Zeitschrift: Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern

Band: - (1900)

Heft: 1478-1499

Artikel: Die Definitionen der Bernoullischen Funktion und Untersuchung der Frage, welche von denselben für die Theorie die zutreffendste ist : historisch-kritisch beleuchtet

Kapitel: Die Bernoullische Funktion nach L. Schläfli

Autor: Renfer, H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-319106

Er zeigt, dass der Spezialwert einer geraden Ableitung der Cotangente eines Argumentes, multipliziert mit dem Argument selbst, sich durch eine Bernoullische Zahl wie folgt ausdrücken lässt

$$D_x^{2m}\left\{x \operatorname{cotg} x\right\}_{x=0} = -2^{2m} B_m.$$

Ebenso lässt sich der Nullwert der geraden Ableitungen der trig. Tangente durch eine Bernoullische Zahl oder durch eine Bernoullische Funktion vom Argument $\frac{1}{2}$ ausdrücken, so dass ist

$$D_x^{2m}\left\{\operatorname{tg} x\right\}_{x=0} = 2^{2m-1}\,\frac{(2^{2m}-1)}{m}\,B_m.$$

Schliesslich ist auch der Nullwert der geraden Ableitung der Sekante durch eine Bernoullische Funktion darstellbar, indem wird

$$D_x^{2m}\left\{\sec x\right\}_{x=0} = (-1)^{m+1}\,\frac{2^{4m+2}}{2m+1}\,\varphi\left(\frac{1}{4}, 2m+1\right).$$

§ 13. Die Bernoullische Funktion in bestimmten Integralen.

Ausser den einfachen Integralwerten in § 8 dieses Abschnittes gibt Schlömilch weder in seinem Compendium, noch in der erwähnten Abhandlung in Band I der Zeitschrift für Mathematik und Physik andere Integralausdrücke mit Bernoullischen Funktionen, abgesehen von der Bernoullischen Funktion, welche der Restausdruck bei der Summierung der allgemeinen Differenzenreihe enthält, und dem Restgliede der Maclaurinschen Summenformel, das unter dem Integralzeichen ebenfalls eine Bernoullische Funktion aufweist.[30]) Auch bei Worpitzky finden sich keine Integralformeln der Bernoullischen Funktion, doch lassen sich den Raabeschen Formen entsprechende Ausdrücke mit Leichtigkeit aufstellen.

III. Die Bernoullische Funktion nach L. Schläfli.

§ 14. Herleitung der Definition.

Schläfli geht aus von der Summe

$$S_m = 1^m + 2^m + 3^m + 4^m + \cdots\cdots + (x-1)^m;$$

gibt er dem m die Werte 0, 1, 2, ..., m, so erhält er $(m+1)$ Summen S_0, S_1, S_2, ..., S_m. Diese multiplizieren wir der Reihe nach mit y^0, $\frac{y^1}{1!}$, $\frac{y^2}{2!}$, ..., $\frac{y^m}{m!}$, so folgt

$$\frac{S_0 y^0}{0!} = 1 + 1 + 1 + \cdots\cdots + 1.$$

$$\frac{S_1 y^1}{1!} = \frac{y}{1!} + \frac{2y}{1!} + \frac{3y}{1!} + \cdots\cdots + \frac{[x-1]y}{1!}.$$

$$\frac{S_2 y^2}{2!} = \frac{y^2}{2!} + \frac{(2y)^2}{2!} + \frac{(3y)^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{[(x-1)y]^2}{2!}.$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\frac{S_m y^m}{m!} = \frac{y^m}{m!} + \frac{(2y)^m}{m!} + \frac{(3y)^m}{m!} + \cdots\cdots + \frac{[(x-1)y]^m}{m!}.$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

Addieren wir die senkrecht untereinanderstehenden Kolonnen, so erhalten wir, wenn bis ins Unendliche ausgedehnt wird,

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{S_m y^m}{m!} = 1 + e^y + e^{2y} + e^{3y} + \cdots\cdots + e^{(x-1)y} = \frac{e^{xy}-1}{e^y-1}.$$

Wir denken uns die Gleichung mit y multipliziert und dann zerrissen; so erhalten wir eine Beziehung, aus welcher wir die Bernoullischen Zahlen ebenso leicht herleiten können wie die Bernoullische Funktion. Wir definieren daher

$$\sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{S_m y^{m+1}}{m!} = \frac{y e^{xy}}{e^y-1} - \frac{y}{e^y-1} \tag{1}$$

als die *Fundamentalgleichung der Bernoullischen Zahlen und Bernoullischen Funktionen.*

Der erste Bruch für sich betrachtet führt auf die Bernoullische Funktion, während der zweite auf die Bernoullischen Zahlen leitet.

Wir nehmen deshalb an, es sei

$$\frac{y e^{xy}}{e^y-1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, x)\, y^n \quad \text{und} \tag{2}$$

definieren $\chi(0, x) =$ Konstante $= 1$ und $\chi(n, x)$ als *n^{te} Bernoullische Funktion.* Die Koeffizienten der Potenzen von y sind also die Bernoullischen Funktionen, und wir wollen für die n^{te} Bernoullische Funktion $\chi(n, x)$ einen Ausdruck suchen. Es wird

$$\frac{y e^{xy}}{e^y - 1} = \frac{y}{e^y - 1} e^{xy} = \left\{1 + c_1 y + c_2 y^2 + \cdots\cdots + c_\lambda y^\lambda + \cdots\cdots\right\} \times$$
$$\left\{1 + \frac{xy}{1!} + \frac{x^2y^2}{2!} + \cdots\cdots + \frac{x^{n-\lambda} y^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!} + \cdots\right\}.$$

Der allgemeine Term, welcher y^n liefert, lautet

$$\text{Koeffizient von } y^n = [y^n] \overset{31)}{=} \frac{c_\lambda x^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!}.$$

Daher wird
$$\frac{y e^{xy}}{e^y - 1} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{c_\lambda x^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!} y^n.$$

Diese Gleichung stellt denselben Wert dar wie Beziehung (2); durch Vergleichung beider folgt als Wert für $\chi(n, x)$

$$\chi(n, x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{c_\lambda x^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!} = \frac{c_0 x^n}{n!} + \frac{c_1 x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{\lambda=2}^{\lambda=n} \frac{c_\lambda x^{n-\lambda}}{(n-\lambda)!}.$$

Bei der letzten Summe ist ersichtlich, wie auch schon früher, dass infolge der Fakultät im Nenner λ nur bis $\lambda = n$ gehen darf.

Aus der Theorie der Bernoullischen Zahlen ist bekannt, dass bei Entwicklung von $\frac{y}{e^y - 1}$ folgende Koeffizienten c_λ auftreten:

$$c_0 = 1; \; c_1 = -\frac{1}{2}; \; c_{2\lambda-1} = 0; \; c_{2\lambda} = (-1)^{\lambda-1} \frac{B_\lambda}{(2\lambda)!};$$

daher wird, wenn wir noch für λ den Wert (2λ) setzen,

$$\chi(n, x) = \frac{x^n}{n!} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{n}{2}} (-1)^{\lambda-1} \frac{B_\lambda}{(2\lambda)!\,(n-2\lambda)!} x^{n-2\lambda}.$$

Da aber $\frac{n!}{(2\lambda)!\,(n-2\lambda)!} = \binom{n}{2\lambda}$, so definieren wir die «*n^{te} Bernoullische Funktion*» durch

$$\chi(n, x) = \frac{1}{n!} \left\{ x^n - \frac{n}{2} x^{n-1} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\frac{n}{2}} (-1)^{\lambda-1} \binom{n}{2\lambda} B_\lambda x^{n-2\lambda} \right\}. \tag{3}$$

Wir können die obere Grenze in der Summe weglassen, wenn wir bedenken, dass für $\lambda = \frac{n}{2}$ der Ausdruck $\binom{n}{n} = 1$, ebenso

$x^0 = 1$ wird und für ein grösseres λ zufolge von $\binom{n}{n+\mu} = 0$, wenn μ positiv, die Summe stets zu Null wird; die Reihe bricht also von selbst ab. Der Hauptunterschied dieser Definition gegenüber den beiden ersten ist der, dass auf der rechten Seite auch Terme mit x^0, also solche, die x gar nicht mehr enthalten, vorkommen dürfen, was diese Definition viel allgemeiner macht. Auch der vorgesetzte Faktor $\frac{1}{n!}$ leistet gute Dienste, da er das Konvergenzgebiet der Funktion vergrössert.[32]) Die kürzere Schreibweise durch Einführung der Summenformel könnte bei den übrigen Definitionen auch angewendet werden.

§ 15. Die Derivierten dieser Funktion.

A. Einfache Differentialquotienten.

Wir wollen vorerst die gerade und ungerade Bernoullische Funktion trennen. Ist n gerade, so wird für

1. n = gerade = 2m.

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi(2m, x) = \frac{1}{(2m)!}\left\{2m\,x^{2m-1} - \frac{2m(2m-1)}{2}x^{2m-2} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m}(-1)^{\lambda-1}\binom{2m}{2\lambda}B_\lambda(2m-2\lambda)x^{2m-2\lambda-1}\right\}$$

$$= \frac{1}{(2m-1)!}\left\{x^{2m-1} - \frac{2m-1}{2}x^{2m-2} + \sum_{\lambda=1}^{\begin{cases}\lambda=m\\ \lambda=m-1\end{cases}}(-1)^{\lambda-1}\binom{2m-1}{2\lambda}B_\lambda x^{2m-2\lambda-1}\right\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi(2m, x) = \chi(2m-1, x).$$

2. n = ungerade = (2m + 1). Dann ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi(2m+1, x) = \frac{1}{(2m+1)!}\left\{(2m+1)x^{2m}\right.$$

$$\left. - (2m+1)\frac{2m}{2}x^{2m-1} + \sum_{\lambda=1}(-1)^{\lambda-1}\binom{2m+1}{2\lambda}B_\lambda(2m+1-2\lambda)x^{2m-2\lambda}\right\}$$

$$= \frac{1}{(2m)!}\left\{ x^{2m} - \frac{2m}{2} x^{2m-1} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} (-1)^{\lambda-1} \binom{2m}{2\lambda} B_\lambda x^{2m-2\lambda} \right\}.$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi(2m+1, x) = \chi(2m, x).$$

Wir haben beide Funktionen getrennt betrachtet wegen der obern Grenze; wir hätten aber ebenso gut direkt von (3) ausgehen können und dann erhalten

$$\frac{\partial}{\partial x} \chi(n, x) = \chi(n-1, x). \tag{4}$$

Die Ableitung einer Bernoullischen Funktion wird gefunden, indem man den Exponenten um die Einheit vermindert.

B. Die wiederholten Differentialquotienten.

Gestützt auf (4) werden

$$D^2 \chi(n, x) = D\chi(n-1, x) = \chi(n-2, x)..$$

$$D^3 \chi(n, x) = \quad \chi(n-3, x).$$

— — — — — — — — —

$$D^\lambda \chi(n, x) = \quad \chi(n-\lambda, x). \tag{5}$$

Die wiederholte Ableitung einer Bernoullischen Funktion wird gefunden, indem man den Exponenten um die Zahl, welche die Anzahl der Ableitungen angibt, vermindert.

Wir finden hier den ersten grossen Vorteil dieser Funktion gegenüber den zwei frühern Definitionen; es treten keine Bernoullischen Zahlen zu den Ableitungen; die Definition ist demnach allgemeiner und liefert einfachere Resultate.

C. Einfache Integralformen.

Da die Differentialformeln sich einfacher gestalten, so thun dies auch die Integralformeln. Auch hier können wir vom allgemeinen Fall ausgehen und es resultiert

$$\int_0^x \chi(n-1, x)\, dx = \Big\{ \chi(n, x) \Big\}_0^x.$$

Da, wie wir später sehen werden, $\chi(2m, 0) = (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m)!}$ und $\chi(2m+1, 0) = 0$, so entstehen die beiden Beziehungen

$$\int_0^x \chi(2m-1, x)\,dx = \chi(2m, x) + (-1)^m \frac{B_m}{(2m)!} \quad \text{und} \qquad (6)$$

$$\int_0^x \chi(2m, x)\,dx = \chi(2m+1, x). \qquad (7)$$

Durch Integration wird somit der Exponent um die Einheit erhöht. *Das bestimmte Integral zwischen den Grenzen 0 und x einer Bernoullischen Funktion ist wieder eine Bernoullische Funktion mit um die Einheit erhöhtem Exponenten und $\pm$ einer Bernoullischen Zahl für die ungerade Bernoullische Funktion.*

Wir haben hier insofern eine Vereinfachung, als das Argument bei der Bernoullischen Zahl fehlt, das bei Raabe und Schlömilch noch hinzutritt.

Für die obere Grenze $x = \frac{1}{2}$ wird nach (7)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \chi(2m, x)\,dx = \chi\left(2m+1, \frac{1}{2}\right) = 0$$

und nach (6)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \chi(2m-1, x)\,dx = \chi\left(2m, \frac{1}{2}\right) + (-1)^m \frac{B_m}{(2m)!}.$$

Setzen wir für $\chi\left(2m, \frac{1}{2}\right)$ den später zu beweisenden Wert[33]) ein,

so wird $$\int_0^{\frac{1}{2}} \chi(2m-1, x)\,dx = (-1)^m \frac{B_m}{(2m)!} \cdot \frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}.$$

§ 16. Die Bernoullische Funktion mit inversem Argument.

Ersetzen wir in (2) den Wert x durch $(1-x)$, so wird

$$\frac{y\,e^{(1-x)y}}{e^y-1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, 1-x)\,y^n, \text{ d. h.,}$$

$$\chi(n, 1-x) = [y^n] \text{ in } \frac{y\,e^{(1-x)y}}{e^y - 1}.$$

Nun wird

$$\frac{y\,e^{(1-x)y}}{e^y-1} = (-y)\frac{e^{x(-y)}}{e^{(-y)}-1} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, x)(-y)^n = \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, x) y^n (-1)^n;$$

somit ist $\qquad \chi(n, 1-x) = (-1)^n \chi(n, x). \qquad$ **(8)**

Daraus folgt für $x = 0$ unter Anwendung der Definitionsgleichung (3), wenn $n =$ *gerade* $= 2m$:

$$\chi(2m, 0) = \chi(2m, 1) = (-1)^{m-1} \frac{B_m}{(2m)!}, \tag{9}$$

dagegen für $n =$ *ungerade* $= (2m+1)$, wenn x auch $= \frac{1}{2}$,

$$\chi(2m+1, 0) = \chi\left(2m+1, \frac{1}{2}\right) = \chi(2m+1, 1) = 0, \text{ d. h.,} \tag{10}$$

alle Bernoullischen Funktionen ungerader Ordnung verschwinden für die Argumente 0. $\frac{1}{2}$ und 1.

Wir fragen uns nun, was wird aus $\chi\left(2m, \frac{1}{2}\right)$. Um diesen Wert ausmitteln zu können, müssen wir vorerst über die Vervielfachung des Argumentes aufgeklärt sein.

Wir denken uns die χ-Funktionen $\chi(n, x)$, $\chi\left(n, x+\frac{1}{k}\right)$, $\chi\left(n, x+\frac{2}{k}\right), \ldots\ldots, \chi\left(n, x+\frac{k-1}{k}\right)$ aufgefasst als Koeffizienten von y^n in den dazu gehörenden Entwicklungen; dann addieren wir diese; die Summe T wird, wenn wir dieselbe als geometrische Progression summieren,

$$T = \frac{1}{e^y-1} \cdot \frac{e^y-1}{e^{\frac{y}{k}}-1}\, y\,e^{xy} = \frac{y\,e^{xy}}{e^{\frac{y}{k}}-1}, \text{ also}$$

$$\chi(n, x) + \chi\left(n, x+\frac{1}{k}\right) + \cdots + \chi\left(n, x+\frac{k-1}{k}\right) = [y^n] \text{ in } \frac{y\,e^{xy}}{e^{\frac{y}{k}}-1}.$$

Es ist aber $\displaystyle \frac{y\,e^{xy}}{e^{\frac{y}{k}}-1} = \frac{k\left(\frac{y}{k}\right)e^{kx\left(\frac{y}{k}\right)}}{e^{\left(\frac{y}{k}\right)}-1} = k\sum_{n=0}^{n=\infty} \chi(n, kx)\left(\frac{y}{k}\right)^n.$

$$[y^n] = \frac{1}{k^{n-1}} \chi(n, kx).$$

Daraus ergibt sich

$$\chi(n, x) + \chi\left(n, x+\frac{1}{k}\right) + \chi\left(n, x+\frac{2}{k}\right)$$
$$+ \cdots\cdots + \chi\left(n, x+\frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{k^{n-1}} \chi(n, kx) \qquad (11)$$

als wichtige Formel, die über jede Vervielfachung des Argumentes Auskunft gibt. Infolge von $\frac{k-1}{k}$ bricht die Reihe links von selbst ab. Die beiden entsprechenden Formeln der frühern zwei Definitionen lieferten stets zwei getrennte Werte, je nachdem die Bernoullische Funktion gerade oder ungerade war. Wir ersehen auch daraus, dass die so definierte Bernoullische Funktion die allgemeinere ist; zudem ist diese Herleitung vorliegender Formel wesentlich einfacher als bei Raabe und Schlömilch.

Aus derselben lassen sich verschiedene Spezialwerte berechnen.

I. Verdopplung des Argumentes. $k = 2$.

$$\chi(n, x) + \chi\left(n, x+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \chi(n, 2x).$$

Ersetzen wir in (8) die Grösse x durch $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ und setzen diesen Wert in die letzte Formel ein, so wird

$$\chi(n, x) + (-1)^n \chi\left(n, \frac{1}{2} - x\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \chi(n, 2x). \qquad (\alpha)$$

Ist darin $x = 0$ *und* $n =$ *ungerade* $= (2m+1)$, so wird

$$\chi\left(2m+1, \frac{1}{2}\right) = 0;$$ dagegen wird für $x = 0$ *und* $n =$ *gerade* $= 2m$, wenn für $\chi(2m, 0)$ der bekannte Wert gesetzt wird,

$$\chi\left(2m, \frac{1}{2}\right) = (-1)^m \frac{2^{2m-1}-1}{2^{2m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \qquad (12)$$

II. Verdreifachung des Argumentes. $k = 3$.

$$\chi(n, x) + \chi\left(n, x+\frac{1}{3}\right) + \chi\left(n, x+\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3^{n-1}} \chi(n, 3x). \qquad (\beta)$$

Unter Anwendung von (8) wird für $x = 0$

$$\chi(n,0)+\chi\left(n,\frac{1}{3}\right)+(-1)^n\chi\left(n,\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3^{n-1}}\chi(n,0);$$

n = ungerade liefert die identische Gleichung $0=0$; dagegen ist für *n = gerade*, wenn für $\chi(2m,0)$ der gefundene Wert gesetzt wird,

$$\chi\left(2m,\frac{1}{3}\right)=(-1)^m\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{2m-1}-1}{3^{2m-1}}\cdot\frac{B_m}{(2m)!}. \tag{13}$$

Aus Gleichung (α) resultiert für $x=\frac{1}{3}$ und $n=2m$

$$\chi\left(2m,\frac{2}{3}\right)=2^{2m-1}\left\{\chi\left(2m,\frac{1}{3}\right)+\chi\left(2m,\frac{1}{6}\right)\right\}. \tag{γ}$$

Einen Wert für $\chi\left(2m,\frac{1}{6}\right)$ erhalten wir, wenn wir in (β) für $x=\frac{1}{6}$ und $n=2m$ setzen; es ist dann

$$\chi\left(2m,\frac{1}{6}\right)+\chi\left(2m,\frac{1}{2}\right)+\chi\left(2m,\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{3^{2m-1}}\chi\left(2m,\frac{1}{2}\right).$$

Daraus folgt, wenn für $\chi\left(2m,\frac{1}{2}\right)$ der früher gefundene Wert (12) gesetzt wird,

$$\chi\left(2m,\frac{1}{6}\right)=(-1)^m\frac{1}{2}\cdot\frac{(2^{2m-1}-1)(1-3^{2m-1})}{6^{2m-1}}\cdot\frac{B_m}{(2m)!}. \tag{14}$$

Setzen wir die gefundenen Formeln (13) und (14) in (γ) ein, so ist, was zwar einfacher aus Formel (8) für $x=\frac{2}{3}$ und $n=2m$ hervorgeht,

$$\chi\left(2m,\frac{2}{3}\right)=(-1)^m\frac{1}{2}\cdot\frac{3^{2m-1}-1}{3^{2m-1}}\cdot\frac{B_m}{(2m)!}. \tag{15}$$

Wir hätten schon dort die zwei Sätze aufstellen können:

1. *Jede zwei geraden Bernoullischen Funktionen, deren Argumente sich zu 1 ergänzen, sind nach absolutem Wert und nach Vorzeichen einander gleich.*

2. *Jede zwei ungeraden Bernoullischen Funktionen, deren Argumente sich zu 1 ergänzen, sind wohl dem Vorzeichen nach entgegengesetzt, dem absoluten Werte nach aber gleich.*

III. Vierfaches Argument. k = 4.

$$\chi(n, x) + \chi\left(n, x + \frac{1}{4}\right) + \chi\left(n, x + \frac{1}{2}\right) + \chi\left(n, x + \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4^{n-1}} \chi(n, 4x).$$

Für x = 0 wird unter Anwendung von Formel (8) und Einsetzen der Werte für $\chi(2m, 0)$ und $\chi\left(2m, \frac{1}{2}\right)$ für die gerade Bernoullische Funktion

$$\chi\left(2m, \frac{1}{4}\right) = \chi\left(2m, \frac{3}{4}\right) = (-1)^m \frac{2^{2m-1}-1}{2^{4m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \quad (16)$$

Auf ähnliche Weise lassen sich $\chi\left(2m, \frac{5}{6}\right)$, $\chi\left(2m, \frac{1}{8}\right)$, ..., $\chi\left(2m, \frac{7}{8}\right)$ und andere χ-Funktionen berechnen; die Ausdrücke werden aber ziemlich kompliziert.

§ 17. Die Bernoullische Funktion mit negativem Argument.

Wir können auf zwei getrennten Wegen das Verhalten der Bernoullischen Funktion mit negativem Argument untersuchen. Vorerst gehen wir von der Definitionsformel (3) aus, müssen aber dabei die geraden und ungeraden Funktionen getrennt betrachten.

1. Die gerade Bernoullische Funktion. Wir ersetzen in (3) n durch 2 m und x durch (— x); dann wird

$$\chi(2m, -x) = \frac{1}{(2m)!} \left\{ x^{2m} + \frac{2m}{2} x^{2m-1} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} (-1)^{\lambda-1} \binom{2m}{2\lambda} B_\lambda x^{2m-2\lambda} \right\}.$$

Durch Addition und Subtraktion desselben Ausdruckes $\frac{2m x^{2m-1}}{(2m)!}$ und passendes Zusammennehmen wird

$$\chi(2m, -x) = \chi(2m, x) + \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

2. Die ungerade Bernoullische Funktion. Durch analoges Verfahren wird

$$\chi(2m+1, -x) = \frac{1}{(2m+1)!} \left\{ -x^{2m+1} - \frac{2m+1}{2} x^{2m} \right.$$

$$+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=m}(-1)^{\lambda-1}\binom{2m+1}{2\lambda}B_\lambda(-x)^{2m+1-2\lambda}\Bigg\}.$$

Hier addieren und subtrahieren wir $\frac{(2m+1)x^{2m}}{(2m+1)!}$; nun ist

$$\chi(2m+1,-x) = -\chi(2m+1,x) - \frac{x^{2m}}{(2m)!}.$$

Eine *allgemeine* Formel für die Bernoullische Funktion mit negativem Argument finden wir aus folgender Betrachtung:

Ersetzen wir in Formel (2) den Wert x durch $(1+x)$, so ist

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\chi(n,1+x)\,y^n = \frac{y\,e^{(1+x)y}}{e^y-1}. \tag{α}$$

$$\frac{y\,e^{(1+x)y}}{e^y-1} = y\,e^{xy} + \frac{y\,e^{xy}}{e^y-1} = y\,e^{xy} + \sum_{n=0}^{n=\infty}\chi(n,x)\,y^n.$$

Durch Reihenentwicklung von e^{xy} folgt

$$\frac{y\,e^{(1+x)y}}{e^y-1} = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^{n-1}y^n}{(n-1)!} + \sum_{n=0}^{n=\infty}\chi(n,x)\,y^n. \tag{β}$$

Vergleichen wir die Koeffizienten von y^n der Gleichungen (α) und (β), so erhalten wir

$$\chi(n,1+x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \chi(n,x). \tag{17}$$

Ersetzen wir darin x durch $(-x)$, so wird unter Berücksichtigung von (8)

$$\chi(n,-x) = (-1)^n\left\{\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \chi(n,x)\right\}. \tag{18}$$

Diese Formel geht für $n = 2m$ und $n = (2m+1)$ in die eingangs dieses Paragraphen hergeleiteten über. Sie dient zur Berechnung der Bernoullischen Funktion mit negativem Argument. Auch hier zeigt sich wieder die Vereinfachung, da Raabe und Schlömilch je zwei entsprechende Formeln nötig haben.

Um die χ-Funktion auch ausserhalb des Intervalles 0 bis 1 zu untersuchen, dient eine Formel, welche wir erhalten, indem wir in (17) für $(x+1)$ der Reihe nach setzen $(x+1)$, $(x+2)$, ..., $(x+k)$ und sämtliche so entstandenen Gleichungen addieren; es wird dann

$$\chi(n, k+x) = \chi(n, x) + \frac{1}{(n-1)!}\Big\{x^{n-1} + (1+x)^{n-1}$$
$$+ (2+x)^{n-1} + \cdots\cdots\cdots + (k-1+x)^{n-1}\Big\}. \qquad (19)$$

Eine weitere Formel zur Untersuchung der Bernoullischen Funktion mit negativem Argument, die uns gute Dienste zur numerischen Ausrechnung und Kontrolle der Werte leistet, finden wir, wenn wir in (8) für x den Wert $\left(x + \frac{1}{2}\right)$ setzen; dieselbe geht dann über in

$$\chi\left(n, \frac{1}{2} - x\right) = (-1)^n \chi\left(n, \frac{1}{2} + x\right). \qquad (20)$$

Diese Formel charakterisiert uns den Punkt $x = \frac{1}{2}$ als *Maximal-* oder *Minimalstelle.*

§ 18. Diskussion dieser Definition.

Setzen wir in der Definitionsformel (3) der Reihe nach für n die Werte 1, 2, 3, ..., so nehmen die acht ersten Funktionen dieser Definition folgende Werte an, die nacheinander diskutiert werden sollen:

$$\chi(1, x) = x - \frac{1}{2}.$$

$$\chi(2, x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{12}.$$

$$\chi(3, x) = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{12}.$$

$$\chi(4, x) = \frac{x^4}{24} - \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{24} - \frac{1}{720}.$$

$$\chi(5, x) = \frac{x^5}{120} - \frac{x^4}{48} + \frac{x^3}{72} - \frac{x}{720}.$$

$$\chi(6, x) = \frac{x^6}{720} - \frac{x^5}{240} + \frac{x^4}{288} - \frac{x^2}{1440} + \frac{1}{30240}.$$

$$\chi(7, x) = \frac{x^7}{5040} - \frac{x^6}{1440} + \frac{x^5}{1440} - \frac{x^3}{4320} + \frac{x}{30240}.$$

$$\chi(8, x) = \frac{x^8}{40320} - \frac{x^7}{10080} + \frac{x^6}{8640} - \frac{x^4}{17280}$$
$$+ \frac{x^2}{60480} - \frac{1}{1.209600}.$$

Wir gelangen hier zu ähnlichen Resultaten wie früher; da aber auf der rechten Seite auch Terme vorkommen dürfen, die von der Variabelen befreit sind, so ist leicht ersichtlich, dass nur die ungeraden Bernoullischen Funktionen für die Werte $x = 0$ und $x = 1$ erfüllt sind; das Glied der geraden Bernoullischen Funktion, das die Veränderliche nicht enthält, gibt für das Argument 0 und 1 sofort den Wert der ganzen Funktion an.

$\chi(1, x) = x - \frac{1}{2}$ stellt eine Gerade dar, die aber für diese Definition nicht mehr durch den Ursprung geht.

$\chi(2, x)$ ist die Gleichung einer Parabel; die Funktion besitzt ein Minimum bei $x = \frac{1}{2}$ vom Werte $\chi\left(2, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}$.

$\chi(3, x)$ besitzt im Intervall 0 bis 1 sowohl ein Maximum als ein Minimum, und zwar liegt ersteres bei $x = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3}$, das letztere dagegen bei $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3}$; zudem ist $\chi\left(3, \frac{1}{2}\right) = 0$; diese Kurve, analytisch gesprochen, ist eine Art Parabel höhern Grades.

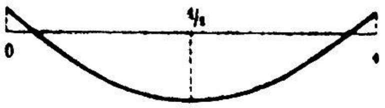
Die Funktion $\chi(4, x)$ besitzt bei $x = \frac{1}{2}$ ein Maximum vom Werte $\frac{7}{5760}$; zudem ergeben sich zwei Minima bei $x = 0$ und $x = 1$, so dass $\chi(4, 0) = \chi(4, 1) = -\frac{1}{720}$.

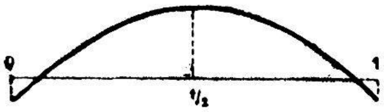
Was $\chi(5, x)$ anbetrifft, so ist diese Funktion als ungerade Bernoullische Funktion erfüllt für $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$; sie weist ein Maximum auf zwischen $\frac{1}{2}$ und 1, wie auch ein Minimum zwischen 0 und $\frac{1}{2}$.

Alle diese höhern Bernoullischen Funktionen stellen Parabeln höherer Ordnung dar.

Wir erhalten somit folgende Bilder des Verlaufes der Bernoullischen Funktion zwischen den Grenzen 0 und 1; im wesentlichen stimmen sie mit den bei Schlömilch dargestellten überein.

Figur 1.



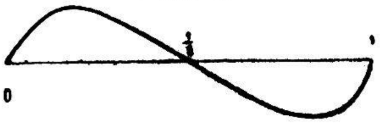


Figur 2.

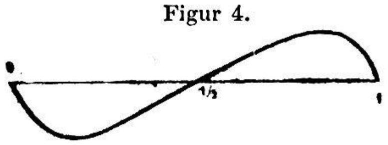
Die Funktionen sind charakterisiert durch[34])

Figur 1, wenn $n = 2, 6, 10, \ldots\ldots, (4k-2)$,
» 2, » $n = 4, 8, 12, \ldots\ldots, 4k$,
» 3, » $n = 3, 7, 11, \ldots\ldots, (4k-1)$,
» 4, » $n = 5, 9, 13, \ldots\ldots, (4k+1)$.

Figur 3.



Figur 4.



§ 19. Entwicklung der Bernoullischen Funktion in Reihen.

Wir könnten hier analog verfahren wie Schlömilch[35]); zudem würden wir noch viel rascher ans Ziel kommen, da das Integral, welches bei dieser Herleitung auszuwerten ist, leicht dargestellt werden kann.[36]) Schläfli geht aber ganz auf seine Art und Weise vor; er untersucht vorerst, was wird aus

$$\frac{\alpha}{\lambda-\alpha} = \frac{\alpha}{\lambda} + \frac{\alpha^2}{\lambda^2} + \cdots\cdots\cdots + \frac{\alpha^n}{\lambda^n} + \cdots\cdots\cdots = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\alpha^n}{\lambda^n}.$$

Multiplizieren wir mit x^λ, so wird

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^\lambda}{\lambda^n} = \left[\alpha^n\right] \text{ in } \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\alpha x^\lambda}{\lambda-\alpha}. \qquad (\alpha)$$

Laut Theorie der Gammafunktion gilt für ein beliebiges a die

Beziehung[37]) $$\int_{-1 \circlearrowleft 0} x^{-a}(1-x)^{b-1}\,dx = 2i\sin a\pi\,\frac{\Gamma(1-a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(b-a+1)};$$

substituieren wir für a den Wert $(1-n)$ und setzen $b = 1$, so wird

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{2i\sin n\pi}\int\limits_{-1\;\;0} x^{n-1}\,d x. \qquad (\beta)$$

Diese Formel gibt uns ein Mittel an die Hand, obige Summe durch ein bestimmtes Integral auszudrücken. Ist t die Integrationsvariabele, so wird nach (β)

$$\frac{1}{(\alpha-\lambda)}=\frac{1}{2i\sin(\alpha-\lambda)\pi}\int\limits_{-1\;\;0} t^{\alpha-\lambda-1}\,d t=\frac{(-1)^{\lambda}}{2i\sin\alpha\pi}\int\limits_{-1\;\;0} t^{\alpha-\lambda-1}\,d t.$$

Die Summe geht dann über in

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{\alpha x^{\lambda}}{\lambda-\alpha}=\frac{1}{2i\sin\alpha\pi}\int\limits_{-1\;\;0}\alpha t^{\alpha-1}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}(-1)^{\lambda-1}\left(\frac{x}{t}\right)^{\lambda} d t$$

$$=\frac{\alpha}{2i\sin\alpha\pi}\int\limits_{-1\;\;0} t^{\alpha}\,\frac{x}{t+x}\cdot\frac{d t}{t}.$$

Der gefährliche Punkt des Integrales ist $t=-x$; für diesen wird der Nenner zu Null, so dass der Wert des Integrales ∞ ist, wir müssen daher die Schlinge um $(-x)$ gehen lassen, diesen Pol also ausschliessen, und wir betrachten

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\frac{\alpha x^{\lambda}}{\lambda-\alpha}=\frac{\alpha}{2i\sin\alpha\pi}\int\limits_{-1\;\;-x,0} t^{\alpha}\,\frac{x\,d t}{t(t+x)}. \qquad (\gamma)$$

Dieses Integral ist aber kein Schlingenintegral mehr; denn es nimmt nach einem ganzen Umlauf seinen ursprünglichen Wert an. Wir dürfen dann auch später, ohne den Wert des Integrales zu verändern, eine additive Konstante beifügen, welche wir so auswählen, dass sie für unsere Zwecke passt.

Durch Substitution von $t^{\alpha} = e^{\alpha \operatorname{Log} t}$ wird

$$\frac{\alpha t^{\alpha}}{2 i \sin \alpha \pi} = \frac{\alpha t^{\alpha}}{e^{i \alpha \pi} - e^{-i \alpha \pi}} = \frac{1}{2 i \pi} \cdot \frac{2 i \pi \alpha e^{2 i \pi \alpha \left(\frac{\operatorname{Log} t}{2 i \pi} + \frac{1}{2}\right)}}{e^{2 i \alpha \pi} - 1}$$

$$= \frac{1}{2 i \pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} \chi\left(n, \frac{\operatorname{Log} t}{2 i \pi} + \frac{1}{2}\right) (2 i \pi \alpha)^n.$$ [38])

Somit ist $\quad \left[\alpha^n\right] = \frac{1}{2 i \pi} \chi\left(n, \frac{\operatorname{Log} t}{2 i \pi} + \frac{1}{2}\right) (2 i \pi)^n.$

Deshalb wird, wenn wir die Gleichungen (α) und (γ) berücksichtigen,

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{x^{\lambda}}{\lambda^n} = \frac{(2 i \pi)^n}{2 i \pi} \int\limits_{-1 \; -x,0} \left\{ \chi\left(n, \frac{\operatorname{Log} t}{2 i \pi} + \frac{1}{2}\right) - \chi\left(n, \frac{\operatorname{Log} x}{2 i \pi}\right) \right\} \frac{x\, dt}{t(t+x)}, \qquad (\delta)$$

wobei die zugefügte Konstante den Wert hat

$$K = - \frac{(2 i \pi)^n}{2 i \pi} \int\limits_{-1 \; -x,0} \chi\left(n, \frac{\operatorname{Log} x}{2 i \pi}\right) \frac{x\, dt}{t(t+x)}.$$

Wir wollen nun darnach trachten, x auf die Peripherie des Einheitskreises zu bringen; zu diesem Zweck müssen wir uns aber zuerst über Log t und Log (—x) ins Klare setzen; vor dem Nullpunkt wollen wir uns hüten, weil in demselben eine starke Transcendenz vorhanden ist.

$\operatorname{Log}(-x) = - i \pi (-\varrho) + 2 i \pi \Theta$; $\Theta =$ Konstante. $\varrho = 0$, sobald (—x) auf der Peripherie des Einheitskreises liegt.

Wenn $t = e^{2 i \pi \varphi - i \pi}$, wird $\operatorname{Log} t = - i \pi + 2 i \pi \varphi$.

$\varphi =$ Bogen von 0 bis 1; wenn $t = x$, soll $\varphi = \Theta$ werden. Dann sind

$\operatorname{Log} t = 2 i \pi \left(\varphi - \frac{1}{2}\right)$; $\varphi = \frac{\operatorname{Log} t}{2 i \pi} + \frac{1}{2}$; $\Theta =$ Konstante $= \frac{\operatorname{Log} x}{2 i \pi}$;

$\frac{dt}{t} = 2 i \pi\, d\varphi$.

Setzen wir diese Werte ein, so wird aus (δ)

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{x^{\lambda}}{\lambda^n} = \frac{(2 i \pi)^n}{2 i \pi} \int\limits_{-1 \; -x,0} \left\{ \chi(n, \varphi) - \chi(n, \Theta) \right\} \frac{x\, dt}{t(t+x)}. \qquad (\varepsilon)$$

Der Klammerausdruck unter dem Integralzeichen wird dann in dem Momente zu Null, sobald $\varphi = \Theta$ geworden; somit ist

$$x = e^{2i\pi\Theta};\ t = -e^{2i\pi\varphi};$$

$$e^{2i\pi\Theta} = e^{i\pi(\varphi+\Theta) - i\pi(\varphi-\Theta)};\ e^{2i\pi\varphi} = e^{i\pi(\varphi+\Theta)+i\pi(\varphi-\Theta)};$$

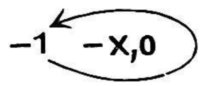
$$t+x = e^{i\pi(\varphi+\Theta)-i\pi(\varphi-\Theta)} - e^{i\pi(\varphi+\Theta)+i\pi(\varphi-\Theta)}$$

$$= -e^{i\pi(\varphi+\Theta)}\, 2i\sin(\varphi-\Theta)\pi;$$

$$\frac{x}{t+x} = \frac{1}{2}\left\{1 + i\operatorname{cotg}(\varphi-\Theta)\pi\right\}.$$

Substituieren wir diese Werte ins Integral (ε), so erhalten wir

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{x^\lambda}{\lambda^n} = \frac{(2i\pi)^n}{2i\pi} \int \left\{\chi(n,\varphi) - \chi(n,\Theta)\right\} \frac{1}{2}\left\{1+i\operatorname{cotg}(\varphi-\Theta)\pi\right\} 2i\pi\, d\varphi.$$



Setzen wir jetzt $x = e^{2i\pi\Theta}$, so bewegt sich die Variabele auf dem Einheitskreis von 0 bis 1, und es wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{e^{2i\pi\Theta\lambda}}{\lambda^n} = (2i\pi)^n \int_0^1 \left\{\chi(n,\varphi)-\chi(n,\Theta)\right\} \frac{1}{2}\left\{1+i\operatorname{cotg}(\varphi-\Theta)\pi\right\} d\varphi. \quad (\mu)$$

Wegen i^n sollten wir die Fälle für n = gerade oder n = ungerade trennen; um dies zu vermeiden, ziehen wir vor, beide Seiten mit $(-i)^n = e^{-in\frac{\pi}{2}}$ zu multiplizieren; dann wird (μ) zu

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{e^{i\left(2\pi\lambda\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}}{\lambda^n}$$

$$= (2\pi)^n \int_0^1 \left\{\chi(n,\varphi) - \chi(n,\Theta)\right\} \frac{1}{2}\left\{1+i\operatorname{cotg}(\varphi-\Theta)\pi\right\} d\varphi. \quad (21)$$

Diese Formel gilt auch für $\Theta = \varphi$, da dieselbe dafür nicht unstetig wird. Wegen der Cotangente lässt sich anfangs leicht glauben, das Integral werde unstetig; doch ist ja im Nenner der Cotangente der Sinus, der sich auf den Bogen $(\varphi - \Theta)$ reduzieren lässt. Da die χ-Funktionen algebraische Funktionen n^{ten} Grades sind, so geht die Klammer in tiefster Annäherung über in $(\varphi^n - \Theta^n)$; somit verhält sich das Integral wie $\frac{\varphi^n - \Theta^n}{\varphi - \Theta}$; ein solcher Ausdruck ist aber endlich und daher auch das Gesamtintegral für $\varphi = \Theta$.

Herausheben der Komponenten.

In obiger Formel (21) sind sowohl reelle als imaginäre Bestandteile enthalten. Wir wollen nach dem Moivreschen Grundsatz der Trennung des Reellen vom Imaginären die einzelnen Komponenten herausnehmen, da wir zerlegen können

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} e^{i\left(2\pi\lambda\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)$$
$$+ i \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right). \qquad (\varrho)$$

A. Die reelle Komponente.

Dieselbe wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n} = \frac{(2\pi)^n}{2} \int_0^1 \left\{ \chi(n,\varphi) - \chi(n,\Theta) \right\} d\varphi. \qquad (\nu)$$

Dieses Integral muss ausgemittelt werden. Wir wissen, dass durch Integration der Grad einer Bernoullischen Funktion um die Einheit steigt; somit wird für n gerade oder ungerade

$$\int_0^1 \chi(n,\varphi)\,d\varphi = \Big\{ \chi(n+1,\varphi) \Big\}_0^1 = 0;$$

denn die ungeraden Bernoullischen Funktionen verschwinden für die Argumente 0 und 1 und die geraden weisen denselben Wert auf, der hier das eine Mal mit negativem Vorzeichen genommen werden muss. Es zeigt sich nur die Ausnahme für $n = 0$; doch müssen wir diesen Fall ausschliessen, da sonst links alle Nenner zur Einheit werden.

Ferner ist $\chi(n,\Theta)$ in Bezug auf φ als Konstante zu betrachten, also $\int_0^1 \chi(n,\Theta)\,d\varphi = \chi(n,\Theta)$; daher wird (ν)

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n} = -\frac{(2\pi)^n}{2}\chi(n,\Theta).$$

$$\chi(\mathrm{n}, \Theta) = -\frac{2}{(2\pi)^{\mathrm{n}}} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{\mathrm{n}\pi}{2}\right)}{\lambda^{\mathrm{n}}}. \tag{22}$$

Dies ist wieder eine weit allgemeinere Formel als die entsprechende der frühern Definitionen; aus derselben erhalten wir leicht die den frühern gleichwertigen Beziehungen; die einzige Bedingung ist $0 < \Theta < 1$.

Die Formel konvergiert ganz unzweideutig für $\mathrm{n} = 2, 3, 4, \ldots\ldots$; für $\mathrm{n} = 1$ müssen wir die Konvergenzfrage noch genauer prüfen; es wird für $\mathrm{n} = 1$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin 2\lambda\pi\Theta}{\lambda}$$

$$= -\pi\chi(1, \Theta) = -\pi\left(\Theta - \frac{1}{2}\right).$$

Der höchste Wert von $\sin 2\lambda\pi\Theta$ kann nur 1 sein; dann nähert sich die Summe der Reihe der Stammbrüche, welche *divergent* ist. Die Folge davon ist, dass die Werte $\Theta = 0$ und $\Theta = 1$ ausgeschlossen werden müssen. Ist n nahe bei Null, so schreitet der Zähler fort nach $2\pi\Theta$, $4\pi\Theta$, $6\pi\Theta, \ldots\ldots$ Die Summe dieser Ausdrücke wird aber ∞ gross; die Konvergenz erscheint daher sehr verdächtig; aber für $2\pi\Theta = \psi$ ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\lambda\psi}{\lambda} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\lambda\psi}{\lambda\psi}\,\psi = \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}.$$

Wir setzen $\lambda\psi = \mu$; dann dürfen wir ein sehr kleines ψ als $\mathrm{d}\mu$ betrachten, so dass ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\mu}{\mu}\,\mathrm{d}\mu = \frac{\pi}{2} - \frac{\psi}{2}.$$

$\mu = \lambda\psi$ durchläuft die Wertereihe $\mu, \mu+\psi, \mu+2\psi, \ldots\ldots$, d. h., wenn ψ klein genug gewählt, so geht μ von 0 bis ∞; somit wird die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\sin\mu}{\mu}\,\mathrm{d}\mu = \int_0^\infty \frac{\sin\mu}{\mu}\,\mathrm{d}\mu = \frac{\pi}{2}.$$

Also ist der Ausdruck *konvergent*, da wir hier einen endlichen Wert erhalten.

Wir kehren wieder zu unsrer reellen Komponente (22) zurück und wollen die Fälle n = gerade = 2 m und n = ungerade = (2 m + 1) trennen.

Für $n = 2m$ wird $\cos(2\lambda\pi\Theta - m\pi) = (-1)^m \cos 2\lambda\pi\Theta$, also

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos 2\lambda\pi\Theta}{\lambda^{2m}} = (-1)^{m-1} \frac{(2\pi)^{2m}}{2} \chi(2m, \Theta). \tag{23}$$

Dies ist eine den Raabeschen Definitionsformeln entsprechende Beziehung; nur fehlt hier wieder der lästige Zusatz der Bernoullischen Zahl.

Setzen wir darin $\Theta = 0$ und berücksichtigen den Wert für $\chi(2m, 0)$, so wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^{2m}} = S_{2m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2\pi)^{2m} B_m}{(2m)!}. \tag{24}$$

Da $\chi(2m, 0) = \chi(2m, 1)$, so würden wir die nämliche Formel erhalten für $\Theta = 1$.

Für $n = (2m + 1)$ wird $\cos\left(2\lambda\pi\Theta - m\pi - \frac{\pi}{2}\right) =$ $(-1)^m \sin 2\lambda\pi\Theta$; dies in (22) gesetzt, gibt

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin 2\lambda\pi\Theta}{\lambda^{2m+1}} = (-1)^{m-1} \frac{1}{2} (2\pi)^{2m+1} \chi(2m+1, \Theta). \tag{25}$$

Für $\Theta = 0, \frac{1}{2}, 1$ resultiert daraus die identische Gleichung $0 = 0$; dieselbe entsteht ebenfalls, wenn wir (23) nach Θ ableiten. Differenzieren wir (25) nach Θ, so entsteht wieder Formel (23); alles dies sind Kontrollen der Richtigkeit.

Spezialfälle dieser ungeraden Bernoullischen Funktion sind lösbar und sehr zu vereinfachen, wenn ein Mittel gefunden würde, um die ungerade Bernoullische Funktion durch Bernoullische Zahlen oder durch geeignete bestimmte Integrale auszudrücken; doch stösst man gerade bei letzterer Aufgabe auf die Summierung von komplizierten Ausdrücken. So wird z. B. für $\Theta = \frac{1}{4}$ aus Formel (25)

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin \lambda \frac{\pi}{2}}{\lambda^{2m+1}} = (-1)^{m-1} \frac{1}{2} (2\pi)^{2m+1} \chi\left(2m+1, \frac{1}{4}\right).$$

Es wird $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin \lambda \frac{\pi}{2}}{\lambda^{2m+1}} = 1 - \frac{1}{3^{2m+1}} + \frac{1}{5^{2m+1}} - \frac{1}{7^{2m+1}}$

$$+ - \cdots\cdots = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(2\lambda-1)^{2m+1}} = H_{2m+1},$$

somit $$H_{2m+1} = (-1)^{m-1} \frac{1}{2} (2\pi)^{2m+1} \chi\left(2m+1, \frac{1}{4}\right). \qquad (26)$$

Ähnliche Formeln könnten wir für $\Theta = \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \cdots\cdots$ ableiten; jedesmal kommen wir auf Funktionen, die den Bernoullischen Funktionen nahe verwandt sein müssen, da sie ganz ähnlichen Summenformeln genügen.[39])

B. Die imaginäre Komponente.

Zurückgreifend auf Formel (21) und (ϱ) wird, wie leicht einzusehen ist, $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n}$

$$= \frac{1}{2} (2\pi)^n \int_0^1 \left\{ \chi(n, \varphi) - \chi(n, \Theta) \right\} \operatorname{cotg} \pi(\varphi - \Theta)\, d\varphi. \qquad (27)$$

Es ist dies wieder eine ganz allgemeine, sämtliche Fälle einschliessende Formel.

Für $n = 1$ wird, da $\sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos 2\lambda\pi\Theta$,

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos 2\lambda\pi\Theta}{\lambda} = \pi \int_0^1 \left\{ \chi(1, \Theta) - \chi(1, \varphi) \right\} \operatorname{cotg} \pi(\varphi - \Theta)\, d\varphi.$$

Nach längern Umwandlungen, wobei als Integrationskonstante Log 2 genommen ist, wird, wenn Θ als Konstante weggelassen, also bei verändertem $\varphi = \varphi_1$

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos 2\lambda\pi\Theta}{\lambda} = \operatorname{Log}(2 \sin \pi\varphi_1).$$

Es ist auch, wenn $(\varphi - \Theta) = \varphi_1$ gesetzt, da die Grenzen $(-\Theta)$ und $(1 - \Theta)$ werden, $\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n} =$

$$= (2\pi)^n \frac{1}{2} \int_{-\Theta}^{1-\Theta} \{ \chi(n, \varphi_1 + \Theta) - \chi(n, \Theta) \} \operatorname{cotg} \pi \varphi_1 \, d\varphi_1.$$

Das Integral rechts bezeichnen wir mit S; es lässt sich zerlegen in

$$S = \int_0^{1-\Theta} \{ \chi(n, \varphi_1 + \Theta) - \chi(n, \Theta) \} \operatorname{cotg} \pi \varphi_1 \, d\varphi_1$$

$$- \int_0^{+\Theta} \{ \chi(n, \Theta - \varphi_1) - \chi(n, \Theta) \} \operatorname{cotg} \pi \varphi_1 \, d\varphi_1,$$

wenn im zweiten Integral zudem noch φ_1 durch $(-\varphi_1)$ ersetzt wird.

Wir können nun partiell integrieren, indem wir setzen

$$\int \operatorname{cotg} \pi \varphi_1 \, d\varphi_1 = \frac{1}{\pi} \operatorname{Log} (2 \sin \pi \varphi_1).$$

Die finiten Teile der partiellen Integration aus beiden obigen Integralen der Summe S werden, wie wir uns durch Ausführung der Integration überzeugen können, zu Null; es bleiben nur die infiniten Teile, und es wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin\left(2\lambda\pi\Theta - \frac{n\pi}{2}\right)}{\lambda^n}$$

$$= \frac{1}{2} (2\pi)^n \frac{1}{\pi} \int_0^{\Theta} \operatorname{Log} (2 \sin \pi \varphi_1) \, \chi(n-1, \Theta - \varphi_1) \, d\varphi_1$$

$$- \frac{1}{2} (2\pi)^n \frac{1}{\pi} \int_0^{1-\Theta} \operatorname{Log} (2 \sin \pi \varphi_1) \, \chi(n-1, \varphi_1 + \Theta) \, d\varphi_1.$$

Da für $n = (2m + 1)$ der Wert $\sin\left(2\lambda\pi\Theta - m\pi - \frac{\pi}{2}\right) =$ $-\cos(2\lambda\pi\Theta - m\pi) = -(-1)^m \cos 2\lambda\pi\Theta$, so wird

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{m+1} \cos 2\lambda\pi\Theta}{\lambda^{2m+1}}$$

$$= (2\pi)^{2m} \int_0^{\Theta} \operatorname{Log} (2 \sin \pi \varphi_1) \, \chi(2m, \Theta - \varphi_1) \, d\varphi_1$$

$$- (2\pi)^{2m} \int_0^{1-\Theta} \operatorname{Log} (2 \sin \pi \varphi_1) \, \chi(2m, \varphi_1 + \Theta) \, d\varphi_1.$$

Für $\Theta = 0$ verschwindet das erste Integral, und es ist

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^{2m+1}} = (-1)^m (2\pi)^{2m} \int_0^1 \text{Log}\,(2 \sin \pi \varphi)\, \chi(2m, \varphi)\, d\varphi, \quad (28)$$

wenn wieder φ als Integrationsvariabele gewählt wird.

Mit Hülfe dieser Definition als Reihenentwicklung lässt sich die *Raabesche Restformel* ableiten; dann können wir den Zusammenhang derselben mit der *Riemannschen Reihe* nachweisen; diese Beziehungen sprechen deutlich für die Allgemeinheit dieser Definition. Alles hier auszuführen, würde aber den Rahmen vorliegender Arbeit wesentlich überschreiten.[40])

§ 20. Integrale mit Bernoullischen Funktionen.

Schläfli selbst gibt in seinen Vorlesungen keine Integraldarstellungen der Bernoullischen Funktion. Dieselben gestalten sich aber wesentlich einfacher als die entsprechenden der frühern Definitionen. Dieser § liesse sich beliebig weit ausdehnen; es taucht eine grosse Mannigfaltigkeit an Integralen der Bernoullischen Funktion auf. Wir geben hier nur die zum Vergleich wichtigen. Gute Hülfe bei all diesen Darstellungen liefern uns die Formeln (23) und (25).

A. Einfache Integrale.

1. Für die gerade Bernoullische Funktion.

Es interessieren uns einige Spezialfälle der Formel (7); setzen wir darin für die obere Grenze der Reihe nach $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$, so wird vorerst

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \chi(2m, x)\, dx = \frac{(-1)^{m-1}\sqrt{3}}{(2\pi)^{2m+1}} R_{2m+1}, \quad \text{wobei} \quad (29)$$

$$R_{2m+1} = 1 - \frac{1}{2^{2m+1}} + \frac{1}{4^{2m+1}} - \frac{1}{5^{2m+1}} + - \cdots\cdots = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{(3\lambda-2)^{2m+1}} - \frac{1}{(3\lambda-1)^{2m+1}}.$$

Die Funktion R_{2m+1} lässt sich unter Anwendung der Formel

$$\frac{1}{k^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty e^{-kx}\, x^{a-1}\, dx \quad (\alpha)$$

aus der Theorie der Gammafunktion[41]) in ein bestimmtes Integral verwandeln, so dass wird

$$R_{2m+1} = \frac{1}{(2m)!}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\{e^{-x}-e^{-2x}\}}{1-e^{-3x}}\,dx, \text{ somit folgt}$$

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \chi(2m, x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\sqrt{3}}{(2\pi)^{2m+1}\Gamma(2m+1)}\int_0^\infty \frac{x^{2m}\{e^{-x}-e^{-2x}\}\,dx}{1-e^{-3x}}. \quad (30)$$

Analog ist $$\int_0^{\frac{1}{4}} \chi(2m, x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\,2}{(2\pi)^{2m+1}}\,H_{2m+1}, \text{ wobei} \quad (31)$$

$$H_{2m+1} = 1 - \frac{1}{3^{2m+1}} + \frac{1}{5^{2m+1}} - \frac{1}{7^{2m+1}}$$

$$+ - \cdots\cdots = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(2\lambda-1)^{2m+1}}.$$

Durch Anwendung derselben Formel (α) wird

$$H_{2m+1} = \frac{1}{\Gamma(2m+1)}\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{e^x+e^{-x}}\,dx = \frac{1}{2\Gamma(2m+1)}\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{\operatorname{cos} x}\,dx,$$

also $$\int_0^{\frac{1}{4}} \chi(2m, x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\,2}{(2\pi)^{2m+1}\Gamma(2m+1)}\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{e^x+e^{-x}}\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}}{(2\pi)^{2m+1}\Gamma(2m+1)}\int_0^\infty \frac{x^{2m}}{\operatorname{cos} x}\,dx. \quad (32)$$

Entsprechend folgt

$$\int_0^{\frac{1}{6}} \chi(2m, x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\sqrt{3}}{(2\pi)^{2m+1}}\,G_{2m+1}, \text{ wobei} \quad (33)$$

$$G_{2m+1} = 1 + \frac{1}{2^{2m+1}} - \frac{1}{4^{2m+1}} - \frac{1}{5^{2m+1}}$$

$$+ + - - \cdots\cdots = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(3\lambda-2)^{2m+1}} + \frac{(-1)^{\lambda-1}}{(3\lambda-1)^{2m+1}}.$$

Wie früher durch Integrale dargestellt, wird

$$G_{2m+1} = \frac{1}{\Gamma(2m+1)} \int_0^\infty \frac{x^{2m}\{e^{-x}+e^{-2x}\}}{1+e^{-3x}}\,dx, \qquad \text{somit}$$

$$\int_0^{\frac{1}{6}} \chi(2m, x)\,dx = \frac{(-1)^{m-1}\sqrt{3}}{(2\pi)^{2m+1}\Gamma(2m+1)} \int_0^\infty \frac{x^{2m}\{e^{-x}+e^{-2x}\}}{1+e^{-3x}}\,dx. \quad (34)$$

2. Für die ungerade Bernoullische Funktion.

Hier vereinfachen sich die Werte bedeutend, da wir alle durch Bernoullische Zahlen ausdrücken können. Gestützt auf (6) werden, wenn wir wieder der Reihe nach für die obere Grenze $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{6}$ und für die untere Grenze stets 0 setzen, folgende Formeln auf einfache Weise, durch Einsetzen der von früher her bekannten Formeln (9), (13), (16) und (14), entstehen

$$\int_0^{\frac{1}{3}} \chi(2m-1, x)\,dx = (-1)^m \frac{1}{2} \cdot \frac{3^{2m}-1}{3^{2m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \quad (35)$$

$$\int_0^{\frac{1}{4}} \chi(2m-1, x)\,dx = (-1)^m \frac{2^{4m-1}+2^{2m-1}-1}{2^{4m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \quad (36)$$

$$\int_0^{\frac{1}{6}} \chi(2m-1, x)\,dx = (-1)^m \frac{1}{2} \cdot \frac{6^{2m-1}+3^{2m-1}+2^{2m-1}-1}{6^{2m-1}} \cdot \frac{B_m}{(2m)!}. \quad (37)$$

B. Integrale mit trig. Funktionen.

Nehmen wir r als positive ganze Zahl an, so wird nach (25)

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x)\cos 2r\pi x\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}2}{(2\pi)^{2m+1}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m+1}} \cos 2r\pi x\,dx;$$

da aber $\int_0^1 \sin 2\lambda\pi x \,.\cos 2r\pi x\,dx = 0$ für alle Werte von λ, so folgt

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x)\cos 2r\pi x\,dx = 0. \quad (38)$$

Da wir auf die Auswertung eines analogen Integrales kommen, wenn wir die gerade Bernoullische Funktion mit $\sin 2 r \pi x \, dx$ kombinieren, so wird, was auch direkt hätte gezeigt werden können,

$$\int_0^1 \chi(2m, x) \sin 2 r \pi x \, dx = 0. \tag{39}$$

Wir verbinden nun gleichartige Bernoullische Funktionen und trig. Funktionen; es wird

$$\int_0^1 \chi(2m, x) \cos 2 r \pi x \, dx$$

$$= \frac{(-1)^{m-1} 2}{(2\pi)^{2m}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos 2 \pi \lambda x}{\lambda^{2m}} \cos 2 r \pi x \, dx.$$

Der Ausdruck $\int_0^1 \cos 2 \pi \lambda x \, . \cos 2 r \pi x \, dx$ verschwindet für alle Werte des ganzzahligen λ, mit Ausnahme von $\lambda = r$; dafür wird

$$\int_0^1 \cos^2 2 r \pi x \, dx = \frac{1}{2}.$$

Von der Summation unter dem Integralzeichen bleibt somit nur $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r^{2m}}$; daher wird

$$\int_0^1 \chi(2m, x) \cos 2 r \pi x \, dx = \frac{(-1)^{m-1}}{(2 \pi r)^{2m}}. \tag{40}$$

Die entsprechenden Erläuterungen gelten auch für die ungerade Bernoullische Funktion verbunden mit $\sin 2 r \pi x \, dx$; also

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x) \sin 2 r \pi x \, dx = \frac{(-1)^{m-1}}{(2 \pi r)^{2m+1}}. \tag{41}$$

Daraus ergibt sich der

Satz: Die Integrale einer Bernoullischen Funktion verbunden mit einer ungleichartigen trig. Funktion werden zu Null, verbunden mit einer gleichartigen nehmen sie einen bestimmten Wert an.

Wir könnten auch Integrale mit den trigonometrischen Funktionen im Nenner untersuchen; doch würden uns diese Untersuchungen zu weit vom eigentlichen Thema wegführen.

C. Integrale von Produkten der χ-Funktion.

Wir gehen wieder von den Formeln (23) und (25) aus und unterscheiden:

1. Beide Bernoullischen Funktionen seien gerade. Dann wird

$$J = \int_0^1 \chi(2m, x)\,\chi(2n, x)\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}\,2\,(-1)^{n-1}\,2}{(2\pi)^{2m}\,(2\pi)^{2n}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\cos^2 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m}\,\lambda^{2n}}\,dx.$$

Bekanntlich sind

$$\int_0^1 \cos^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{2};\quad \int_0^{\frac{1}{2}} \cos^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{4};\quad \int_0^{\frac{1}{4}} \cos^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{8}.$$

Somit resultieren, da die Doppelsumme verschwindet, wenn wir für

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^{2m+2n}} = S_{2m+2n}$$ den Wert in Bernoullischen Zahlen setzen,

die drei Formeln

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^1 \chi(2m, x)\,\chi(2n, x)\,dx = \frac{(-1)^{m+n}\,B_{m+n}}{(2m+2n)!}.\\
&\int_0^{\frac{1}{2}} \chi(2m, x)\,\chi(2n, x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^{m+n}\,B_{m+n}}{(2m+2n)!}.\\
&\int_0^{\frac{1}{4}} \chi(2m, x)\,\chi(2n, x)\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{(-1)^{m+n}\,B_{m+n}}{(2m+2n)!}.
\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Also folgt $$\int_0^1 F(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} F(x)\,dx = 4\int_0^{\frac{1}{4}} F(x)\,dx, \tag{43}$$

wobei $F(x) = \chi(2m, x)\,\chi(2n, x)$ ist.

Lassen wir $m = n$ werden, so verändert sich (43) nicht, nur dass dann $F(x) = \{\chi(2m, x)\}^2$ wird, während die Formeln (42) übergehen in

$$\left.\begin{aligned}\int_0^1 \{\chi(2m, x)\}^2 dx &= \frac{B_{2m}}{(4m)!},\\ \int_0^{\frac{1}{2}} \{\chi(2m, x)\}^2 dx &= \frac{1}{2}\cdot\frac{B_{2m}}{(4m)!}.\\ \int_0^{\frac{1}{4}} \{\chi(2m, x)\}^2 dx &= \frac{1}{4}\cdot\frac{B_{2m}}{(4m)!}.\end{aligned}\right\} \qquad (44)$$

2. *Beide Funktionen seien ungerade.* Es wird

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x)\,\chi(2n+1, x)\,dx$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}\,2\,(-1)^{n-1}\,2}{(2\pi)^{2m+1}(2\pi)^{2n+1}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin^2 2\lambda\pi x}{\lambda^{2m+1}\,\lambda^{2n+1}}.$$

Es sind bekanntlich

$$\int_0^1 \sin^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{2};\quad \int_0^{\frac{1}{4}} \sin^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{4};\quad \int_0^{\frac{1}{8}} \sin^2 2\lambda\pi x\,dx = \frac{1}{8}.$$

Deshalb resultieren, wenn für $\sum\limits_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda^{2m+2n+2}} = S_{2m+2n+2}$ der Wert in Bernoullischen Zahlen gesetzt wird, da die übrigen Integrale der Doppelsumme zu Null werden,

$$\left.\begin{aligned}\int_0^1 \chi(2m+1, x)\,\chi(2n+1, x)\,dx &= (-1)^{m+n}\,\frac{B_{m+n+1}}{(2m+2n+2)!}.\\ \int_0^{\frac{1}{2}} \chi(2m+1, x)\,\chi(2n+1, x)\,dx &= (-1)^{m+n}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{B_{m+n+1}}{(2m+2n+2)!}.\\ \int_0^{\frac{1}{4}} \chi(2m+1, x)\,\chi(2n+1, x)\,dx &= (-1)^{m+n}\,\frac{1}{4}\cdot\frac{B_{m+n+1}}{(2m+2n+2)!}.\end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

Es wird also auch hier die Beziehung gelten

$$\int_0^1 G(x)\,dx = 2\int_0^{\frac{1}{2}} G(x)\,dx = 4\int_0^{\frac{1}{4}} G(x)\,dx, \quad \text{wobei} \qquad (46)$$

$G(x) = \chi(2m+1, x)\,\chi(2n+1, x)$.

Lassen wir wieder m = n werden, so erfährt die Beziehung (46) keine Änderung, nur dass $G(x) = \{\chi(2m+1, x)\}^2$ wird; die Formeln (45) gehen dann über in

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^1 \{\chi(2m+1, x)\}^2 dx = \frac{B_{2m+1}}{(4m+2)!}. \\ &\int_0^{\frac{1}{2}} \{\chi(2m+1, x)\}^2 dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{B_{2m+1}}{(4m+2)!}. \\ &\int_0^{\frac{1}{4}} \{\chi(2m+1, x)\}^2 dx = \frac{1}{4} \cdot \frac{B_{2m+1}}{(4m+2)!}. \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

3. Eine Bernoullische Funktion sei gerade, die andere ungerade. Dann wird

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x)\, \chi(2m, x)\, dx$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}\, 2\, (-1)^{n-1}\, 2}{(2\pi)^{2m+1} (2\pi)^{2n}} \int_0^1 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{\sin 2\lambda\pi x \,.\, \cos 2\lambda\mu x}{\lambda^{2m+1} \lambda^{2n}}\, dx.$$

Weil $\int_0^1 \sin 2\lambda\pi x \,.\, \cos 2\lambda\pi x\, dx = 0$, so wird

$$\int_0^1 \chi(2m+1, x)\, \chi(2m, x)\, dx = 0. \tag{48}$$

Wir erkennen daraus den

Satz: Die Integrale eines Produktes zweier Bernoullischen Funktionen nehmen einen bestimmten durch Bernoullische Zahlen ausdrückbaren Wert an, wenn die beiden Bernoullischen Funktionen gleichartig, verschwinden aber, wenn dieselben ungleichartig sind.

Die Integraldarstellungen lassen sich noch beliebig weit ausdehnen; doch müssen uns diese Betrachtungen genügen.