Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Band: - (1900)

Heft: 1478-1499

Artikel: Die Definitionen der Bernoullischen Funktion und Untersuchung der Frage, welche von denselben für die Theorie die zutreffendste ist : historisch-kritisch beleuchtet

Kapitel: Folgerungen

Autor: Renfer, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319106

V. Folgerungen.

§ 29. Zusammenhang der verschiedenen Definitionen.

Wir geben vorerst eine Übersicht der Definitionen, die wir einlässlich betrachtet haben; alle übrigen können ja aus denselben hergeleitet werden; deshalb führen wir dieselben auch bei den Vergleichungen der einzelnen Funktionen nicht an.

Es waren

$$B''(x) = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{1}{2}x^{2n} + \frac{1}{2}\binom{2n}{1}B_1 x^{2n-1} - \frac{1}{4}\binom{2n}{3}B_2 x^{2n-3} + - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\binom{2n}{2n-1}B_n x. \quad (1)$$

$$B'(x) = \frac{x^{2n+2}}{2n+2} - \frac{1}{2}x^{2n+1} + \frac{1}{2}\binom{2n+1}{1}B_1 x^{2n} - \frac{1}{4}\binom{2n+1}{3}B_2 x^{2n-2} + - \cdots\cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n}\binom{2n+1}{2n-1}B_n x^2. \quad (2)$$

Die Reihen brechen ab mit dem Glied in x^2 oder x, je nachdem n eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

$$\varphi(x, n) = x^n - \frac{1}{2}n x^{n-1} + \binom{n}{2}B_1 x^{n-2} - \binom{n}{4}B_2 x^{n-4} + \binom{n}{6}B_3 x^{n-6} - + \cdots\cdots\cdots \quad (3)$$

Hier bricht die Reihe ab mit dem Gliede in x^2 oder x, je nachdem n gerade oder ungerade ist.

$$\chi(n, x) = \frac{1}{n!}\left\{x^n - \frac{n}{2}x^{n-1} + \sum_{\lambda=1} (-1)^{\lambda-1}\binom{n}{2\lambda}B_\lambda x^{n-2\lambda}\right\} \quad (4)$$

Die Reihe bricht von selbst ab infolge von $\binom{n}{2\lambda}$.

$$B_n(x) = \frac{x^n}{n} - \frac{1}{2}x^{n-1} + \frac{n-1}{2!}B_1 x^{n-2} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}B_2 x^{n-4} + - \cdots\cdots \quad (5)$$

Die Reihe schliesst mit dem Gliede in x^2 oder x für ein gerades oder ungerades n.

$$A_n(x) = \frac{1}{n}\left\{x^n - \frac{1}{n}\, n\, x^{n-1} + \binom{n}{2} B_1 x^{n-2} - \binom{n}{4} B_2 x^{n-4} + \cdots\right\} \tag{6}$$

Der Exponent von x darf nie negativ werden.

Die einzelnen Definitionen können wir in zwei Gruppen teilen; die eine Gruppe enthält die Definition von Raabe, diejenige von Schlömilch und die erste von Glaisher, also die Funktionen $B(x)$, $\varphi(x, n)$ und $B_n(x)$. Es sind dies alles Funktionen, bei welchen kein von x freier Term vorkommen darf. Die zweite Gruppe enthält die Funktionen, welche einen selbständigen, von x freien Ausdruck aufweisen; es sind dies alle übrigen, also die Funktionen von Glaisher und von Schläfli, nämlich $A_n(x)$, $A'_n(x)$, $V_n(x)$, $U_n(x)$ und $\chi(n, x)$.

Sämtliche Funktionen stehen mit denjenigen der gleichen Gruppe in engem Zusammenhang; etwas komplizierter sind die Beziehungen der Definitionen der einen Gruppe zu denjenigen der andern Gruppe; wir erhalten folgende Beziehungen, welche den Zusammenhang der einzelnen Definitionen veranschaulichen:

I. Gruppe:

$$B''(x) = \frac{\varphi(x, 2m+1)}{2m+1}; \qquad B'(x) = \frac{\varphi(x, 2m+2)}{2m+2}. \tag{7}$$

$$B''(x) = B_{2m+1}(x); \qquad B'(x) = B_{2m+2}(x). \tag{8}$$

$$\varphi(x, n) = n\, B_n(x). \tag{9}$$

II. Gruppe:

$$\chi(n, x) = \frac{1}{(n-1)!} A_n(x); \qquad A_n(x) = (n-1)!\; \chi(n, x). \tag{10}$$

III. Gruppen gegenseitig:

$$B'(x) = (2n+1)!\; \chi(2n+2, x) + (-1)^{n+1} \frac{B_{n+1}}{2n+2}. \tag{11}$$

$$B''(x) = (2n)!\; \chi(2n+1, x). \tag{12}$$

$$B'(x) = A_{2n+2}(x) - A_{2n+2}(0); \qquad B''(x) = A_{2n+1}(x). \tag{13}$$

$$\varphi(x, 2n) = (2n)!\, \chi(2n, x) + (-1)^n B_n;$$

$$\varphi(x, 2n+1) = (2n+1)!\; \chi(2n+1, x). \tag{14}$$

$$\varphi(x, 2n) = 2n\, A_{2n}(x) + (-1)^n B_n; \quad \varphi(x, 2n+1) = (2n+1) A_{2n+1}(x). \tag{15}$$

Aus den obigen Beziehungen lassen sich die Werte für die übrigen Formeln durch einfache algebraische Umwandlung finden.

Gestützt auf die Tabellen I—IV (Seite 92—95), wo die Werte der für unsere Betrachtungen wichtigsten Definitionen für die einzelnen Argumente zusammengestellt sind, können wir obige Beziehungen auf ihre Richtigkeit prüfen.

§ 30. Vergleichung der einzelnen Definitionen.

A. Betreffs ihrer Herleitung.

Die Herleitungen der einzelnen Definitionen der Bernoullischen Funktion sind sehr verschieden. Überblicken wir alle, so erkennen wir bald, dass die einfachste und eleganteste Herleitung der Definitionsgleichung von Schläfli stammt, der ohne alle Umwege zu derselben gelangt. Zudem steht dieselbe mit der Fundamentalgleichung der Bernoullischen Zahlen in innigem Zusammenhang; dies bietet uns daher den Vorteil, dass wir aus *einer* Grundgleichung sowohl die Bernoullischen Funktionen, als auch die Bernoullischen Zahlen ohne grosse Schwierigkeit herleiten können; diese Gleichung nennen wir die «*Fundamentalgleichung der Bernoullischen Funktionen und der Bernoullischen Zahlen*»; dieselbe lautet

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{S_m\, y^{m+1}}{m!} = \frac{y\, e^{xy}}{e^y-1} - \frac{y}{e^y-1}; \tag{16}$$

der erste Bruch rechts führt auf die Bernoullischen Funktionen, der zweite dagegen auf die Bernoullischen Zahlen.

Keine der übrigen Definitionen zeigt diesen Zusammenhang; bei all denselben braucht es grösserer Umwandlungen und längerer Rechnungen, bis wir auf die gewünschte Definitionsgleichung gelangen.[63])

B. Betreffs der Derivierten.

Stellen wir die *einfachen Ableitungen* der verschiedenen Definitionen zusammen, so ergibt sich, dass die Ableitungen der Funktionen nach Raabe und nach Schlömilch eine unerwünschte Komplikation durch den Hinzutritt einer Bernoullischen Zahl für die ungerade Bernoullische Funktion zeigen. Die Definition nach Glaisher weist zwar nur *eine* Formel auf; dagegen tritt vor die Ableitung noch ein Faktor, während bei der Schläflischen Definition die Derivierte einer Bernoullischen Funktion wieder eine reine Bernoullische Funktion ist; letztere Definition ist somit die bequemste.

Was die *mehrfachen Ableitungen* anbetrifft, so lassen sich diejenigen der Raabeschen Definition nicht darstellen, weil dort der

Exponent nur ungenügend angedeutet wird im Funktionssymbol. Ein Vergleich der übrigen zeigt, dass bei der Schlömilchschen Definition verschiedene Formeln nötig sind zur Darstellung der geraden oder ungeraden wiederholten Ableitungen der geraden oder ungeraden Bernoullischen Funktion. Bei Glaishers Definition fallen die unbequemen Bernoullischen Zahlen weg; ebenso ist zur Darstellung all der Ableitungen nur noch eine Formel nötig; doch zeigt dieselbe zwei vorgesetzte komplizierende Faktoren. Schläflis Definition ist auch hier die einfachste, da die wiederholten Ableitungen derselben stets reine Bernoullische Funktionen sind.[64])

C. In Bezug auf die Integraldarstellungen.

Das von den Derivierten Gesagte gilt ebenfalls von den *einfachsten Integralen,* da dieselben ja nur Umkehrungsfunktionen ersterer sind. Auch die *übrigen* Integraldarstellungen sprechen betreffs ihrer Einfachheit zu gunsten der Definition von Schläfli, da selbst die entsprechenden Formeln der Definition von Glaisher meist einen vorgesetzten Faktor mehr enthalten.[65])

D. In Bezug auf die Funktion mit inversem Argument.

Die Formeln dafür lauten bei allen Definitionen gleich; ihre Herleitungen sind aber sehr verschieden. Raabe geht zur Ableitung seiner obigen Formel ziemlich weit auf seine einleitenden Untersuchungen zurück; Glaisher stützt sich auf die Definitionssummenformeln des Sinus und Cosinus und stellt die beiden gefundenen Formeln zu einer allgemeinern zusammen. Sehr elegant und kurz sind die Herleitungen von Schlömilch und von Schläfli, wobei Schläfli mit Vorteil die Koeffizientenvergleichung verwendet.[66])

E. Betreffs der Funktion mit negativem Argument.

Es geben auch hierin alle Funktionen ziemlich ähnliche Werte, mit Ausnahme der symbolischen Darstellungsweise von Glaisher. Der Nenner im zweiten Term des Ausdruckes für die $\chi(n, -x)$-Funktion ist keine wesentliche Erschwerung, da die andern Definitionen, mit Ausnahme derjenigen von Raabe, auch einen vorgesetzten Faktor aufweisen.[67])

F. Betreffs andrer Formeln.

Wir haben bei den Definitionen von Raabe und Schlömilch mehr als bei den beiden andern näher betrachteten Funktionen die gerade und die ungerade Bernoullische Funktion trennen müssen; die Definitionen von Glaisher und von Schläfli sind daher allgemeiner gehalten, und es ist das dem Umstande zuzuschreiben, dass die beiden ersten Definitionen kein von der Variabelen freies Glied enthalten dürfen; dies ist auch der Grund, dass bei den Differentialquotienten und Integraldarstellungen dieser Funktionen die lästigen Zusatzglieder mit den Bernoullischen Zahlen auftreten. Die Formeln, welche eine Summe von aufeinanderfolgenden Bernoullischen Funktionen darstellen, entscheiden wieder zu Gunsten der Funktionen von Glaisher und von Schläfli, da dieselben nur je *eine* Formel aufweisen, während die übrigen auch hierbei einen Unterschied zwischen geraden und ungeraden Bernoullischen Funktionen machen müssen. Die entsprechenden Formeln dieser Summe bei Glaisher und bei Schläfli sind ganz von gleicher Form; schon ihre Herleitung ist ziemlich ähnlich, da beide durch Koeffizientenvergleichung aus Entwicklungen nach Bernoullischen Funktionen zum Ziele gelangen. Glaisher zeigte im Laufe seiner Untersuchungen, also nicht etwa als Ausgangspunkt derselben, dass die $A_n(x)$-Funktionen sich geben lassen als

$$\left[\frac{a^n}{(n-1)!}\right] \text{ in } a\,\frac{e^{ax}}{e^a-1}.$$

Er kommt zu dieser Thatsache, wie wir gesehen, auf ziemlich umständliche Art und Weise, ausgehend von einer Formel, die selbst eine sehr komplizierte Herleitung aufweist; zudem ist seine Bernoullische Funktion kein reiner Koeffizient der Potenz von a, da stets im Nenner eine Fakultät sein muss. Schläfli aber geht direkt von dieser Entwicklung aus, indem er definiert

$$\chi(n, x) = n^{te} \text{ Bernoullische Funktion} = [y^n] \text{ in } y\,\frac{e^{xy}}{e^y-1}.$$

Diese Entwicklung bildet also seinen Ausgangspunkt, auf welchen sich alle Untersuchungen stützen; daher gestaltet sich seine Theorie der Bernoullischen Funktion viel einheitlicher und ist derjenigen von Glaisher überlegen.[66])

G. Betreffs Entwicklung in Reihen.

Alle Definitionen lassen sich leicht als trigonometrische Reihen darstellen und zwar die geraden Bernoullischen Funktionen als Cosinusreihen und die ungeraden als Sinusreihen.

Raabe und Glaisher gelangen durch fortgesetzte Differentiation der bekannten Reihe für $\pi\left\{\frac{1}{2} - x\right\}$,[68]) woraus successive die einzelnen Bernoullischen Funktionen entstehen, zu ihren diesbezüglichen Resultaten.

Elegant leitet Schlömilch, wie gesehen, seine Reihen her, gestützt auf die Fourierschen Reihen und Integrale. Genau auf dieselbe Weise würden wir auch bei den übrigen drei Definitionen zum Ziele gelangen; das Ziel würde zudem noch eher erreicht, da die aufgestellten Integralformeln das zu lösende Integral, welches die Koeffizienten der Fourierschen Entwicklung darstellt, mit geringer Mühe auswerten.[65])

Höchst interessant und wichtig ist die Herleitung dieser Formeln nach Schläfli, der gestützt auf die Theorie der Eulerschen Integrale und der Gammafunktion eine Reihenentwicklung so transformiert, bis er schliesslich zu den entsprechenden Beziehungen gelangt. Seine Resultate bieten den grossen Vorteil, dass sie nur Spezialwerte sind einer von ihm selbst aufgestellten Hauptformel

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{e^{i\left(2\lambda\pi\Theta-\frac{n\pi}{2}\right)}}{\lambda^n}$$

$$= (2\pi)^n \int_0^1 \left\{\chi(n,\varphi)-\chi(n,\Theta)\right\} \frac{1}{2}\left[1+i\operatorname{cotg}(\varphi-\Theta)\pi\right] d\varphi. \quad (17)$$

Durch Trennung der reellen von der imaginären Komponente erhält er die beiden ganz allgemeinen Formeln

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi\Theta-\frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n} = -\frac{(2\pi)^n}{2}\chi(n,\Theta) \quad \text{und} \quad (18)$$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\left(2\lambda\pi\Theta-\frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n}$$

$$= (2\pi)^n \int_0^1 \left\{\chi(n,\varphi)-\chi(n,\Theta)\right\} \operatorname{cotg}\pi(\varphi-\Theta)\, d\varphi. \quad (19)$$

Aus Formel (18) resultieren dann die wichtigen trigonometrischen Summenformeln

$$\chi(2m,x) = (-1)^{m-1}\frac{2}{(2\pi)^{2m}}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{\cos 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m}} \quad \text{und} \quad (20)$$

$$\chi(2m+1, x) = (-1)^{m-1} \frac{2}{(2\pi)^{2m+1}} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m+1}}. \tag{21}$$

Bei dieser Definition haben wir, wie sonst bei keiner andern, ursprünglich alle diese Reihenentwicklungen in derselben Formel vereinigt, was sehr zu Gunsten dieser Definition spricht.

Wir haben auch schon erwähnt, dass mit Hülfe dieser Funktion als Reihenentwicklung Schläfli die *Raabesche Restformel* herleitet und ebenso den Zusammenhang derselben mit der *Riemannschen Reihe* nachweist; es sind dies Beziehungen, welche die Allgemeinheit der Schläflischen Definition trefflich beleuchten. [69])

H. Betreffs Entwicklungen nach Bernoullischen Funktionen.

Entwicklungen, in welchen die Bernoullischen Funktionen als Koeffizienten auftreten, lassen sich aus jeder Definition herleiten; aber nur bei Schläfli sind die Bernoullischen Funktionen reine Koeffizienten solcher Entwicklungen; auch hier liefert diese Definition die einfachsten Formeln. [70])

§ 31. Diskussion der „Bernoullischen Funktion."

Unsere früher hergeleiteten Reihenentwicklungen der Bernoullischen Funktion haben gezeigt, dass dieselben nur gültig sind für $0 < x < 1$ [71]); deshalb haben wir in unsern Untersuchungen hauptsächlich das Intervall $x = 0$ bis $x = 1$ berücksichtigt, wohl aber auch Gleichungen aufgestellt, um den Verlauf der Funktion ausserhalb dieses Intervalles kennen zu lernen. [72]) Gestützt auf diese Beziehungen hat sich uns die Frage aufgedrängt, wie weit sich das Konvergenzgebiet für die verschiedenen Definitionen überhaupt erstrecke. Um diese Frage zu entscheiden, stellen wir die Funktionen graphisch dar. Wir tragen die Werte für das Argument x (z) als Abscissen auf und die zugehörigen Funktionswerte y als Ordinaten; die einzelnen Werte sind in den Tabellen I—IV zusammengestellt; den Verlauf der verschiedenen Funktionen zeigen die Tabellen V—VIII.

1. Die Bernoullischen Funktionen ersten Grades. Dieselben stellen bei allen Definitionen eine Gerade dar; bei der Definition von Raabe, wie auch bei derjenigen von Schlömilch ist diese Gerade die Winkelhalbierende durch den ersten und dritten Quadranten, geht also durch den Ursprung; bei den Definitionen von Glaisher und Schläfli schneidet sie die Abscissenaxe im Punkte $x = \frac{1}{2}$, aber ebenfalls unter einem Winkel von 45^0.

2. Die Bernoullischen Funktionen zweiten Grades. Dieselben stellen eine gewöhnliche Parabel dar, und zwar ist die Parallele zur Ordinatenaxe durch den Punkt $x = \frac{1}{2}$ die Hauptaxe der Parabel mit dem Parameter $p = \frac{1}{4}$. Bei den Definitionen von Raabe und von Schlömilch schneidet diese Parabel die Abscissenaxe in den beiden Punkten $x = 0$ und $x = 1$, bei den andern Definitionen innerhalb dieses Intervalles. Dass dem so ist, beweist die Untersuchung einer einzelnen Funktion, da das Verfahren bei allen dasselbe ist; wir wählen dazu diejenige von Schläfli

$$\chi(2, x) = y = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}.$$

$$12\, y = 6x^2 - 6x + 1.$$

Transformieren wir diese Gleichung durch $x = x' + \frac{1}{2}$ und $y = y' - \frac{1}{24}$, so werden $y' = \frac{1}{2} x'^2$ und $p = \frac{1}{4}$; durch ähnliche Transformation der übrigen Definitionen gelangen wir stets auf dieselbe Gleichung.

3. Die Bernoullischen Funktionen höheren Grades. Alle diese Funktionen stellen *Parabeln höheren Grades* dar, da zu einem einzigen Werte von y stets mehrere Werte von x gehören; der Grad steigt mit dem Exponenten des ersten Gliedes. Im Intervall von 0 bis 1 weisen dieselben entweder ein Maximum oder ein Minimum oder beide zugleich auf, und es verlaufen die n^{te} und die $(n+4)^{te}$ Funktion entsprechend.

Es besitzen die Funktionen mit *geradem Exponenten* $n = 2, 6, 10, \ldots\ldots, (4\lambda - 2)$ ein *Minimum* bei $x = \frac{1}{2}$ und gehen auf beiden Seiten der Ordinatenaxe mit positiven Funktionswerten ins Unendliche, während die Funktionen für $n = 4, 8, 12, \ldots\ldots, 4\lambda$ ein *Maximum* bei $x = \frac{1}{2}$ aufweisen, beidseitig schwach negativ werden, um aber wieder mit beiden Ästen der Kurve mit positiven Funktionswerten ins Unendliche zu gehen.

Etwas abweichend davon verhalten sich die Kurven der Bernoullischen Funktionen mit *ungeraden Exponenten;* dieselben gehen sowohl mit positiven Funktionswerten auf positiver Seite der Ordinatenaxe ins Unendliche, als auch mit negativen auf negativer Seite. Alle diese Kurven ungeraden Grades schneiden die Abscissenaxe in den Punkten $0, \frac{1}{2}$ und 1, und es sind die Kurven für $n = 3, 7, 11, \ldots, (4\lambda - 1)$ im Intervall von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}$ *positiv* und von $x = \frac{1}{2}$ bis $x = 1$ *negativ;* von den Punkten $x = 0$ und $x = 1$ aus gehen sie absolut gleichwertig ins Unendliche. Für $n = 5, 9, 13, \ldots, (4\lambda + 1)$ nehmen die Funktionen zwischen $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}$ *negative* Werte an, zwischen $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$ dagegen *positive;* in kurzer Entfernung ausserhalb dieses Intervalles finden sich nochmals zwei Schnittpunkte mit der Abscissenaxe, worauf auch diese Kurven absolut gleichwertig ins Unendliche laufen.

Es interessiert uns nun zu wissen, wie sich die Kurven im Unendlichen verhalten; denn dass dort die zwei Äste der einzelnen Funktionskurven zusammenhangen, ist bekannt, da ja die Parabeln unikursale oder rationale Kurven sind und sich alle Punkte derselben darstellen lassen durch algebraische Funktionen eines variabelen Parameters.

Wir greifen, da alle Funktionen höhern Grades der verschiedenen Definitionen analoge Form haben, diejenigen von Schläfli heraus und untersuchen vorerst

A. Die ungerade Bernoullische Funktion. Wir wählen dazu

$$\chi(5, x) = y = \frac{x^5}{120} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^3}{72} - \frac{x}{720} \quad \text{oder}$$

$$6x^5 - 15x^4 + 10x^3 - x - 720y = 0.$$

Die Schnitte dieser Kurve mit der unendlich fernen Geraden erhalten wir, wenn wir die Gleichung mit z homogen machen durch die Formeln $x = \frac{x'}{z}$ und $y = \frac{y'}{z}$ und dann $z = 0$ setzen; diese Formeln vorerst eingesetzt, gibt, wenn zugleich mit z^5 multipliziert wird,

$$6x'^5 - 15x'^4z + 10x'^3z^2 - x'z^4 - 720y'z^4 = 0;$$

diese Gleichung wird für $z = 0$ zu $x'^5 = 0$, d. h., *die Kurve schneidet die unendlich ferne Gerade in der Richtung der positiven Ordinatenaxe in fünf zusammenfallenden Punkten.*

Zur nähern Untersuchung dieser zusammenfallenden Punkte im Unendlichen transformieren wir die unendlich ferne Gerade, welche wir parallel der Abscissenaxe annehmen können, ins Endliche, indem wir sie auf die Abscissenaxe projizieren; dazu dienen die Formeln

$$y = \frac{1}{y'} \text{ und } x = \frac{x'}{y'}; \text{ also } y' = \frac{1}{y} \text{ und } x' = \frac{x}{y}.$$

Für $y = \infty$ wird $y' = 0$, d. h.,

die unendlich ferne Gerade wird auf die Abscissenaxe projiziert und letztere ins Unendliche.

Durch die angedeutete Substitution entsteht, wenn mit y'^5 multipliziert wird,

$$6x'^5 - 15x'^4y' + 10x'^3y'^2 - x'y'^4 - 720y'^4 = 0. \qquad (\alpha)$$

Dies ist die Gleichung der transformierten Kurve; in dieser entspricht der Nullpunkt dem unendlich fernen Punkt der Ordinatenaxe der ursprünglichen Kurve.

Die Gleichung beginnt erst mit Gliedern vierten Grades; also ist der neue Nullpunkt O' ein vierfacher Punkt; die Tangenten in demselben erhalten wir durch Nullsetzen der Glieder niedrigsten Grades, also durch $y'^4 = 0$, was uns sagt, dass alle vier Tangenten des vierfachen Punktes mit der Abscissenaxe zusammenfallen. Für $y' = 0$ wird $x'^5 = 0$, d. h., die Abscissenaxe schneidet die Kurve im vierfachen Punkte O' in fünf zusammenfallenden Punkten.

Zur nähern Untersuchung der Kurve in der Nähe dieses vierfachen Punktes geben wir dem x' kleine Werte.

a) $x' =$ *positiv* $= 0{,}01$. Die Gleichung (α) geht dann über in

$$6 \cdot 0{,}01^5 - 15 \cdot 0{,}01^4 y' + 10 \cdot 0{,}01^3 y'^2 - 0{,}01\, y'^4 - 720\, y'^4 = 0;$$

da y' selbst klein ist, so können wir infolge der vierten und fünften Potenz, in denen das kleine x' vorkommt, die beiden ersten Glieder vernachlässigen; dann folgt, wenn durch y'^2 dividiert wird,

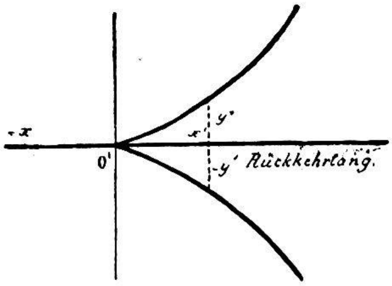
$$0{,}00001 = 720{,}01\, y'^2; \quad y' = \pm\sqrt{\frac{0{,}00001}{720{,}01}},$$

d. h., zu einem positiven kleinen x' gehören zwei reelle absolut gleichwertige, ein positives und ein negatives y'. Geben wir dem x' grössere positive Werte, so steigt der absolute Wert der y' ziemlich rasch.

b) $x' =$ *negativ* $= -0{,}01$. Für diesen Wert wird aus (α) unter Vernachlässigung der beiden ersten Glieder und durch Division durch y'^2

$$719{,}99\,y'^2 = -0{,}00001;\quad y' = \pm\sqrt{-\frac{0{,}00001}{719{,}99}} = \text{imaginär}.$$

Dies ergibt sich auch aus andern negativen Werten für x', somit folgt, dass auf der negativen Seite der Ordinatenaxe keine Kurvenpunkte liegen. Der neue Nullpunkt erscheint daher als ein vierfacher Punkt von der Art, dass die Kurve in ihm eine Spitze bildet, und die Abscissenaxe ist Rückkehrtangente in demselben mit fünffachem Berührungspunkt. Dasselbe gilt für den unendlich fernen Punkt der Ordinatenaxe der ursprünglichen Kurve; derselbe ist ein vierfacher Punkt der Parabel, in welchem alle vier Tangenten mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen; wir können den Punkt als *Rückkehrpunkt zweiter Ordnung* bezeichnen.



Da wir diese Ausführungen auch auf die Bernoullischen Funktionen höhern Grades ausdehnen können, bei welchen die vielfachen Punkte nur in höherem Grade der Vielfachheit auftreten, so ergibt sich der *Satz:*

Die ungeraden Bernoullischen Funktionen höhern, $(2m+1)^{ten}$ Grades, analytisch interpretiert, stellen Parabeln höhern Grades dar; bei denselben ist der unendlich ferne Punkt in der Richtung der positiven Ordinatenaxe ein $2m$-facher Punkt, in welchem alle $2m$ Tangenten mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen. Die Kurve bildet in ihm eine Spitze und die unendlich ferne Gerade ist Rückkehrtangente mit $(2m+1)$-fachem Berührungspunkt; der Punkt ist ein Rückkehrspunkt von der Ordnung m.

B. Die gerade Bernoullische Funktion. Etwas anders gestaltet sich der Verlauf dieser Funktion im Unendlichen. Zur Untersuchung wählen wir

$$\chi(4, x) = y = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - \frac{1}{720} \quad \text{oder}$$

$$30x^4 - 60x^3 + 30x^2 - 720y - 1 = 0.$$

Die Schnittpunkte mit der unendlich fernen Geraden werden gestützt auf die homogene Gleichung

$$30x'^4 - 60x'^3z + 30x'^2z^2 - 720y'z^3 - z^4 = 0,$$

für $z = 0$ $\qquad x'^4 = 0$, d. h.,

die unendlich ferne Gerade wird von der Kurve in vier zusammenfallenden Punkten geschnitten in der Richtung der positiven Ordinatenaxe.

Projizieren wir die unendlich ferne Gerade wieder durch die frühere Substitution auf die Abscissenaxe ins Endliche, so folgt, wenn mit y'^4 multipliziert wird,

$$30x'^4 - 60x'^3y' + 30x'^2y'^2 - y'^4 - 720y'^3 = 0. \qquad (\beta)$$

Dies ist die Gleichung der transformierten Kurve; da sie erst mit Gliedern dritten Grades beginnt, so ist der neue Nullpunkt O′ ein dreifacher Punkt; die Tangenten in demselben erhalten wir aus $y'^3 = 0$, d. h., alle drei Tangenten fallen in der Abscissenaxe zusammen, und diese berührt die Kurve in vier zusammenfallenden Punkten; also ist auch der unendlich ferne Punkt der Ordinatenaxe ein dreifacher Punkt der Kurve, dessen drei Tangenten mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen.

Zur noch genauern Untersuchung dieser Kurve in der Nähe des dreifachen Punktes transformieren wir die Gleichung (β) wie folgt:

$$30x'^2(x'-y')^2 = y'^3(y'+720).$$

$$x'(x'-y') = \pm\sqrt{\frac{y'^3(y'+720)}{30}}.$$

$$x'^2 - x'y' \mp \sqrt{\frac{y'^3(y'+720)}{30}} = 0.$$

$$x' = \frac{1}{2}\left\{y' \pm \sqrt{y'^2 \pm 4\sqrt{\frac{y'^3(y'+720)}{30}}}\right\}$$

Die Quadratwurzel wird nur für $y' = 0$ selbst zu Null.

Geben wir jetzt dem y' kleine Werte, so wird für

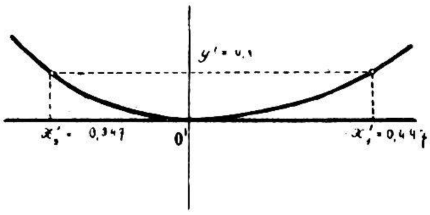
a) $y' = positiv = 0,1.$

$$x' = \frac{1}{2}\left\{0,1 \pm \sqrt{0,01 + 4\sqrt{\frac{0,001 . 720,1}{30}}}\right\} = \frac{1}{2}\left\{0,1 \pm 0,794\right\}.$$

$$x_1' = 0,447; \qquad x_2' = -0,347.$$

Ebenso würde ein grösseres y' zwei verschiedene reelle Werte liefern. Somit gehören zu einem positiven y' zwei verschiedene reelle Werte von x', wovon stets der eine *positiv*, der andere *negativ* ist.

b) y' = *negativ und klein.* In diesem Falle wird die Quadratwurzel stets imaginär und somit auch der Wert für x'; daraus folgt, dass die Kurve ganz oberhalb der Abscissenaxe liegt und von der Ordinatenaxe nicht symmetrisch geteilt wird. Der dreifache Punkt unterscheidet sich also nicht wesentlich von einem gewöhnlichen Kurvenpunkt, nur ist die Krümmung der Kurve in der Nähe desselben eine schwächere.



Da diese Untersuchungen auch ausgedehnt werden können auf die geraden Bernoullischen Funktionen mit höhern Exponenten, so ergibt sich der *Satz:*

Die geraden Bernoullischen Funktionen höhern, $2m^{ten}$ Grades stellen ebenfalls Parabeln höhern, $2m^{ten}$ Grades dar; bei denselben ist der unendlich ferne Punkt in der Richtung der Ordinatenaxe ein $(2m-1)$-facher Punkt, in welchem alle $(2m-1)$ Tangenten mit der unendlich fernen Geraden zusammenfallen, welche die Kurve in $2m$ zusammenfallenden Punkten berührt. Die Kurve liegt ganz auf der einen Seite der unendlich fernen Geraden, und der $(2m-1)$-fache Punkt unterscheidet sich nicht wesentlich von einem gewöhnlichen Kurvenpunkt, nur ist die Krümmung in der Nähe desselben eine schwächere.

Da diese Untersuchungen für alle Definitionen analog durchgeführt werden können und auch entsprechende Resultate liefern, so sind wir über den Verlauf aller Bernoullischen Funktionen im Endlichen wie im Unendlichen genügend aufgeklärt.

Die Tabellen V—VIII zeigen nun deutlich, dass das Gültigkeitsgebiet der einzelnen Definitionen ein ziemlich verschieden grosses ist; am kleinsten ist das Konvergenzgebiet der Schlömilchschen Definition; das beste Gebiet liegt hier zwischen -1 und $+2$; ausserhalb desselben nimmt die Funktion sehr rasch grosse Werte an. Etwas, aber nur wenig grösser ist das Konvergenzgebiet der Definitionen von Raabe und von Glaisher, was aus den Tabellen V und VIII ersichtlich ist. Die Parabeln der Definition von Schläfli sind diejenigen, welche sich der Abscissenaxe am weitesten, sowohl nach der positiven wie nach der negativen Seite hin anschmiegen und zwar um so mehr, je grösser der Grad der Funktion ist; so erstreckt sich das beste Gebiet für $n = 6$ schon zwischen -3 und $+4$; bei den noch höhern Bernoullischen Funktionen wird dieses Gebiet bedeutend vergrössert.

Es ist dies ein weiterer Vorzug der Definition von Schläfli, wieder bewirkt durch die Fakultät im Nenner.

§ 32. Entscheidung.

Gestützt auf all unsere frühern Betrachtungen, gelangen wir zu folgendem Resultat:

Die Definition der Bernoullischen Funktion nach L. Schläfli ist die für die Theorie zutreffendste, weil

1. *ihr Konvergenzgebiet sich am weitesten ausdehnt,*
2. *alle Formeln einfachere Gestalt annehmen,*
3. *dieselbe die allgemeinste ist und*
4. *die ganze Theorie sich einheitlicher aufbaut, infolge der trefflich gewählten Grundbeziehung zwischen den Bernoullischen Zahlen und Funktionen und der Anwendung des Prinzipes der Koeffizientenvergleichung.*