{2}\text{ nach (27);} \qquad (\alpha)$$

das konstante Glied $\frac{2}{n}\cos^2\frac{n\pi}{2}$ in (55) soll vernachlässigt werden.

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} - n\right) R^n(x) = - x R^{n+1}(x), \qquad (\beta)$$

denn es ist

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} - n\right) R^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}\left[2\lambda-n-n\right]$$

$$= - \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{2\,(n-\lambda)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$

$$= - x \underbrace{\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{(n-\lambda)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n-1}}_{R^{n+1}(x) \text{ nach } (56);}$$

also ist (β) richtig.

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} - n\right) \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}\left[S\frac{1}{n+\lambda} - S\frac{1}{\lambda}\right]$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{(\lambda-1)!\,(n+\lambda)!}\left[S\frac{1}{n+\lambda} - S\frac{1}{\lambda-1}\right]$$

$$- \underbrace{\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}}_{2\,J^n(x)}$$

$$= - x \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda+1}}{\lambda!\,(n+\lambda+1)!}\left[S\frac{1}{n+\lambda+1} - S\frac{1}{\lambda}\right] - 2\,J^n(x). \qquad (\gamma)$$

(α) (β) und (γ) addiert geben:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} - n\right) T^n(x) = - x S^{n+1}(x) + 2\cos^2\frac{n\pi}{2} + x R^{n+1}(x)$$

$$- x \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda+1}}{\lambda!\,(n+\lambda+1)!}\left[S\frac{1}{n+\lambda+1} - S\frac{1}{\lambda}\right] - 2\,J^n(x)$$

$$= -x\left\{S^{n+1}(x) - R^{n+1}(x) + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda+1}}{\lambda!\,(n+\lambda+1)!}\left[S\frac{1}{n+\lambda+1} - S\frac{1}{\lambda}\right]\right\}$$

$$+ 2\cos^2\frac{n\pi}{2} - 2\,J^n(x).$$

Nun ist wieder nach (55):

$$T^{n+1}(x) = S^{n+1}(x) - R^{n+1}(x) + \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda+1}}{\lambda!\,(n+\lambda+1)!}\left[S\frac{1}{n+\lambda+1} - S\frac{1}{\lambda}\right],$$

wobei allerdings die konstante Grösse $\frac{2}{n+1}\cos^2\frac{(n+1)\pi}{2}$ vernachlässigt ist; der Wert von $T^{n+1}(x)$ entspricht aber dem Ausdruck in der Klammer, daher die Relation:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} - n\right)T^n(x) = -\,x\,T^{n+1}(x) + 2\cos^2\frac{n\pi}{2} - 2\,J^n(x). \quad (58)$$

Die Addition von (57) und (58) ergiebt:

$$2\,x\frac{\partial}{\partial x}T^n(x) = -\,x\,T^{n+1}(x) + x\,T^{n-1}(x)$$

$$T^{n+1}(x) - T^{n-1}(x) + 2\frac{\partial}{\partial x}T^n(x) = 0. \quad (59)$$

Subtrahiert man (58) von (59), so bekommt man:

$$2\,n\,T^n(x) = x\,T^{n+1}(x) + x\,T^{n-1}(x) - 4\cos^2\frac{n\pi}{2} + 4\,J^n(x)$$

$$T^{n+1}(x) + T^{n-1}(x) - \frac{2n}{x}T^n(x) = \frac{4}{x}\left(\cos^2\frac{n\pi}{2} - J^n(x)\right). \quad (60)$$

Zu der Differentialgleichung für $T^n(x)$ gelangt man auf folgende Weise:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + n\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x} - n\right)T^n(x) + \left(x\frac{\partial}{\partial x} + n\right)x\,T^{n+1}(x)$$

$$= 2n\cos^2\frac{n\pi}{2} - \left(x\frac{\partial}{\partial x} + n\right)2\,J^n(x);$$

$$x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}T^n(x) + x\frac{\partial}{\partial x}T^n(x) - n^2\,T^n(x) + x\left(x\frac{\partial}{\partial x} + (n+1)\right)T^{n+1}(x)$$

$$= 2n\cos^2\frac{n\pi}{2} - 2\,x\,J^{n-1}(x).$$

Nach (57) ist nun aber

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+(n+1)\right)T^{n+1}(x)=x\,T^{n}(x)-2\cos^{2}\frac{(n-1)\pi}{2}+2\,J^{n+1}(x),$$

daher

$$x^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}T^{n}(x)+x\frac{\partial}{\partial x}T^{n}(x)+(x^{2}-n^{2})T^{n}(x)=-2x\underbrace{(J^{n+1}(x)+J^{n-1}(x))}_{\frac{2n}{x}J^{n}(x)}$$

$$+2x\sin^{2}\frac{n\pi}{2}+2n\cos^{2}\frac{n\pi}{2}.$$

Also nimmt die gesuchte Differentialgleichung die Form an:

$$x^{2}\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}T^{n}(x)+x\frac{\partial}{\partial x}T^{n}(x)+(x^{2}-n^{2})T^{n}(x)=2x\sin^{2}\frac{n\pi}{2}$$

$$+2n\cos^{2}\frac{n\pi}{2}-4n\,J^{n}(x). \qquad (61)$$

Auf ähnliche Weise lassen sich die Eigenschaften und die Differentialgleichung für die U-Funktion ableiten. Nach Definition ist:

$$U^{n}(x)=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^{\lambda}S\frac{1}{n+\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}.$$ Daraus ergibt sich:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n\right)U^{n}(x)=x\underbrace{\sum(-1)^{\lambda}S\frac{1}{n+\lambda-1}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-1}}{\lambda!\,(n+\lambda-1)!}}_{U^{n-1}(x)}$$

$$+\underbrace{\sum(-1)^{\lambda}\frac{x}{n+\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda-1}}{\lambda!\,(n+\lambda-1)!}}_{2\,J^{n}(x)},$$

oder

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n\right)U^{n}(x)=x\,U^{n-1}(x)+2\,J^{n}(x). \qquad (62)$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}-n\right)U^{n}(x)=\sum(-1)^{\lambda}S\frac{1}{n+\lambda}\frac{2\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{(\lambda-1)!\,(n+\lambda)!}.$$

Man ersetze λ durch $(\lambda+1)$, dann wird:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}-n\right)U^n(x)=-x\underbrace{\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}(-1)^\lambda S\frac{1}{n+\lambda+1}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda+1}}{\lambda!\,(n+\lambda+1)!}}_{U^{n+1}(x)}$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}-n\right)U^n(x)=-x\,U^{n+1}(x). \tag{63}$$

Die Addition von (62) und (63) liefert:

$$U^{n+1}(x)-U^{n-1}(x)+2\frac{\partial}{\partial x}U^n(x)=\frac{2}{x}J^n(x); \tag{64}$$

(63) von (62) subtrahiert gibt:

$$U^{n+1}(x)+U^{n-1}(x)-\frac{2n}{x}U^n(x)=\frac{2}{x}J^n(x). \tag{65}$$

Aus (62) und (63) folgt ferner:

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x}+n\right)\left(x\frac{\partial}{\partial x}-n\right)U^n(x)-\left(x\frac{\partial}{\partial x}-n\right)x\,U^{n-1}(x)=2\left(x\frac{\partial}{\partial x}-n\right)J^n(x)$$

$$x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}U^n(x)+x\frac{\partial}{\partial x}U^n(x)-n^2U^n(x)+x^2U^n(x)=-2x\,J^{n+1}(x)$$

$$\left(x^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x\frac{\partial}{\partial x}+x^2-n^2\right)U^n(x)=-2x\,J^{n+1}(x). \tag{66}$$

Dies ist die Differentialgleichung, welcher die Funktion $U^n(x)$ genügt.

Durchgeht man die vorhandene Litteratur über Bessel'sche Funktionen, so begegnet man noch verschiedenen Bezeichnungen; einzig für die Bessel'sche Funktion erster Art $J^n(x)$ findet man überall das nämliche Symbol. Schon für die zur Funktion $J^n(x)$ komplementären Funktion ist das Funktionszeichen nicht immer das gleiche. C. Neumann[21]) bestimmte die komplementäre Funktion zu $J^0(x)$ und bezeichnete sie mit $Y^0(x)$. Er fand:

$$Y^0(x)=L^0(x)+E^0(x);$$

dabei bedeuten:

$$L^0(x)=J^0(x)\log x$$

$$E^0(x)=2\left(\frac{1}{1}J^2(x)-\frac{1}{2}J^4(x)+\frac{1}{3}J^6(x)-\frac{1}{4}J^8(x)+\cdots\right).$$

---

[21]) C. Neumann, Bessel'sche Funktionen, § 17. Seite 41 u. ff.

Vermittelst der Relation $J^{1+n}(x) = \frac{n}{x} J^n(x) - \frac{\partial J^n(x)}{\partial x}$ gelangt er dann in § 20 auf induktivem Wege zu der allgemeinen Funktion $Y^n(x)$, indem er schreibt:

$$\begin{aligned} Y^0(x) &= L^0(x) + E^0(x) \\ Y^1(x) &= L^1(x) + E^1(x) \\ &\text{— — — — — — —} \\ Y^n(x) &= L^n(x) + E^n(x), \end{aligned}$$

wobei:

$$L^0(x) = J^0(x) \log(x)$$

$$L^1(x) = -\frac{J^0(x)}{(x)} + J^1(x) \log x$$

— — — — — — — — —

$$L^n(x) = -\frac{n!}{2}\left\{\frac{2^n}{n} \cdot \frac{J^0}{x^n} + \frac{2^{n-1}}{(n-1)\,.\,1!}\,\frac{J^1}{x^{n-1}} + \frac{2^{n-2}}{(n-2)\,2!}\,\frac{J^2}{x^{n-2}} + \right.$$

$$\left. \cdots + \frac{2}{1\,.\,(n-1)!}\,\frac{J^{n-1}}{x}\right\} + J^n \log x$$

$$E^0(x) = -k_0 J^0 + 4\left\{\frac{2J^2}{2\,.\,2} - \frac{4J^4}{4\,.\,4} + \frac{6J^6}{6\,.\,6} - \frac{8J^8}{8\,.\,8} + - \cdots\right\}$$

$$E^1(x) = -k_1 J^1 + 4\left\{\frac{3J^3}{2\,.\,4} - \frac{5J^5}{4\,.\,6} + \frac{7J^7}{6\,.\,8} - \frac{9J^9}{8\,.\,10} + - \cdots\right\}$$

— — — — — — — — — — — — — — — — —

$$E^n(x) = -k_n J^n + 4\left\{\frac{(n+2)\,J^{n+2}}{2\,(2n+2)} - \frac{(n+4)\,J^{n+4}}{4\,(2n+4)}\right.$$

$$\left. + \frac{(n+6)\,J^{n+6}}{6\,(2n+6)} - + \cdots\right\};$$

unter den Grössen k sind in diesen Formeln die Konstanten zu verstehen:

$$\begin{aligned} k_0 &= 0 \\ k_1 &= 1 \\ k_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\ &\text{— — — — — —} \\ k_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Einen Zusammenhang in geschlossener Form zwischen $J^n(x)$ und $Y^n(x)$ konnte C. Neumann noch nicht geben.

L. Schläfli gibt für die komplementäre Funktion die Formel:[22])

$$Y^n(x) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{2\varepsilon} \left(J^{n+\varepsilon}(x) - (-1)^n J^{-n-\varepsilon}(x)\right) + [\log 2 + \Gamma'(1)]\, J^n(x).$$

Wird der angedeutete Grenzprozess ausgeführt, so ist $Y^n(x)$ definiert durch:

$$Y^n(x) = \log x\, J^n(x) - \frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$

$$- \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left(S\frac{1}{\lambda} S\frac{1}{n+\lambda}\right) \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^\lambda}{\lambda!\,(n+\lambda)!},$$

wo $S\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \Delta(n+1) - \Gamma^1(1)$, wenn $\frac{\partial \log \Gamma(x)}{\partial x} = \Delta(x)$ gesetzt wird. L. Schläfli setzt dann weiter:

$$G^n(x) = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n} = -\frac{1}{2} S^n(x)$$

$$H^n(x) = -\frac{1}{2} \sum_{\lambda<\frac{n-1}{2}}^{\lambda=n-1} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \left(S\frac{1}{n+\lambda} - S\frac{1}{\lambda}\right) \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^\lambda}{\lambda!\,(n+\lambda)!}$$

$$E^n(x) = -\left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} S\frac{1}{n+\lambda} \cdot \frac{\left(-\frac{1}{4}x^2\right)^\lambda}{\lambda!\,(n+\lambda)!},$$

so dass nun ist:

$$Y^n(x) = \log x\, J^n(x) + G^n(x) + H^n(x) + E^n(x).$$

$E^n(x)$ hat dieselbe Bedeutung wie bei C. Neumann.

Später gibt L. Schläfli der komplementären Funktion eine etwas

---

[22]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III S. 143.

andere Form, zugleich mit einer anderen Bezeichnung.[23]) Er definiert dieselbe durch:

$$K^n(x) = \operatorname{cotg} n\pi\, J^n(x) - \frac{1}{\sin n\pi}\, J^{-n}(x).$$

Diese Formel wird für ein ganzzahliges n nur durch einen sich zu denkenden Grenzprozess verständlich. Wird darin $n = n + \varepsilon$ gesetzt, so resultiert zuerst:

$$K^n(x) = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon\pi} \left\{ J^{n+\varepsilon}(x) - (-1)^n\, J^{-n-\varepsilon}(x) \right\}.$$

Wird dieser Grenzübergang ausgeführt, so erhält man die Definitionsformel (50), Seite 24. Vergleicht man nun aber diese Formel (50) resp. (53):

$$K^n(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{Log} \frac{x}{2}\, J^n(x) + \frac{1}{\pi}\, T^n(x) - \frac{1}{\pi}\, S^n(x) - \frac{2}{\pi}\, U^n(x) + \frac{2}{\pi}\, \Delta(1)\, J^n(x)$$

mit der obigen für $Y^n(x)$, so ergeben sich folgende Identitäten:

a)	$G^n(x) = -\frac{1}{2}\, S^n(x)$	$S^n(x) = -2\, G^n(x)$
b)	$H^n(x) = \frac{1}{2}\, T^n(x)$	$T^n(x) = 2\, H^n(x)$
c)	$E^n(x) = -U^n(x)$	$U^n(x) = -E^n(x)$
d)	$Y^n(x) = \frac{\pi}{2}\, K^n(x) + (\log 2 - \Delta(1))\, J^n(x)$	$K^n(x) = \frac{2}{\pi}\left[Y^n(x) - (\log 2 - \Delta(1))\, J^n(x)\right].$

Durch die letzten Arbeiten von Prof. Dr. J. H. Graf, Dr. E. Gubler, sind wohl die älteren Bezeichnungen zu Grabe getragen, was im Interesse der Einfachheit und Uebersicht nur zu begrüssen ist.

Ein bestimmtes Integral[24]) lässt sich für die T-Funktion da-

[23]) L. Schläfli: Annali di Matematica: Serie IIa, tomo VI° pag. 17. Vergl. die Bemerkung von E. Gubler, Züricher Vierteljahrsschrift XXX, Heft 2, 1888, in der Arbeit betitelt: Die Darstellung der allgemeinen Bessel'schen Funktionen durch bestimmte Integrale. Vergl. ferner: J. H. Graf. Mathem. Annalen XLIII, Seite 136, Note unten.

[24]) J. H. Graf, Vorlesungen.

durch herleiten, dass man die beiden Summen in Formel (51) zu vereinigen sucht. Zu dem Zwecke denke man sich in dem Ausdrucke:

$$(-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!} = (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\Gamma(\lambda+1)\,\Gamma(n+\lambda+1)}$$

statt $\Gamma(\lambda+1)$ geschrieben $\Gamma(\lambda+1+\varepsilon)$ und statt $\Gamma(n+\lambda+1)$ $\Gamma(n+\lambda+1-\varepsilon)$; ε bedeutet dabei ein Inkrement, das zum Verschwinden bestimmt ist. Nach Taylor ist nun aber:

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda+1+\varepsilon)} = \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)} + \varepsilon \frac{\Delta(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1)}$$

und

$$\frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1-\varepsilon)} = \frac{1}{\Gamma(n+\lambda+1)} - \varepsilon \frac{\Delta(n+\lambda+1)}{\Gamma(n+\lambda+1)};$$

der zweite Teil der T-Funktion ist daher nichts anderes als der $[\varepsilon]$*) in der Entwicklung

$$\frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\Gamma(\lambda+1+\varepsilon)\,\Gamma(n+\lambda+1-\varepsilon)}.$$

Der erste Teil lässt sich auf ähnliche Weise ausdrücken. Man ersetze in

$$\frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\Gamma(\lambda+1+\varepsilon)\,\Gamma(n+\lambda+1-\varepsilon)}$$

λ durch $(\lambda-n)$, wodurch man dafür erhält

$$\frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}}{\Gamma(\lambda+1-\varepsilon)\,\Gamma(\lambda-n+1+\varepsilon)}.$$

Da nun aber $\lambda-n$ negativ werden kann, so multipliziere man Zähler und Nenner mit $\Gamma(n-\lambda-\varepsilon)$ und wende den Satz an:

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi};\quad \frac{1}{\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)} = \frac{\sin a\pi}{\pi};$$

es ist dann entsprechend:

$$\frac{1}{\Gamma(\lambda-n+1+\varepsilon)\,\Gamma(n-\lambda-\varepsilon)} = \frac{\sin(\lambda-n+1+\varepsilon)\pi}{\pi}$$

$$= (-1)^{\lambda-n+1}\frac{\sin\varepsilon\pi}{\pi} - -(-1)^{\lambda-n}\frac{\varepsilon\pi}{\pi}$$

$$= -(-1)^{\lambda-n}\varepsilon.$$

*) «$[\varepsilon]$ - Koëffizient von ε^n».

Auf diese Weise hat man also erhalten:

$$(-1)^{\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}}{\Gamma(\lambda+1-\varepsilon)\,\Gamma(\lambda-n-1+\varepsilon)}=(-1)^{\lambda-n}\frac{\Gamma(n-\lambda-\varepsilon)\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}}{\Gamma(\lambda+1-\varepsilon)\,\Gamma(n-\lambda-\varepsilon)\,\Gamma(\lambda-n+1+\varepsilon)}$$

$$=-(-1)^{2(\lambda-n)}\frac{\Gamma(n-\lambda-\varepsilon)\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}}{\Gamma(\lambda+1-\varepsilon)}\,\varepsilon.$$

Dies ist aber gleich dem Ausdrucke hinter dem Summenzeichen. Die Laufzahl λ ging von $\lambda > \frac{n+1}{2}$; da aber gesetzt wurde:

$$\lambda = \lambda - n,$$

so muss nun:

$$\lambda > -\frac{n-1}{2}$$

und es ist daher:

Erster Teil $= [\varepsilon]$ in der Entwicklung

$$\sum_{\lambda > -\frac{n-1}{2}}^{\lambda=n-1}(-1)^{\lambda}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\Gamma(\lambda+1+\varepsilon)\,\Gamma(n+\lambda+1-\varepsilon)}.$$

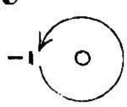
Beide Teile lassen sich nun so zusammenfassen, dass man schreiben kann:

$T^{n}(x) = [\varepsilon]$ in der Entwicklung

$$\sum_{\lambda > -\frac{n-1}{2}}^{\lambda=n-1}(-1)^{\lambda}\frac{\Gamma(n+2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1+\varepsilon)\,\Gamma(n+\lambda+1-\varepsilon)}\,\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{(n+2\lambda)!}.$$

Andererseits ist dann auch:

$$\frac{\Gamma(n+2\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+1+\varepsilon)\,\Gamma(n+\lambda+1-\varepsilon)}=\frac{1}{2i\pi}\int(1+t)^{n+2\lambda}\,\frac{dt}{t^{\lambda+1+\varepsilon}}.$$

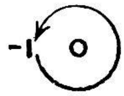


Um darin den Coëffizient von ε herauszustechen, denke man sich $t^{-\varepsilon}$ entwickelt:

$$t^{-\varepsilon} = e^{-\varepsilon \operatorname{Log} t} = 1 - \varepsilon \operatorname{Log} t + \varepsilon^2 \ldots\ldots;$$

folglich ist:

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2i\pi}\int (1+t)^{n+2\lambda} \cdot -\operatorname{Log} t \, \frac{dt}{t}.$$



Man setze:

$$t = e^{i(2\varphi - \pi)}, \quad dt = e^{i(2\varphi - \pi)}\, 2i\, d\varphi,$$

$$\frac{dt}{t} = \frac{e^{i(2\varphi-\pi)}\, 2i\, d\varphi}{e^{i(2\varphi-\pi)}} = 2i\, d\varphi,$$

$$-\operatorname{Log} t = -i(2\varphi - \pi) = 2i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right);$$

$$1+t = 1 + e^{i(2\varphi-\pi)} = e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}\left[e^{-i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)} + e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}\right]$$

$$= e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)}\, 2\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1+t = e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)} \sin\varphi.$$

Die Grenzen werden 0 und π und daher wird das Integral:

$$\frac{1}{2i\pi}\int_0^\pi \frac{(-2i)(2i)\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right) 2^{n+2\lambda}\, e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)(n+2\lambda)}}{e^{i\lambda(2\varphi-\pi)}} \cdot \sin^{n+2\lambda} d\varphi$$

$$= \frac{2}{i\pi}\int_0^\pi \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{i\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)(n+2\lambda) - i\lambda(2\varphi-\pi)} (2\sin\varphi)^{n+2\lambda}\, d\varphi$$

$$= \frac{2}{i\pi}\int_0^\pi \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{in\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)} (2\sin\varphi)^{n+2\lambda}\, d\varphi.$$

Es ist:

$$e^{-in\frac{\pi}{2}} = (-i)^n,$$

damit vereinige man aus der Summenformel:

$$(-1)^\lambda = (-i^2)^\lambda = -i^{2\lambda};$$

der Ausdruck nimmt dann die Gestalt an:

$$\frac{2}{i\pi}\int_0^\pi \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{in\varphi}\, (-2i\sin\varphi)^{n+2\lambda}\, d\varphi$$

und dieser Wert in der Summenformel eingesetzt, gibt:

$$T^n(x) = \frac{2}{i\pi}\int_0^\pi \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{in\varphi} \sum \frac{(-2i\sin\varphi)^{n+2\lambda}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{(n+2\lambda)!}\, d\varphi.$$

Weil aber:

$$\sum \frac{(-ix\sin\varphi)^{n+2\lambda}}{(n+2\lambda)!} = e^{-ix\sin\varphi},$$

so hat man das Resultat:

$$T^n(x) = \frac{2}{i\pi}\int_0^n \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-i(x\sin\varphi - n\varphi)}\, d\varphi. \qquad (67)$$

Dem Integral lässt sich eine andere Gestalt geben, indem man es zerreisst:

$$T^n(x) = \frac{1}{i\pi}\int_0^\pi \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-i(x\sin\varphi - n\varphi)}\, d\varphi$$

$$+ \frac{(-1)^n}{i\pi}\int_0^\pi \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-i(x\sin\varphi - n\varphi)}\, d\varphi,$$

wobei n = gerade sein muss.

$$(-1) = e^{-i\pi}$$
$$(-1)^n = e^{-in\pi}$$

daher:

$$T^n(x) = \frac{1}{i\pi}\left\{\int_0^\pi \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-i(x\sin\varphi - n\varphi)}\, d\varphi\right.$$

$$\left. + \int_0^\pi \left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) e^{-i(x\sin\varphi - n(\varphi - \pi))}\, d\varphi.\right.$$

Man substituiere: $\varphi = \pi - \varphi$; dann wird:

$$T^n(x) = \frac{1}{i\pi}\left\{\int_\pi^0 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) e^{-i(x\sin\varphi - n\pi + n\varphi)} \cdot - d\varphi\right.$$

$$\left. + \int_\pi^0 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) e^{-i(x\sin\varphi - n\varphi)} \cdot - d\varphi\right\}$$

$$= \frac{1}{i\pi}\left\{\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) e^{i(x\sin\varphi - n\varphi)} \cdot d\varphi\right.$$

$$\left. - (-1)^n \int_0^\pi e^{-i(x\sin\varphi - n\varphi)} d\varphi\right\}$$

$$= \frac{1}{i\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) d\varphi,$$

wenn $iz = i(x \sin\varphi - n\varphi)$,

$$= \frac{1}{i\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) 2i \sin z \; d\varphi,$$

$$T^n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \sin(x \sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi. \tag{68}$$

Als Integrationsweg kann ein Teil des Einheitskreises gewählt werden; dabei ist aber dann $x < 1$. Es sei nun:

$$1 - x = r \cdot e^{i\omega}$$

$$\mathrm{Log}(1-x) = \mathrm{Log}\, r + i\omega.$$

Bewegt sich x gegen die Peripherie, so möge ω in

$$\omega = \frac{\pi}{2} - \Theta \text{ und } r \text{ in } r = 2 \sin\frac{\Theta}{2}$$

übergehen; dann wird für diesen Grenzwert:

$$\mathrm{Log}(1-x) = \mathrm{Log}\, 2 \sin\frac{\Theta}{2} - i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2}\right)$$

$$-\mathrm{Log}(1-x) = -\mathrm{Log}\, 2 \sin\frac{\Theta}{2} + i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2}\right).$$

Da $x < 1$, so ist es erlaubt zu schreiben:

$$-\mathrm{Log}(1-x) = +\sum_1^\infty \frac{x^\lambda}{\lambda}; \qquad x \text{ durch ersetzt } e^{i\Theta}$$

$$-\mathrm{Log}(1-x) = \sum_1^\infty \frac{e^{i\lambda\Theta}}{\lambda} = \sum_1^\infty \frac{\cos\lambda\Theta + i \sin\lambda\Theta}{\lambda}$$

$$= \sum_1^\infty \frac{\cos\lambda\Theta}{\lambda} + i\sum_1^\infty \frac{\sin\lambda\Theta}{\lambda}.$$

Also ist:

$$\sum_1^\infty \frac{\cos\lambda\Theta}{\lambda} + i \sum_1^\infty \frac{\sin\lambda\Theta}{\lambda} = -\operatorname{Log}\left(2\sin\frac{\Theta}{2}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2}\right),$$

$$\sum_1^\infty \frac{\cos\lambda\Theta}{\lambda} = -\operatorname{Log}\left(2\sin\frac{\Theta}{2}\right); \sum_1^\infty \frac{\sin\lambda\Theta}{\lambda} = \frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2},$$

wobei $x < 1$.

Es ist also auch:

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \sum_1^\infty \frac{\sin 2\lambda\varphi}{\lambda}.$$

Wird dies im Integral eingesetzt, so folgt:

$$T^n(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2\sin(x\sin\varphi - n\varphi)\sin 2\lambda\varphi\, d\varphi.$$

Berücksichtigt man aber, dass:

$$2\sin(x\sin\varphi - n\varphi)\sin 2\lambda\varphi = \cos(x\sin\varphi - (n+2\lambda)\varphi) - \cos(x\sin\varphi - (n-2\lambda)\varphi),$$

so ergeben sich 2 Integrale:

$$T^n(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - (n+2\lambda)\varphi)\, d\varphi - \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - (n-2\lambda)\varphi)\, d\varphi\right\}.$$

Nun genügt aber die B-Funktion erster Art dem folgenden Integrale:

$$J^n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi$$

und analog:

$$J^{n+2\lambda}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - (n+2\lambda)\varphi)\, d\varphi$$

$$J^{n-2\lambda}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin\varphi - (n-2\lambda)\varphi)\, d\varphi,$$

woraus nun die hübsche Formel folgt:

$$T^n(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} \left\{ J^{n+2\lambda}(x) - J^{n-2\lambda}(x) \right\}. \tag{69}$$

Damit ist die im Anfange des Abschnittes gestellte Aufgabe, die Funktion $T^n(x)$ durch Bessel'sche Funktionen erster Art darzustellen, gelöst.

Die Formel (67) liefert am einfachsten die folgenden Eigenschaften für die T-Funktion:

$$T^{-n}(x) = -(-1)^n T^n(x) \tag{α}$$

$$T^{-1}(x) = T^n(x) \tag{β}$$

$$T^0(x) = 0. \tag{γ}$$

Es folgen dieselben, wenn auch weniger deutlich, direkt aus der Summen- und Integralformel. Sie können in Verbindung mit der Relation:

$$T^{n+1} + T^{n-1} - \frac{2n}{x} T^n(x) = \frac{4}{x}\left(\cos^2 \frac{n\pi}{2} - J^n(x)\right) \tag{δ}$$

umgekehrt dazu benutzt werden, die Entwicklung (69) herzuleiten.[25]) Die Zahl 1 genügt bekanntlich der folgenden Entwicklung nach Bessel-schen Funktionen erster Art:

$$1 = \sum_{-\infty}^{+\infty} J^{2n}(x) = J^0(x) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} J^{2n}(x); \tag{ε}$$

(δ) liefert für $n = 0$:

$$T^1 + T^{-1} = \frac{4}{x}\left(1 - J^0\right);$$

da aber $T^1 = T^{-1}$, so wird:

$$2\,T^1 = \frac{4}{x}\left(1 - J^0\right)$$

$$T^1 = \frac{2}{x}\left(1 - J^0\right).$$

Setzt man darin den Wert von 1 aus (ε) ein, so folgt:

$$T^1 = \frac{2}{x}\left(J^0 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} J^{2n}(x) - J^0\right)$$

$$T^1 = \frac{4}{x} \sum_{n=1}^{n=\infty} J^{2n}(x). \tag{70}$$

---

[25]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III, Seite 145 und 146.

Nun ist aber:

$$J^{n+1} + J^{n+1} = \frac{2n}{x} J^n$$

$$\frac{2}{x} J^n = \frac{1}{n}\left(J^{n+1} + J^{n-1}\right)$$

$$\frac{2}{x} J^{2n} = \frac{1}{2n}\left(J^{2n+1} + J^{2n-1}\right),$$

eingesetzt:

$$T^1 = 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{2n}\left(J^{2n+1} + J^{2n-1}\right) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}\left(J^{2n+1} + J^{2n-1}\right).$$

Mit Rücksicht darauf dass:

$$J^{2n-1} = -J^{1-2\lambda n}$$

wird endlich:

$$T^1 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda}\left(J^{1+2\lambda} - J^{1-2\lambda}\right). \tag{71}$$

Aus den obigen Beziehungen folgt ferner, dass wenn man die Entwicklung fortsetzt, die untersten Terme in der Summe wegfallen, so dass z. B.

$$T^2 = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda}\left(J^{2\lambda+2} - J^{2-2\lambda}\right)$$

oder allgemein

$$T^n = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda}\left(J^{n+2\lambda} - J^{n-2\lambda}\right).$$

Aus dieser Summenformel ergiebt sich auch das vorhin aufgestellte Integral für $T^n(x)$[26]), wenn man die entsprechenden Integralwerthe von $J^{n+2\lambda}(x)$ und $J^{n-2\lambda}(x)$ einsetzt und ausmultipliziert.

Man findet:

$$J^{n+2\lambda}(x) - J^{n-2\lambda}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [\cos(x \sin\varphi - (n+2\lambda)\varphi)$$
$$- \cos(x\sin\varphi - (n-2\lambda)\varphi)]\, d\varphi$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi [\sin(x\sin\varphi - n\varphi)\sin 2\lambda\varphi]\, d\varphi.$$

---

[26]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III, Seite 147.

Nun war aber

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{\sin 2\lambda\varphi}{\lambda} = \frac{\pi}{2} - \varphi,$$

daher:

$$\mathrm{T}^{n}(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin(x \sin\varphi - n\varphi)\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) d\varphi,$$

was Formel (68) ist.

Es bleibt uns noch übrig, für die U-Funktion ein Integral[27]) aufzustellen und eine Entwicklung nach Bessel'schen Funktionen I^ter Art zu finden. Aus der Formel

$$\mathrm{K}^{n}(x) - \left[\frac{2}{\pi} \operatorname{Log}\frac{x}{2} + \frac{2}{\pi}\Delta(1)\right]\mathrm{J}^{n}(x) = \frac{1}{\pi}\mathrm{T}^{n}(x) - \frac{1}{\pi}\mathrm{S}^{n}(x) - \frac{2}{\pi}\mathrm{U}^{n}(x)$$

folgt:

$$-\frac{2}{\pi}\mathrm{U}^{n}(x) + \frac{2}{\pi}\mathrm{J}^{n}(x)\left(\operatorname{Log}\frac{x}{2} + \Delta(1)\right) = \mathrm{K}^{n}(x) - \frac{1}{\pi}\mathrm{T}^{n}(x) + \frac{1}{\pi}\mathrm{S}^{n}(x).$$

Werden für die Ausdrücke rechts die entsprechenden Integrale eingesetzt, so kann man schreiben:

$$-\frac{2}{\pi}\mathrm{U}^{n}(x) + \frac{2}{\pi}\mathrm{J}^{n}(x)\left(\operatorname{Log}\frac{x}{2} + \Delta(1)\right) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \underbrace{\sin(x\sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi}_{\mathrm{I}}$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \underbrace{e^{-x \sin\chi}\left(e^{n\chi} + (-1)^{n} e^{-n\chi}\right) d\chi}_{\mathrm{II}}$$

$$\underbrace{-\frac{2}{\pi^{2}}\int_{0}^{\pi} \sin(x\sin\varphi - n\varphi)\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) d\varphi}_{\mathrm{III}}$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \underbrace{e^{-x \sin\chi}\left(e^{n\chi} - (-1)^{n} e^{-n\chi}\right) d\chi}_{\mathrm{IV}};$$

$$\mathrm{II} + \mathrm{IV} = (-1)^{n}\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-x \sin\chi}\, e^{-n\chi}\, d\chi$$

---

[27]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III, Seite 147 unten.

$$I + III = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x \sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi - \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} \sin(x \sin\varphi - n\varphi)\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) d\varphi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x \sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x \sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi$$

$$+ \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} \sin(x \sin\varphi - n\varphi)\, \varphi\, d\varphi.$$

Werden alle diese Werte eingesetzt, so entsteht:

$$-\frac{2}{\pi} U^n(x) + \frac{2}{\pi} J^n\left(\mathrm{Log}\,\frac{x}{2} + \varDelta(1)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi} \sin(x \sin\varphi - n\varphi)\, \varphi d\varphi - (-1)^n \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x\,\sin\chi - n\chi}\, d\chi$$

und daraus:

$$U^n(x) = - J^n(x)\left(\mathrm{Log}\,\frac{x}{2} + \varDelta(1)\right)$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x \sin\varphi - n\varphi)\, \varphi d\varphi + (-1)^n \int_0^{\pi} e^{-x\,\sin\chi - n\chi}\, d\chi. \qquad (72)$$

Die Formel (65) liefert successive die folgenden Beziehungen:[28])

$$n = 0 \qquad - U^{-1}(x) = U^n(x) - \frac{2}{x} J^0(x)$$

$$n = -1 \qquad U^{-2}(x) = - U^0(x) + \frac{2}{x}(-1)\, U^{-1}(x) + \frac{2}{x} J^{-1}(x)$$

$$n = -2 \qquad - U^{-3}(x) = - U^{-1}(x) + \frac{4}{x} U^{-2}(x) - \frac{2}{x} J^{-2}(x)$$

$$n = -3 \qquad U^{-4}(x) = - U^{-2}(x) - \frac{6}{x} U^{-3}(x) + \frac{2}{x} J^{-3}(x)$$

$$(-1)^4 U^{-4}(x) = -(-1)^2 U^{-4+2}(x) + 2\frac{4-1}{x}(-1)^{4-1} U^{-3}(x)$$

$$- \frac{2}{x} J^{4-1}(x)$$

oder allgemein:

$$(-1)^n U^{-n}(x) = -(-1)^{n-2} U^{-n+2}(x) + 2\,\frac{n-1}{x}(-1)^{n-1} U^{-n+2}(x)$$

$$- \frac{2}{x} J^{n-1}(x)$$

[28]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III, Seite 144.

$$(-1)^n\, U^{-n}(x) = (-1)^{n-1}\, U^{2-n}(x) + 2\,\frac{n-1}{x}\,(-1)^{n-1}\, U^{1-n}(x)$$
$$- \frac{2}{x}\, J^{n-1}(x)$$

$$- U^{-n}(x) = U^{2-n}(x) + 2\,\frac{n-1}{x}\, U^{1-n}(x) - (-1)^{n-1}\,\frac{2}{x}\, J^{n-1}(x). \qquad (73)$$

Eine hübsche Relation zwischen den Funktionen $S^n(x)$, $T^n(x)$ und $U^n(x)$ lässt sich auf folgende Weise gewinnen:

Es ist

$$K^n(x) - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Log}\,\frac{x}{2}\, J^n(x) = \frac{1}{\pi}\, T^n(x) - \frac{1}{\pi}\, S^n(x) - \frac{2}{\pi}\, U^n(x)$$
$$- \frac{2}{\pi}\, \varDelta(1)\, J^n(x); \qquad (\alpha)$$

ebenso ist:

$$K^{-n}(x) - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Log}\,\frac{x}{2}\, J^{-n}(x) = \frac{1}{\pi}\, T^{-n}(x) - \frac{1}{\pi}\, S^{-n}(x) - \frac{2}{\pi}\, U^{-n}(x)$$
$$- \frac{2}{\pi}\, \varDelta(1)\, J^{-n}(x).$$

Wird nun jedes Glied mit $(-1)^n$ multipliziert, so kann man schreiben:

$$K^n(x) - \frac{2}{\pi}\,\mathrm{Log}\,\frac{x}{2}\, J^n(x) = -\frac{1}{\pi}\, T^n(x) + \frac{1}{\pi}\, S^n(x)$$
$$- (-1)^n\frac{2}{\pi}\, U^{-n}(x) - \frac{2}{\pi}\, \varDelta(1)\, J^n(x). \qquad (\beta)$$

Addiert man (α) und (β), so erhält man:

$$2\,K^n(x) - \frac{4}{\pi}\, J^n(x)\left(\mathrm{Log}\,\frac{x}{2} - \varDelta(1)\right) = -\frac{2}{\pi}\, U^n(x) - (-1)^n\frac{2}{\pi}\, U^{-n}(x)$$

oder mit 2 dividiert:

$$K^n(x) - \frac{2}{\pi}\, J^n(x)\left(\mathrm{Log}\,\frac{x}{2} - \varDelta(1)\right) = -\frac{1}{\pi} U^n(x) - (-1)^n\, U^{-n}(x). \qquad (74)$$

Subtrahiert man dagegen (β) von (α), so erhält man:

$$\frac{2}{\pi}\, T^n(x) - \frac{2}{\pi}\, S^n(x) - \frac{2}{\pi}\, U^n(x) + (-1)^n\,\frac{2}{\pi}\, U^{-n}(x) = 0$$

oder

$$T^n(x) - S^n(x) = U^n(x) - (-1)^n\, U^n(x). \qquad (75)$$

Zur vollständigen Lösung der gestellten Aufgabe soll die U-Funktion noch durch Bessel'sche Funktionen I[ter] Art dargestellt werden. Nach Definition ist:

$$U^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!}\; S\,\frac{1}{n+\lambda},$$

wobei

$$S\frac{1}{n+\lambda} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+\lambda}.$$

Mit einiger Geduld kann man eine Entwicklung nach Bessel'schen Funktionen I[ter] Art direkt ableiten. Es ist z. B.:

$$U^0 = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda}}{\lambda!\;\lambda!}\; S\,\frac{1}{\lambda}$$

$$= -\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1!\;1!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{2!\;2!}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{3!\;3!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$+ \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{4!\;4!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

$$- \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{5!\;5!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) + - \cdots.$$

Nun ist:

$$J^2(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{2+2\lambda}}{\lambda!\;(2+\lambda)!}$$

$$= \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{0!\;2!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1!\;3!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{2!\;4!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{3!\;5!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{4!\;6!} - + \cdots$$

Wir suchen nun die Fakultäten in der Entwicklung für $U^0(x)$ in Einklang zu bringen mit denjenigen in $J^2(x)$ und schreiben zu dem Zwecke:

$$U^0(x) = -\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{0!\;2!}\,2! + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1!\;3!}\,\frac{1!\;3!}{2!\;2!}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{2!\;4!}\,\frac{2!\;4!}{3!\;3!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{3!\;5!}\,\frac{3!\;5!}{4!\;4!}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)-+\cdots$$

$$= -\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{0!\;2!}\,2 + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1!\;3!}\,\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{2!\;4!}\,\frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)$$

$$+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{3!\;5!}\,\frac{5}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)$$

$$-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{4!\;6!}\,\frac{6}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

$$= -2\,J^2(x) + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1!\;3!}\cdot\frac{1}{4} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{2!\;4!}\,\frac{4}{9}$$

$$+\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{3!\;5!}\,\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{3}+\frac{5}{4}\right)$$

$$-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{4!\;6!}\,\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{5}\right)+\cdots;$$

ferner ist:

$$J^4(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\frac{(-1)^\lambda\left(\frac{x}{2}\right)^{4+2\lambda}}{\lambda!\;(4+\lambda)!} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{0!\;4!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1!\;5!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{2!\;6!}$$

$$-\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{3!\;7!}+-\cdots,$$

daher

$$U^0(x) = -2\,J^2 + J^4 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1!\;5!}\,\frac{1}{9} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{2!\;6!}\,\frac{5}{24} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{3!\;7!}\,\frac{59}{200} + - \cdots$$

$$J^6(x) = \sum_{\lambda=0}^{\gamma=\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{6+2\lambda}}{\lambda!\;(6+\lambda)!} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{0!\;6!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{1!\;7!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{2!\;8!} - + \cdots,$$

also:

$$U^0(x) = -2\,J^2(x) + J^4(x) - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{0!\;6!}\,\frac{2}{3} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{1!\;7!}\,\frac{35}{48} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{2!\;8!}\,\frac{8}{3}\,\frac{59}{200} + - \cdots,$$

$$= -2\,J^2(x) + J^4(x) - \frac{2}{3}\,J^6(x) + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{1!\;7!}\,\frac{3}{48} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{2!\;8!}\,\frac{3}{25} + - \cdots,$$

$$J^8(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda \left(\frac{x}{2}\right)^{8+2\lambda}}{\lambda!\;(8+\lambda)!} = \frac{8}{0!\;8!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{1!\;9!} + - \cdots,$$

$$U^0(x) = -2\,J^2(x) + J^4(x) - \frac{2}{3}\,J^6(x) + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^8}{0!\;8!}\,\frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{1!\;9!}\,\frac{27}{50} + - \cdots,$$

$$= -2\,J^2(x) + J^4(x) - \frac{2}{3}\,J^6(x) + \frac{1}{2}\,J^8(x) - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{1!\;9!}\cdot\frac{1}{25} + - \cdots,$$

$$J^{10}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{(-1) \left(\frac{x}{2}\right)^{10+2\lambda}}{\lambda!\;(10+\lambda)!} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{10}}{0!\;10!} - + \cdots$$

Also:

$$U^0(x) = -2J^2(x) + J^4(x) - \frac{2}{3}J^6(x) + \frac{1}{2}J^8(x) - \frac{2}{5}J^{10}(x) + - \cdots,$$

$$U^0(x) = -2\left\{J^2(x) - \frac{1}{2}J^4(x) + \frac{1}{3}J^6(x) - \frac{1}{4}J^8(x) + \frac{1}{5}J^{10}(x)\right.$$
$$\left. - \frac{1}{6}J^{12}(x) + \cdots\right\}. \qquad (76)$$

Diese Reihe entspricht vollständig der auf Seite 34 zitierten Entwicklung für $E^0(x)$, wie sie zuerst von Neumann angegeben wurde. Die elegante Reihe lässt sich auch in folgender Form schreiben:

$$U^0(x) = -4\left\{\frac{2J^2(x)}{2\cdot 2} - \frac{4J^4(x)}{4\cdot 4} + \frac{6J^6(x)}{6\cdot 6} - \frac{8J^8(x)}{8\cdot 8}\right.$$
$$\left. + \frac{10J^{10}(x)}{10\cdot 10} - + \cdots\right\}. \qquad (77)$$

In gleicher Weise findet man durch successives Ausrechnen:

$$U^1(x) = J^1(x) - \frac{3}{2}J^3(x) + \frac{5}{6}J^5(x) - \frac{7}{12}J^7(x) + \frac{9}{20}J^9(x)$$
$$- \frac{11}{30}J^{11}(x) + \cdots$$
$$= k_1 J^1(x) - 4\left\{\frac{3\cdot J^3(x)}{2\cdot 4} - \frac{5J^5(x)}{4\cdot 6} + \frac{7J^7(x)}{6\cdot 8} - \frac{9J^9(x)}{8\cdot 10}\right.$$
$$\left. + \frac{11J^{11}(x)}{10\cdot 12} - + \cdots\right\}. \qquad (78)$$

Ebenso findet man:

$$U^2(x) = k\ \ J^2(x) - 4\left\{\frac{4\cdot J^4(x)}{2\cdot 6} - \frac{6J^6(x)}{4\cdot 8} + \frac{8\cdot J^8(x)}{6\cdot 10} - \frac{10J^{10}(x)}{8\cdot 12} + \cdots\right\}$$

— — — — — — — — — — — — — — —

$$U^n(x) = k\ \ J^n(x) - 4\left\{\frac{(n+2)J^{n+2}(x)}{2(2n+2)} - \frac{(n+4)J^{n+4}(x)}{4(2n+4)}\right.$$
$$\left. + \frac{(n+6)J^{n+6}(x)}{6(2n+6)} - + \cdots\right\}. \qquad (79)$$

Dabei ist $k_n = S\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$ und da $S\frac{1}{n} = 0$ ist für $n = 0$, so hat die Formel auch für $U^0(x)$, also allgemein Gültigkeit. Diese Formeln stimmen vollständig überein mit denen von C. Neumann,[29]) die ich Seite 35 schon zitiert habe.

Die Koëffizienten kann man in 2 Teile zerlegen. So ist z. B. in der Entwicklung für $U^1(x)$:

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1; \quad \frac{5}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6}; \quad \frac{7}{12} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12}; \text{ etc.}$$

Man kann daher schreiben:

$$U^1(x) = J^1(x) - J^3(x) - \frac{1}{2} J^3(x) + \frac{1}{2} J^5(x) + \frac{1}{3} J^5(x) - \frac{1}{3} J^7(x) - \frac{1}{4} J^7(x).$$

Nach der Relation $J^n(x) = (-1)^n J^{-n}(x)$ ist aber:

$$-\frac{1}{2} J^3(x) = \frac{1}{2} J^{-3}(x); \quad \frac{1}{3} J^5(x) = -\frac{1}{3} J^{-5}(x); \quad -\frac{1}{4} J^7(x) = \frac{1}{4} J^{-7}(x), \text{ etc.,}$$

daher:

$$U^1(x) = J^1(x) - J^3(x) + \frac{1}{2} J^5(x) - \frac{1}{2} J^7(x) + - \cdots$$
$$+ \frac{1}{2} J^{-3}(x) - \frac{1}{3} J^{-5}(x) + \frac{1}{4} J^{-7}(x) - + \cdots$$

Oder als Summenformel geschrieben:

$$U^1(x) = J^1(x) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda} (-1)^\lambda J^{1+2\lambda} + \sum_{\lambda=1+1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda} J^{1-2\lambda}. \tag{80}$$

Da die vorige Entwicklung allgemein gilt, so hat auch diese allgemeine Gültigkeit; daher:

$$U^n(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} J^n(x) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda} J^{n+2\lambda}(x) + \sum_{\lambda=n+1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda} J^{n-2\lambda}(x). \tag{81}$$

In dieser Form ist die Entwicklung zuerst von L. Schläfli[30]) für die E-Funktion aufgestellt worden.

Er ist dabei nicht auf diesem induktivem Wege vorgegangen, sondern benutzte die Differentialgleichung als Ausgangspunkt.

Nach Gleichung (66) gilt:

$$x^2 \frac{\partial^2 U^n(x)}{\partial x^2} + x \frac{\partial}{\partial x} U^n(x) + (x^2 - n^2)\, U^n(x) = -2x\, J^{n+1}(x).$$

---

[29]) C. Neumann, Bessel'sche Funktionen, Seite 52.

[30]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III, Seite 146.

Man setze nun:

$$U^n(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \; J^{n+2m}(x)$$

und substituiere diesen Wert in der Differentialgleichung; dann ist:

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \; x^2 \frac{\partial^2 J^{n+2m}(x)}{\partial x^2} + \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \; x \frac{\partial J^{n+2m}(x)}{\partial x}$$

$$+ \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \,(x^2 - n^2)\; J^{n+2m}(x) = - 2x \, J^{n+1}(x).$$

Nun genügt aber die Funktion $J^{n+2m}(x)$ der Differentialgleichung:

$$x^2 \frac{\partial^2 J^{n+2m}(x)}{\partial x^2} + x \frac{\partial J^{n+2m}(x)}{\partial x} + (x^2 - (n+2m)^2)\, J^{n+2m}(x) = 0.$$

Wird das Summationszeichen vor die einzelnen Terme gesetzt und die Gleichung von der obern subtrahiert, so folgt:

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \,(4mn + 4m^2)\, J^{n+2m}(x) = - 2x \, J^{n+1}(x)$$

$$J^{n+1}(x) = - \frac{2}{x} \sum_{m=1}^{m=\infty} m\,(n-m)\; A_m \; J^{n+2m}(x)$$

$$= - \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{m\,(n+m)}{n+2m} \; A_m \; (J^{n+2m+1}(x) + J^{n+2m-1}(x)).$$

A_m lässt sich nun bestimmen, indem man die Entwicklung ausführt und beidseitig die gleich hohen Potenzen von x herausgreift.

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+3}}{1!\,(n+2)!} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+5}}{2!\,(n+3)!} - + \cdots$$

$$= - \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{m\,(n+m)}{n+2m} \; A_m \left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m+1}}{(n+2m+1)!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m+3}}{1!\,(n+2m+2)!} + - \cdots \right]$$

$$- \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{m\,(n+m)}{n+2m} \; A_m \left[\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m-1}}{(m+2n-1)!} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m+1}}{1!\,(n+2m)!} + - \cdots \right].$$

Daraus folgt nun

$$A_m = (-1)^m \frac{n+2m}{m\,(n+m)}.$$

Wird dieser Wert in der Setzung für $U^n(x)$ substituiert, so hat man endlich:

$$U^n(x) = A\ J^n(x) + \sum_{m=1}^{m=\infty} (-1)^m \frac{n+2m}{m\,(n+m)} J^{n+2m}(x).$$

A_0 ergiebt sich aus der ursprünglichen Summenformel für $U^n(x)$:

$$U^n(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)\ S \frac{1}{n+\lambda} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\lambda}}{\lambda!\,(n+\lambda)!},$$

$$A_0 = S\frac{1}{n} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{1}{\lambda}.$$

Man hat demnach:

$$U^n(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{1}{\lambda} J^n(x) + \sum_{n=1}^{\lambda=\infty} (-1) \frac{n+2\lambda}{\lambda\,(n+\lambda)} J^{n+2\lambda}(x).$$

$$= \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{1}{\lambda} J^n(x) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{1}{\lambda} J^{n+2\lambda}(x) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda}{n+\lambda} J^{n+2\lambda}(x).$$

In der zweiten Summe setze man $\lambda = \lambda - n$, dann wird:

$$U^n(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{1}{\lambda} J^n(x) + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda} J^{n+2\lambda}(x) + \sum_{\lambda=n+1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda} J^{n-2\lambda}(x),$$

was die Formel (81) ist.

L. Schläfli[31]) hat übrigens noch einen andern direkten Weg angegeben, um sowohl die Funktion $T^n(x)$ als auch $U^n(x)$ nach Bessel'schen Funktionen erster Art zu entwickeln.

---

[31]) L. Schläfli, Mathem. Annalen III S. 146.

Errata.

Seite 4,	4.	Zeile von unten soll es heissen O^3 statt O^2.
» 4,	3.	» » » » » » $\frac{5}{x^2}$ » $\frac{5}{x^5}$.
» 5,	11.	» » » » » » C. Neumann statt G. N.
» 20,	2.	» » » heisst der Faktor $(2\lambda—n—1)$ statt $(2\lambda—n)$.
» 22,	1.	» » oben » » Exponent $2\lambda—n—2$ statt $2\lambda—n—1$.
» 22,	3.	» » » muss das π am Schluss bei $\cos^2\frac{n+1}{2}$ stehen.
» 23,	8.	» » » » am Schluss stehen $+\frac{2n}{x}O^n(x)$ statt $-\frac{2n}{x}O^n(x)$.
» 23,		bei Formel 47 setze man $S^{n-1}(x)$ statt S^{n-1}.
» 25,	6.	Zeile von oben lies 49 statt 47.
» 25,	7.	» » » streiche man $(-1)^{\frac{n}{2}}$ und lasse am Schlusse bei dem x die Klammern weg.
» 25,	9.	» » » setze man 1 statt $(-1)^{\frac{n}{2}}$.
» 25,	11.	} » » » lasse $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ weg!
» 25,	13.	}
» 30,	7.	» » » setze man $S\frac{1}{n+\lambda-1}$ statt $S^{n+\lambda-1}$.
» 30,	8.	» » » $+$ statt $=$.
» 32,	8.	» » unten, (57.) statt (59.)
» 33,	2.	» » oben, $\cos^2\frac{(n+1)\pi}{2}$ statt $\cos^2\frac{(n-1)\pi}{2}$.
» 38,	2.	» » unten zuletzt, $=$ statt $—$.
» 38,		Anmerkung, $=$ statt $—$.
» 39,	5.	} Zeile von oben, $\frac{n+1}{2}$ statt $\frac{n-1}{2}$.
» 39,	8.	}
» 39,	11.	}
» 39,	14.	}
» 42,	8.	Zeile von unten, $\omega = \frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2}$ statt $\omega = \frac{\pi}{2} - \Theta$.
» 44,	8.	» » oben, $T^1(x)$ statt $T^n(x)$.
» 45,	2.	» » » lies statt des 2ten $J^{n+1}(x)$ $J^{n-1}(x)$.
» 45,	8.	» » » streiche λ.