Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern
Band: - (1898)
Heft: 1451-1462

Artikel: Zur kubischen Gleichung

Autor: Sidler, G.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319100

Dr. G. Sidler.

Zur kubischen Gleichung.

(Vorgetragen den 12. November 1898.)

Von der kubischen Gleichung

$$x^3 + 3\,p\,x + 2\,q = 0 \tag{1.}$$

habe man, z. B. mittelst der Regula falsi, eine Wurzel $x = \alpha$ erhalten, so genügen die zwei andern Wurzeln β und γ den Relationen

$$\beta + \gamma = -\alpha \quad . \quad \beta\,\gamma = -\frac{2\,q}{\alpha}.$$

Es sind also β und γ die Wurzeln der Gleichung

$$z^2 + \alpha\,z - \frac{2\,q}{\alpha} = 0,$$

und wir finden

$$\left.\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\} = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha^3 + 8\,q}{\alpha}}.$$

Aber $\alpha^3 + 3\,p\,\alpha + 2\,q = 0$, also $8\,q = -4\,\alpha^3 - 12\,p\,\alpha$, und wir haben auch

$$\left.\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\} = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3\,(\alpha^2 + 4\,p)}. \tag{2.}$$

Es seien p und q reell, so können wir auch α stets als reell voraussetzen. Dann wissen wir aber durch die Cardanische Formel, dass β und γ reell oder complex conjugiert sind, je nachdem $q^2 + p^3$ negativ oder positiv ist. Vergleichen wir damit den Ausdruck 2), so muss $\alpha^2 + 4\,p$ gleiches Zeichen haben wie $q^2 + p^3$.

Um dies zu zeigen, schreiben wir

$$\alpha^2 + 4\,p = \varepsilon.$$

Nun ist $\alpha^3 + 3\,p\,\alpha + 2\,q = 0$, d. h. $\alpha\,.\,\varepsilon - p\,\alpha + 2\,q = 0$ oder

$$\alpha = -\frac{2\,q}{\varepsilon - p}.$$

Diesen Ausdruck für α setzen wir in $\alpha^2 + 4\,p = \varepsilon$ ein, und erhalten so

$$\varepsilon^3 - 6\,p\,\varepsilon^2 + 9\,p^2\,\varepsilon - 4\,p^3 - 4\,q^2 = 0,$$

d. h. $\varepsilon \,.\, (\varepsilon - 3\,p)^2 = 4\,(q^2 + p^3)$, oder

$$\varepsilon = \frac{4\,(q^2 + p^3)}{(\varepsilon - 3\,p)^2}.$$

Führen wir hier für ε wieder $\alpha^2 + 4\,p$ ein, so kommt

$$\alpha^2 + 4\,p = \frac{4\,(q^2 + p^3)}{(\alpha^2 + p)^2},$$

und der Ausdruck 2) von β und γ wird schliesslich:

$$\left.\begin{matrix}\beta\\ \gamma\end{matrix}\right\} = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{-3\,(q^2 + p^3)}}{\alpha^2 + p}. \qquad (3.)$$

Hier erkennt man unmittelbar, dass β und γ reell sind, wenn $q^2 + p^3$ negativ ist, und dass β und γ complex conjugiert, wenn $q^2 + p^3$ positiv ist.